МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ ДИНАМІКИ ЧИСЕЛЬНОСТІ ПАРНОКОПИТНИХ В МИСЛИВСЬКИХ ГОСПОДАРСТВАХ УКРАЇНИ

Пількевич І. А., д.т.н., Котков В. І., к.т.н.

Постановка проблеми. Найбільш істотними ознаками популяцій є динаміка чисельності особин. Динаміка чисельності (щільності) популяцій різних видів має дуже важливе для людини, оскільки багато тварин і рослин служать об'єктами її господарської діяльності або причиною якого-небудь збитку. Тому знання закономірностей динаміки чисельності популяції необхідне для прогнозування можливих небажаних явищ і внесення, у разі необхідності, коректив у цю динаміку з метою управління.

Аналіз досліджень. Чисельність будь-якої популяції коливається під впливом дії біотичних і абіотичних факторів [1]. Один і той самий фактор може відігравати, залежно від стану популяції, як позитивну, так і негативну роль. Тому назріла нагальна потреба для впровадження нових методів обробки і аналізу отриманої інформації, які повинні базуватись на моделюванні досліджуваних процесів з використанням сучасних математичних методів прогнозу.

Як відомо [2], прогнозування є складним і важким завданням, яке потребує ґрунтовного аналізу специфічного первинного матеріалу та не менш складної його обробки. В інтегрованій системі прогноз повинен виступати як основа стратегії і тактики, що дозволяє надійно управляти угрупованнями, ефективно застосовувати новітні методи та засоби захисту тварин.

Мета, об'єкт та методика дослідження. Недостатнє теоретичне обґрунтування закономірностей багаторічної і сезонної динаміки популяції копитних у мисливських господарствах України, відсутність методів короткострокового прогнозу розвитку копитних [3] обумовили пріоритетність напрямку досліджень і актуальність обраної теми даної роботи.

Метою роботи є розробка методу математичного моделювання процесу розвитку тваринного світу.

Об'єктом дослідження є процеси розвитку тваринного світу.

В роботі запропонована методологія побудови узагальненої моделі динаміки популяцій, яка базується на основних засадах системології.

Результати дослідження. Всесвітньо відомою математичною моделлю популяції з низькою смертністю, в основу якої покладена задача про динаміку чисельності популяції, є класична модель необмеженого зростання – геометрична прогресія у дискретному поданні,

$$A_{n+1} = qA_n \quad \left(N_{n+1} = rN_n\right) \qquad 1)$$

або експонента – у безперервному

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN\,, \qquad 2)$$

де $r = b_{\max} - d_{\min}$ – потенціальна швидкість природного росту; b – специфічна (питома) народжуваність; d – специфічна (питома) смертність.

Оскільки природна швидкість росту r характеризує внутрішньо властиву живим організмам здатність до розмноження за відсутності обмежуючої дії середовища, Бірг запропонував у 1948 р. використовувати параметр r для числового виразу біотичного потенціалу, визначеного Чепліном. Якщо $r > 1$, то чисельність популяції збільшується, а якщо $r = 1$, то чисельність популяції стабільна.

Відповідно до експоненціальних законів (модель (1) або (2)) ізольована популяція розвивалася б в умовах необмежених ресурсів. У природі таке зустрічається вкрай рідко. Прикладом є розмноження видів завезених в місця, де є багато їжі та відсутні конкуруючі види і хижаки.

Вперше системний фактор, що обмежує зростання популяції, описав Ферхюльст в рівнянні логістичного зростання [2]:

$$\frac{dN(\mathrm{t})}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right). \qquad 3)$$

Логістичне рівняння володіє двома важливими властивостями. При малих значеннях N чисельність зростає експоненціально (як у рівнянні (2)), а при великих – наближається до певної межі K.

Ця величина, яка називається ємністю екологічної ніші популяції, визначається обмеженістю харчових ресурсів та багатьма іншими чинниками, які можуть бути неоднаковими для різних видів. Таким чином, ємність екологічної ніші становить собою системний фактор, який визначає обмеженість зростання популяції в цьому ареалі проживання.

Рівняння (3) можна також переписати у вигляді [3]:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN - \delta N^2, \quad 4)$$

де δ – коефіцієнт внутрішньовидової конкуренції (за харчовий ресурс, притулок тощо).

Аналітичний розв'язок рівняння (3) має вигляд [4]:

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K - N_0 + N_0 e^{rt}}. \quad 5)$$

Формула (5) описує кінетичну криву, тобто залежність чисельності популяції від часу. Видно, що при необмеженому зростанні часу t чисельність популяції прагне до значення $N = K$ при будь-яких початкових умовах (при будь-якому N_0).

З метою розширення факторів, що впливають на розвиток популяцій, авторами роботи у 2009 р. була розроблена узагальнена логістична модель динаміки популяцій, яка описується нелінійним диференціальним рівнянням [5]:

$$\left(a_1 + \frac{1}{N(t)}\right)\frac{dN(t)}{dt} + \frac{1}{a_0}N(t) - \varphi = 0 \quad 6)$$

або

$$(1 + a_1 N)\frac{dN}{dt} = \varphi N - \frac{N^2}{a_0}, \quad 7)$$

де $N(t)$, N – кількість особин в популяції; φ – потенціал експонентного росту; a_0, a_1 – параметри втрат, що стримують експонентне зростання кількості особин в популяції.

Рівняння (7) відрізняється від рівняння Ферхюльста (моделі Лоткі-Вольтерра) $\frac{dN}{dt} = \varphi N - \frac{N^2}{a_0}$ наявністю нелінійного елемента $a_1 N \frac{dN}{dt}$.

Аналітичний розв'язок рівняння (7) отриманий в [6]. Дискретна узагальнена логістична функція в рекурентній формі має вигляд:

$$N_{k+1} = \left[1 + \varphi\left(\frac{1}{1 + a_1 N_k} - \frac{N_k / b_0}{1 + a_1 N_k}\right)\right] N_k. \quad 8)$$

При великих значеннях ємності $b_0 \to \infty$ логістична функція (8) вироджується в дискретну експоненціальну функцію

$$N_{k+1} = \left(1 + \varphi \frac{1}{1 + a_1 N_k}\right) N_k, \quad 9)$$

а при великих значеннях $a_1 N >> 1$ експоненціальна функція (9) вироджується в лінійну функцію виду $N_{k+1} = N_k + \varphi / a_1$.

З метою аналізу можливості прогнозування дослідимо модель (5). Аналіз проведемо методом порівняння моделей експонентного росту та експонентного росту з обмеженням (модель Лоткі-Вольтерра або узагальненої логістичної моделі). Розрахуємо абсолютну похибку між моделями, що досліджуються, за допомогою формули [3]:

$$\Delta = N_0 e^{rt} - \frac{N_0 a_0 e^{rt}}{a_0 - N_0 + N_0 e^{rt}} \approx N_0\left(e^{rt} - 1\right) \text{ при } t \to \infty.$$

Тоді відносна похибка буде дорівнювати:

$$\delta \approx -1 + e^{rt}.$$

Графік абсолютної похибки представлений на рис. 1.

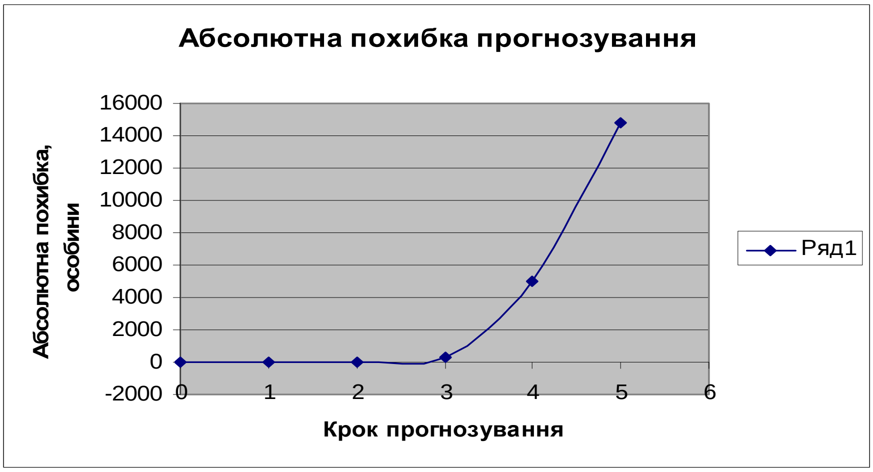

Рис. 1. Графік абсолютної похибки прогнозування

Аналіз рис. 1 дозволяє стверджувати про те, що за допомогою узагальненої логістичної моделі можна проводити прогнозування чисельності мисливських тварин не більше ніж на 3 кроки (на 3 роки).

Накопичення похибки прогнозних розрахунків можна представити за допомогою ряду: $\Delta_0 = 0$; $\Delta_1 = 0{,}2$; $\Delta_2 = 10{,}3$; $\Delta_3 = 349{,}7$; $\Delta_4 = 4965$; $\Delta_5 = 14790$. Аналіз ряду показує, що похибка починає різко зростати після четвертого кроку ($\Delta_3 \approx 350$ *особин*).

З метою зменшення похибки прогнозування при оцінюванні робочих параметрів математичних моделей динаміки популяцій окремих видів парнокопитних доцільно використовувати апріорну інформацію. Наприклад, той факт, що популяції розвиваються за експоненціальним законом $\left(N(t) = Ne^{rt}\right)$. В цьому випадку робочі параметри математичних моделей необхідно визначати за допомогою розвязку системи рівнянь [6]:

$$\begin{cases} N_{k+1} = \left[1 + \varphi\left(\dfrac{1}{1 + a_1 N_k} - \dfrac{N_k / b_0}{1 + a_1 N_k}\right)\right] N_k; \\ N_{k+1} = N_k e^{\varphi t}. \end{cases} \qquad 10)$$

Використання апріорної інформації про поведінку функції динаміки популяцій дозволяє зменшити абсолютну похибку прогнозування на $\Delta = \Delta_4 - \Delta_3 \approx 4615$ *особин*.

З метою збільшення строку прогнозування доцільно робочий параметр b_0 визначати не за допомогою (10), а використовуючи значення оптимальної щільності відповідних тварин. Наприклад, середні значення оптимальної щільності в досліджуваних державних лісомисливських господарствах для: козуль – 17,7 *голів/1000 га*; кабанів – 3,4 *голів/1000 га* [7]. Використання апріорної інформації про оптимальну щільність парнокопитних дозволяє зменшити абсолютну похибку прогнозування на $\Delta = \Delta_3 - \Delta_2 \approx 340$ *особин*.

Висновки. Серед моделей динаміки популяцій в математичній екології найбільше розповсюдження отримала логістична функція Ферхюльста (1838р.), яка використовується для опису як поведінки популяцій, так і їх взаємодії, наприклад, в моделі Лоткі-Вольтерра. До недоліків логістичної функції можна віднести її евристичне походження та неповне відображення втрат.

Удосконалення логістичної моделі динаміки популяцій досягається за рахунок доповнення її нелінійним елементом, який описує втрати, що пов’язані з опором середовища росту популяції. Узагальнена логістична функція, що отримана теоретичним шляхом, відбиває ємнісні та резистивні втрати і може використовуватися для опису динаміки чисельності парнокопитних в мисливських господарствах України.

Порівняльний аналіз моделей експонентного росту та Лоткі-Вольтерра дозволяє стверджувати про те, що використовувати узагальнену логістичну модель можна тільки при короткострокових прогнозах (на 3 роки).

З метою збільшення строку та зменшення похибки прогнозування доцільно використовувати запропоновані методики визначення робочих параметрів моделей динаміки чисельності парнокопитних в мисливських господарствах України. Використання апріорної інформації про поведінку функції динаміки популяції та оптимальної щільності тварин дозволить зменшити абсолютну похибку прогнозування на 4955 *особин*.

Використані джерела інформації

1. Базыкин А.Д. Динамика плотности лесных насекомых: бифуркационный подход / А.Д. Базыкин, Ф.С. Березовская, А.С. Исаев, Р.Г. Хлебопрос / Журнал теоретической биологии. – 1997. – №186(3). – С. 267-278. – http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-0031558029&partnerID=40: ИСТОЧНИК: Scopus.
2. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології / В.І.Лаврик. – К.: Фітоцентр, 1998. – 316 с.
3. Пількевич І.А. Дослідження можливості прогнозування динаміки популяцій / І.А.Пількевич, В.І.Котков, О.В.Маєвський // Збірник наукових праць Подільського державного аграрно-технічного університету. – 2012. – Спеціальний випуск до VII Міжнародної науково-практичної конференції „Сучасні проблеми збалансованого природокористування”, 29-30 листопада 2012. – С. 181-185.
4. Пількевич І.А. Динаміка популяцій / І.А.Пількевич, В.І.Котков, О.В.Маєвський // Збірник наукових праць Подільського державного аграрно-технічного університету. – 2010. – Спеціальний випуск до V науково-практичної конференції „Сучасні проблеми збалансованого природокористування”, 25-26 листопада 2010. – С. 15-19.
5. Пилькевич И.А. Обобщенная логистическая модель динамики популяций / И.А.Пилькевич, В.И.Котков, А.В.Маевский // Материалы III-го Всеукраинского съезда экологов с международным участием „Экология-2011”. – Винница: ВНТУ, 21-24 сентября 2011. – С. 222-226.
6. Пількевич І.А. Моделювання і прогнозування динаміки чисельності мисливських тварин: монографія / І.А.Пількевич. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2012. – 128 с.
7. Делеган І.В. Біологія лісових птахів та звірів / І.В.Делеган, І.І.Делеган. – Львів: Поділ, 2005. – 600 с.