УДК 631.333

В.С. Ловейкін
д.т.н., професор
Ю.В. Човнюк
к.т.н., професор
А.І. Дитюк
здобувач
Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ
Рецензент – член редколегії «Вісник ЖНАЕУ» д.т.н. Лось Л.В.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЧАСТИНКИ МІНЕРАЛЬНИХ ДОБРИВ ПІСЛЯ СХОДЖЕННЯ З ДИСКА ВІДЦЕНТРОВОГО РОЗКИДАЧА ЗА НАЯВНОСТІ ЗМІННОГО АЕРОДИНАМІЧНОГО ОПОРУ СЕРЕДОВИЩА (ПОВІТРЯ)

Встановлена математична модель руху частинки мінеральних добрив після сходження з диска відцентрового розкидача за наявності змінного аеродинамічного опору.

Постановка проблеми

Для розширення функціональних можливостей машин для внесення мінеральних добрив і покращення показників ефективності необхідно провести спеціальні дослідження, зокрема, розробити математичні моделі й на їх основі отримати залежності, які описують закономірності процесів щодо загальних і часткових випадків руху мінеральних добрив від лопатки розкидального органу до поверхні поля по оптимальній траєкторії за наявності змінного аеродинамічного опору середовища (повітря).

Після сходження частинки добрив з лопатки диска подальший її рух відбувається під дією сили ваги Q = mg (де m – маса частки, g – прискорення вільного падіння) і сили опору середовища (повітря). Остання сила вносить у траєкторію руху частинки суттєві коригування для підвищення продуктивності машин, які призначені для внесення у ґрунт мінеральних добрив. Необхідно в першу чергу розробити адекватну математичну модель руху у середовищі (повітрі) частинок добрив. При цьому бажано якомога точніше врахувати вплив на вказаний рух аеродинамічного опору і, зокрема, його змінність у часі.

Огляд літератури з теми дослідження

Рух частки мінеральних добрив після сходження її з диска відцентрового розкидача в середовищі з опором (повітря) детально розглянуті у роботах [1–3]. Проте автори не враховують у своїх дослідженнях змінних властивостей аеродинамічного опору середовища, що відбуваються з плином часу (t). Саме це буде враховано й досліджено у даній роботі.

Мета роботи полягає у встановленні основних закономірностей руху частинки мінеральних добрив після її сходження з диска відцентрового розкидача за наявності змінного аеродинамічного опору середовища (повітря). При цьому буде використаний підхід роботи [4] у межах моделі динаміки руху матеріальної точки.

Виклад основного змісту дослідження

Нижче у рамках динаміки матеріальної точки пропонується математичний опис полюсу часточки мінеральних добрив після її сходження з диска відцентрового розкидача з врахуванням змінного аеродинамічного опору середовища (повітря).

При використанні традиційного підходу [4] до постановки задачі динаміки матеріальної точки маємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}^2; \; m\ddot{y} = -mg, \tag{1}$$

де m – маса; g = 9,81 м/с^2; $\left(\dot{\ }\right) = \dfrac{d}{dt}$; $\left(\ddot{\ }\right) = \dfrac{d^2}{dt^2}$; x та y – координати центра маси часточки, які відраховуються відповідно у горизонтальному та вертикальному напрямках; k – коефіцієнт аеродинамічного опору, відносно якого припускаємо те, що він залежить від часу (t), тобто:

$$k = k(t). \tag{2}$$

Позначимо:

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{kt}{m}. \tag{3}$$

Тоді рівняння (1) набудуть вигляду:

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x}^2, \; \ddot{y} = -g. \tag{4}$$

Початкові умови такі (рис. 1):

$$\begin{cases} x(o) = 0; \; \dot{x}(o) = v\cos\varphi; \\ y(o) = 0; \; \dot{y}(o) = v\sin\varphi, \end{cases} \tag{5}$$

де v – швидкість, з якою злітає частка добрив з диска відцентрованого розкидача; φ – початковий кут нахилу траєкторії руху частинки до горизонту.

Інтегрування другого з рівнянь (4) дає:

$$y = y_0 + v\sin\varphi t - \frac{gt^2}{2}. \tag{6}$$

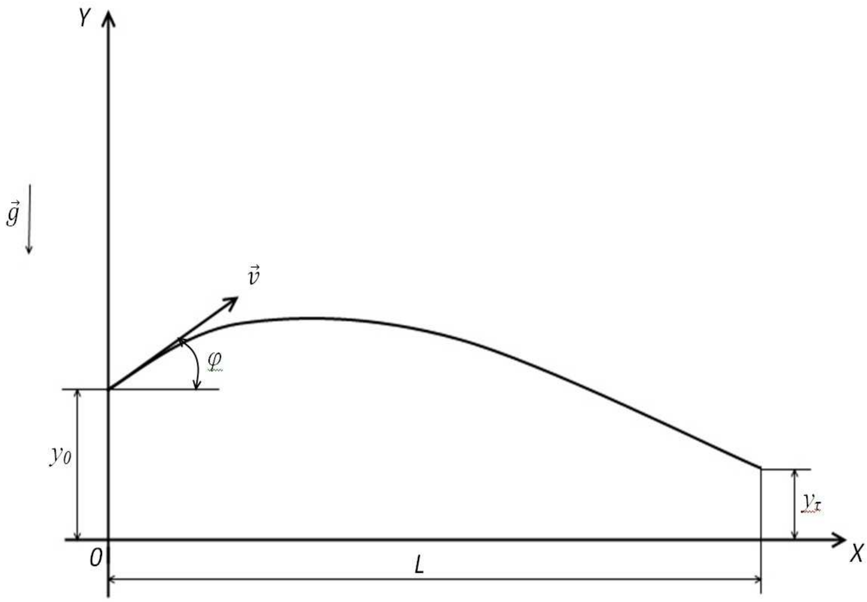

Рис. 1. **Траєкторія руху частки мінеральних добрив після сходження з диска відцентрованого розкидача**

Нехай час (тривалість) польоту частки мінеральних добрив дорівнює τ , тоді:

$$y_\tau = v\sin\varphi\tau + y_0 - \frac{g\tau^2}{2}, \tag{7}$$

звідки випливає:

$$\tau = \frac{1}{g}\left[v\sin\varphi + \sqrt{v^2\sin^2\varphi + 2(y_0 - y_\tau)g}\,\right]. \tag{8}$$

При $y_0 = y_\tau$ (симетрична траєкторія руху частки) маємо відомий результат:

$$\tau = \frac{2v\sin\varphi}{g}. \tag{9}$$

Введемо нову змінну *Z* за формулою:

$$Z = \dot{x} \tag{10}$$

Тоді перше з рівнянь (4) набуде вигляду:

$$\dot{Z} = -\gamma(t)Z^2. \tag{11}$$

При початковій умові:

$$Z(0) = v\cos\varphi \tag{12}$$

інтеграл рівняння (11) буде:

$$Z = \frac{1}{\int_0^t \gamma(t')dt' + \dfrac{1}{\nu\cos\varphi}}. \tag{13}$$

Враховуючи формулу (10), далі отримуємо:

$$X(t) = \int_0^t \frac{dt'}{\int_0^{t'} \gamma(t'')dt'' + \dfrac{1}{\nu\cos\varphi}}. \tag{14}$$

Для дальності польоту частки L знайдемо:

$$L = \int_0^t \frac{dt'}{\int_0^{t'} \gamma(t'')dt'' + \dfrac{1}{\nu\cos\varphi}}. \tag{15}$$

Якщо знехтувати аеродинамічним опором, то з формули (15) знайдемо:

$$L = \nu\cos\varphi\tau = \frac{\nu\cos\varphi}{g}\left[\nu\sin\varphi + \sqrt{\nu^2\sin^2\varphi + 2(y_0 - y_\tau)g}\right]. \tag{16}$$

При $y_0 = y_\tau$ маємо відоме співвідношення:

$$L = \frac{\nu_0^2\sin 2\varphi}{g}, \nu = \nu_0. \tag{17}$$

Якщо $(y_0 - y_\tau) = H$, де H – висота диска відцентрованого розкидача над поверхнею ґрунту, тоді:

$$L = \nu\cos\varphi\tau = \frac{\nu\cos\varphi}{g}\left[\nu\sin\varphi + \sqrt{\nu^2\sin^2\varphi + 2gH}\right]. \tag{18}$$

Приймемо для функції $\gamma(t)$ апроксимуючий вираз:

$$\gamma(t) = b - 2at \geq 0,$$

де a та b – невід'ємні константи, що визначається статистичною обробкою експериментів.

Крім того, зазначимо:

$$C = \frac{1}{\cos\varphi}. \tag{20}$$

тоді отримаємо [5]:

$$L = \int_0^t \frac{dt}{c + bt - at^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4ac}} ln\left|\frac{(b - \sqrt{b^2 + 4ac} - 2a\tau)(b + \sqrt{b^2 + 4ac})}{(b + \sqrt{b^2 + 4ac})(b - \sqrt{b^2 + 4ac})}\right|. \tag{21}$$

Розглянемо випадок:

$$b = 2a\tau. \tag{22}$$

тоді умова $\gamma(t) \geq 0$ виконується, оскільки $\tau \geq t$.

Вносячи формулу (22) до виразу (21), отримаємо:

$$L = \frac{1}{2\sqrt{a^2\tau^2 + ac}}\, ln\left|\frac{a\tau + \sqrt{a^2\tau^2 + ac}}{a\tau - \sqrt{a^2\tau^2 + ac}}\right|. \qquad (23)$$

Розглянемо граничний перехід при $a \to 0$. При цьому маємо:

$$ln\left|\frac{a\tau + \sqrt{a^2\tau^2 + ac}}{a\tau - \sqrt{a^2\tau^2 + ac}}\right| = ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{c}{a\tau^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{c}{a\tau^2}}}\right| = 2\left[\left(1 + \frac{c}{a\tau^2}\right)^{-1/2} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{c}{a\tau^2}\right)^{-\frac{2}{3}} + \ldots\right]. \quad (24)$$

Тому:

$$\lim_{a \to 0} L = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\left\{a\tau\left(1 + \frac{c}{a\tau^2}\right)\right\}} = \frac{\tau}{c} = \nu \cos\varphi\tau, \qquad (25)$$

що співпадає з отриманими раніше результатами.

У таблиці 1 надані результати розрахунку L для різних значень τ і c при $a = 0{,}01(\text{мс})^{-1}$, за умови (22).

Таблиця 1. **Значення *L* (м) для різних τ (c) та c c/м**

$n\begin{pmatrix}\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix}$, м/с	c, с/м	τ, с	L, м
10	0,1	2	15,96
25	0,04	5	30,17
50	0,02	10	26,25

Аналіз даних таблиці 1 показує, що при $ct = \text{const} = 0{,}2$ для L існує максимум, який, використовуючи (23), й (24), можна визначити з умови $\left(a = 0{,}01\frac{1}{\text{мс}}\right)$:

$$t^* = \sqrt[3]{5e} \approx 4{,}65 \text{ с}. \qquad (26)$$

Для $t^* = 4{,}65$счс$^* = 0{,}043\frac{\text{с}}{\text{м}}$; $L^*_{max} \approx 30{,}38$ м.

Висновки

1. Створено математичну модель руху частки мінеральних добрив після її сходження з диска відцентрованого розкидача за наявності змінного

аеродинамічного опору середовища (повітря) і встановлено основні закономірності вказаного руху.

2. Встановлено, що при $ct = \text{const} = 0{,}2$ залежність $L = L(\tau)$ (при $a = 0{,}01(\text{mc})^{-1}$) має характерний максимум: $L_{\max}(t = 4{,}65\text{c}) \approx 30{,}4$м.

3. Отримані в роботі результати мають у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих методів інженерних розрахунків відцентрованих розкидачів мінеральних добрив.

Література

1. *Заика П.М.* Свободное движение материальной точки в спокойной изотройной газообразной среде / *П.М. Заика, В.И. Мельник, А.И. Аникеев* // Вестник Харьковского гос. тех. ун-та «Харьковский политехнический институт». Динамика и прочность машин. – 2001. – Вып. 25.
2. *Заїка П.М.* Теорія сільськогосподарських машин. Том 1 (Ч. 3). Машини для приготування і внесення добрив / *П.М. Заїка*. – Харків : Око, 2002. – 352 с.
3. Методические указания к изучению расчетного курса лекций «Сельскохозяйственные и мелиоративные машины». Избранные задачи земледельческой механики. Тема 8. Движение обрабатываемого материала в сопротивляющей среде. Вып 1 / сост. *П.М. Заика.* – Харьков : ХИМЭСХ, 1991. – 62 с.
4. *Халфман Р.Л.* Динамика / *Р.Л. Холфман.* – М. : Наука, 1972. – 568 с.
5. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / *Г.Б. Двайт* – М. : Наука, 1973. – 228 с.