SCIENTIFIC HORIZONS

Journal homepage: https://sciencehorizon.com.ua

Scientific Horizons, 23(11), 39-52

UDC 51.7; 620.1

DOI: 10.48077/scihor.23(11).2020.39-52

INFLUENCE OF THE STATIONARY AND PERTURBED STATE OF THE CENTRAL FORCE FIELD ON THE FRACTAL CHARACTERISTICS OF THE ATTRACTOR

Ivan Grabar[1]*, Olga Grabar[2]

[1]Polissia National University
10008, 7 Staryi Blvd., Zhytomyr, Ukraine

[2]Zhytomyr Polytechnic State University
10005, 103 Chudnivska Str., Zhytomyr, Ukraine

Article's History:
Received: 25.10.2020
Revised: 10.11.2020
Accepted: 20.11.2020

Corresponding author:
Polissia National University, 10008, 7 Staryi Blvd., Zhytomyr, Ukraine, E-mail: ivan-grabar@ukr.net

Suggested Citation:
Grabar, I., & Grabar, O. (2020). Influence of the stationary and perturbed state of the central force field on the fractal characteristics of the attractor. *Scientific Horizons,* 23(11), 39-52.

Abstract. The paper states that the known algorithms for generating and constructing fractal sets can be significantly expanded through the family of new algorithms proposed by the authors. These algorithms are based on modelling the attractors of motion of a material point in the field N of central forces in a discrete formulation. When only one of these forces is accidentally switched on at any given time, the point attractor has a strictly fractal structure. It is shown that the perturbation of one or more of the N central forces leads to a change in the structure of the attractor. Thus, the areas of the attractor D_p, controlled by the perturbed forces, with an increase in the perturbation radius, evolve to the perturbation trajectory. For biharmonic perturbations, it is shown that these subsets belong to the inner region of the 2n–point. It has been established that for small values of the perturbation radius R the parameter $n \to \infty$, and for large values of R the parameter $n \to 1$. For the field of central forces in the form of matrices 2*2; 3*3; 5*5 the quantitative models $n(2R/B; m)$ are constructed and their close correlation with the perturbation parameter R, the size of the side B of the square matrix of the field of central forces and the "gravitational" parameter m is shown. It is shown that the gnoseology of the proposed algorithms originates from the well-known algorithm of M. Barnsley, but the physical and software components are significantly improved and developed. The proposed family of algorithms allows to expand the possibilities of generating original (exclusive) fractal sets up to ~ 10^{40}... 10^{50} pieces. At the same time, it is possible to control the fractal dimension, porosity, specific gravity, aerodynamic and hydraulic resistance, noise, sound and thermal insulation properties, colour of individual subregions, etc. in a wide range of values. It is shown that a significant part of such fractal sets, especially those with a high degree of symmetry, can be useful for solving problems in the field of design, ergonomics and aesthetics, for decorating buildings, clothing, footwear, haberdashery, toys, as well as for creating puzzles, IQ-tests, etc.

Keywords: attractor, central force field, chaotic dynamics, perturbed state, monofractal, multifractal

ВПЛИВ СТАЦІОНАРНОГО ТА ЗБУРЕНОГО СТАНУ ПОЛЯ ЦЕНТРАЛЬНИХ СИЛ НА ФРАКТАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ АТТРАКТОРА

Іван Григорович Грабар[1], Ольга Іванівна Грабар[2]

[1]Поліський національний університет
10008, б-р Старий, 7, м. Житомир, Україна

[2]Державний університет «Житомирська політехніка»
10005, вул. Чуднівська, 103, м. Житомир, Україна

Анотація. У статті показано, що відомі алгоритми генерування та конструювання фрактальних множин можуть бути суттєво розширені завдяки запропонованому авторами сімейству нових алгоритмів. Дані алгоритми базуються на моделюванні аттракторів руху матеріальної точки в полі N центральних сил у дискретній постановці. При випадковому включенні в кожен момент часу лише однієї з цих сил аттрактор точки має строго фрактальну будову. Показано, що збурення однієї чи кількох із N центральних сил призводить до зміни структури аттрактора. Так, області аттрактора $D_{зб}$, що контролюються збуреними силами, зі збільшенням радіуса збурення еволюціонують до траєкторії збурення. Для бігармонійних збурень показано, що ці підмножини належать внутрішній області $2n$–кола. При цьому встановлено, що при малих значеннях радіуса збурення R параметр $n\to\infty$, а при великих значеннях R параметр $n\to1$. Для поля центральних сил у вигляді матриць 2x2; 3x3; 5x5 побудовані кількісні моделі $n(2R/B;\ m)$ та показано їх тісну кореляцію з параметром збурення R, розміром сторони B квадратної матриці поля центральних сил і «гравітаційного» параметра m. Показано, що гносеологія запропонованих алгоритмів бере початок від відомого алгоритма М. Барнслі, однак фізична та програмна складові значно вдосконалені та розвинені. Запропоноване сімейство алгоритмів дозволяє розширити можливості генерування оригінальних (ексклюзивних) фрактальних множин до ~10^{40}...10^{50} штук. При цьому є можливість керувати фрактальною розмірністю, пористістю, питомою вагою, аеродинамічним і гідравлічним опором, шумо-звуко-теплоізоляційними властивостями, забарвленням окремих підобластей тощо в широких діапазонах значень. Показано, що значна частина таких фрактальних множин, особливо ті, що мають високий ступінь симетрії, можуть бути корисні для вирішення задач дизайну, ергономіки та естетики, для оздоблення будівель, одягу, взуття, галантерейних виробів, іграшок, а також для створення головоломок, IQ-тестів тощо

Ключові слова: аттрактор, поле центральних сил, хаотична динаміка, збурений стан, монофрактал, мультифрактал

ВСТУП

Фрактали підстерігають нас на кожному кроці – у рослинах і техніці, у природних ландшафтах і урбанізованих системах, обробці сигналів і космічних знімків, аналізі процесів руйнування твердих тіл і вивченні структур полімерів тощо. Автори хочуть продемонструвати, що більшість задач генерування фрактальних структур та орнаментів – можливо генерувати і вивчити як мінімум ще одним способом, за алгоритмами авторів комп'ютерного моделювання аттракторів руху матеріальної точки в полі N центральних сил з почерговим імпульсним включенням однієї із сил. При цьому порядок включення F_{ij} є випадковим. Наразі це рівною мірою можливо для продукування як для моно-, так і для мультифракталів.

Ще до недавнього часу кожен новий тип фракталів був новиною серед науковців, що довго обговорювалась, вивчалась, цитувалась у сотнях чи навіть тисячах публікацій зі фрактальної геометрії. Підхід, запропонований авторами, дозволяє поставити продукування фракталів на промислову основу. Клас алгоритмів, розроблений авторами, дозволяє отримати неймовірно велике число нових фрактальних структур, що утворюють глобальну множину $\hat{U}\approx10^{40}...10^{50}$ штук і більше, що можна вважати нескінченно великим, що дорівнює, наприклад, кількості атомів планети Земля. До цієї глобальної множини $\hat{U}$ ввійшли та легко відтворюються алгоритмами авторів усі відомі фрактали – Коха, Кантора, Серпинського, Вісекка, сніжинки, губки, килимки тощо.

Хочемо особливо наголосити, що алгоритми авторів дозволяють з єдиних позицій вивчати задачі теорії хаосу, детермінованої динаміки

точки в полі багатьох центральних сил, синергетики та фрактальної геометрії. Як показують результати моделювання, структура фрактальних аттракторів дуже чутлива до кількості центральних сил N і координат їх розміщення $\{X_jY_j\}$, «гравітаційної» характеристики поля m, коефіцієнта прозорості бар'єра кожної з сил, наявності чи відсутності збурень точок прикладання центральних сил $\{X_jY_j\}$ і типу функції збурення тощо.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

За останнє десятиріччя в теорії і технологіях застосування фрактального аналізу отримано багато нових результатів. Основи сучасної науки про фрактали заклав Бенуа Мандельброт [1–3]. Ним же запропонована велика кількість прикладних задач фрактального аналізу різноманітних систем і процесів живої та неживої природи – від геометричних об'єктів до часових трендів фінансових ринків. У [4–6] підходи фрактального аналізу знайшли свій подальший розвиток до аналізу динамічних систем, творів мистецтва, дизайну, і, власне, на наших очах інструменти фрактальної геометрії самі спроможні генерувати твори мистецтва та дизайну – «техно», «абстракціонізму», «ігор розуму» тощо.

У [7] показано можливості фрактального аналізу до вивчення характеристик нанокластерів. Зокрема, виявлено вплив фрактальної розмірності цих кластерів на криву намагнічування, що дозволило авторам запропонувати нову методологію оцінки фрактальних характеристик нанокластерів саме за кінетикою кривих намагнічування.

Понад 25 років тому М. Барнслі запропонував оригінальний алгоритм, що дозволяє виявити фрактальну природу броунівського руху, принаймні, деяких його класів. Одним із обмежень даного алгоритму є постійний масштаб перетворень координат точки, що взаємодіє з обмеженим числом полюсів. Зокрема, для N=3 і масштабної константи m=2 за цим алгоритмом легко побудувати трикутник Серпинського (рис. 1) [8].

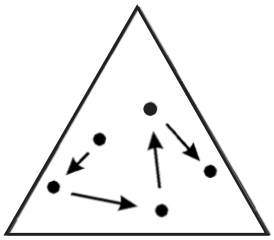


Рисунок 1. *Застосування алгоритму М. Барнслі до побудови фрактала Серпинського*

Джерело: [8]

Автори [9] розкривають фрактальну природу української національної вишивки, на основі чого пропонують сучасні засоби її подальшого розвитку, зокрема, на основі програмування процесу вишивання. У [10–11] показано можливості сучасної комп'ютерної графіки до вивчення фрактальної геометрії, класифікації фрактальних множин та узагальнень, що дозволяють виявити перспективні напрями досліджень.

У [12] продемонстровано переваги фрактальних підходів для успішного вирішення практичних задач дистанційного зондування Землі. У [13–16] В.М. Єськовим і його науковою школою виявлено особливості хаотичної поведінки складних біосистем (complexity). Доведено неможливість застосування детерміністських і стохастичних підходів при моделюванні цієї поведінки через хаотичні зміни вектора стану системи. Авторами [17–20] запропоновано нові підходи до моделювання перколяційно-фрактальних систем з врахуванням хаотичної динаміки та скейлінгових перетворень.

У [21] продемонстровано різноманітність генерування фрактальних структур, зокрема, фрактальних кілець, побудовані відповідні алгоритми та наведено результати їх застосування. У [22] наведено можливості застосування фрактального аналізу до кількісного моделювання річкових систем, побудови їх графічних і динамічних моделей.

МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Авторами розроблено сімейство алгоритмів побудови аттракторів (інтегрування руху) матеріальної точки під дією системи N центральних сил (1):

$$F_1(X_1Y_1);\ F_2(X_2Y_2);\ F_3(X_3Y_3);\ \ldots;\ F_N(X_NY_N) \qquad (1)$$

де координати точок прикладення центральних сил (X_1Y_1); (X_2Y_2); (X_3Y_3); … (X_NY_N) утворюють деяку множину Ω, що разом з характеристикою m «гравітації» поля визначає вид, форму, структуру, пористість і фрактальну розмірність аттрактора.

При цьому в заданий дискретний момент часу на матеріальну точку діє лише одна з центральних сил $F_j(X_jY_j)$, порядок вибору якої є випадковим. У наступний момент часу діє інша центральна сила з заданої множини N. Саме випадковий вибір центральної сили ріднить запропоновані алгоритми з відомими алгоритмами побудови фрактальних множин М. Барнслі [8].

Фізична модель запропонованих алгоритмів базується на екрануванні в заданий дискретний

момент часу N-1 центральних сил, крім однієї, вибраної випадковим чином за будь-яким законом розподілу випадкової величини.

При цьому якщо точки прикладення центральних сил ($X_j Y_j$) є незмінні, то аттрактор є незбурений. У даній роботі автори ставили за мету дослідити вплив збурення однієї чи кількох центральних сил на структуру та фрактальні властивості аттрактора. Зокрема, як ортогональне бігармонійне збурення однакової частоти впливає на розміри та геометрію підобласті аттрактора збуреної сили.

Алгоритми реалізовані в середовищах C++, ПАСКАЛЬ, Turbo BASIK, у кожному з яких є свої переваги та недоліки в швидкості моделювання та управління файлами. Детальні дослідження незбурених і збурених аттракторів для широкого діапазону параметрів N, Ω, m, типів збурення тощо наведені в монографії авторів [23].

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Постановка задачі

Ідею М. Барнслі [8] про побудову фрактальних аттракторів можливо трансформувати на рух матеріальної точки в полі N центральних сил з випадковим включенням у кожен момент часу лише однієї з цих центральних сил. При стаціонарному та збуреному стані аттрактори демонструють різну поведінку. Так, при стаціонарному розміщенні точок прикладання кожної з N центральних сил і стаціонарному «гравітаційному» полі за будь-якої кількості ітерацій аттрактор залишається монофрактальним, конфігурація якого відтворює контури множини точок прикладення центральних сил (X_{ij}; Y_{ij}). У даній роботі цікавить те, як вплине на вид і характеристики аттрактора збурення однієї чи кількох із N центральних сил. Для випадку (2):

$$|\overrightarrow{F_{ij}}| = \text{const} \qquad (2)$$

– отримуємо монофрактал, геометрія якого повторює контури множини Ω (X_{ij}; Y_{ij}). Будемо називати цей випадок стаціонарним однорідним полем центральних сил. Для різноманітних конфігурацій Ω (X_{ij}; Y_{ij}) авторами досліджено види, типи та структури фрактальних аттракторів, запропонована їх класифікація. Однак для (3):

$$|\overrightarrow{F_{ij}}| \neq \text{const} \qquad (3)$$

– маємо локально неоднорідне поле центральних сил, і аттрактор руху матеріальної точки в такому полі має мультифрактальну структуру.

Для випадків (2) і (3) запропоновані інженерні співвідношення, що дозволяють визначити фрактальну розмірність аттракторів, умови перетину z_1 підмножин (цілісність аттрактора при 3D-продукуванні), пористість z_2, залишкову міцність z_3, гідро- та аеродинамічну проникність z_5, шумопоглинання z_6, вільну поверхню z_7 тощо (4):

$$W_{(Z_1)} = W_{(Z_1 Z_2 Z_3 \ldots)} \qquad (4)$$

Для простих конфігурацій Ω (X_{ij}; Y_{ij}) типу кільця, неповні кільця, решітки, неповні решітки для різноманітних випадків симетрії: одна вісь симетрії; дві осі симетрії, три осі симетрії тощо, а також кососиметрії, характеристики аттрактора можливо прогнозувати. З іншого боку, для умови (3) локальний розмір d_{ij} підмножини мультифрактального аттрактора пропорційний модулю локальної сили (5):

$$d_{ij} \sim |\overrightarrow{F_{ij}}| \qquad (5)$$

Коли ж поле центральних сил (ПЦС) (2) чи (3) не є стаціонарним, тобто координати однієї чи кількох центральних сил отримують збурення δ_{ij} (6):

$$\delta_{ij} = f(t) \neq 0 \qquad (6)$$

– це призводить до деформування та розмиття аттрактора, локальні фрактальні утворення еволюціонують до контініуму при зростанні δ_{ij}, а фрактальна розмірність збільшується і прямує до відповідної евклідової розмірності простору. Однак, як буде показано в даній роботі, у випадку малих збурень фрактальні властивості аттрактора вдається зберегти. Більше того, деякі циклічні функції (коло, еліпс) дозволяють отримати навіть функціональні залежності фрактальної розмірності від параметрів збурення (7):

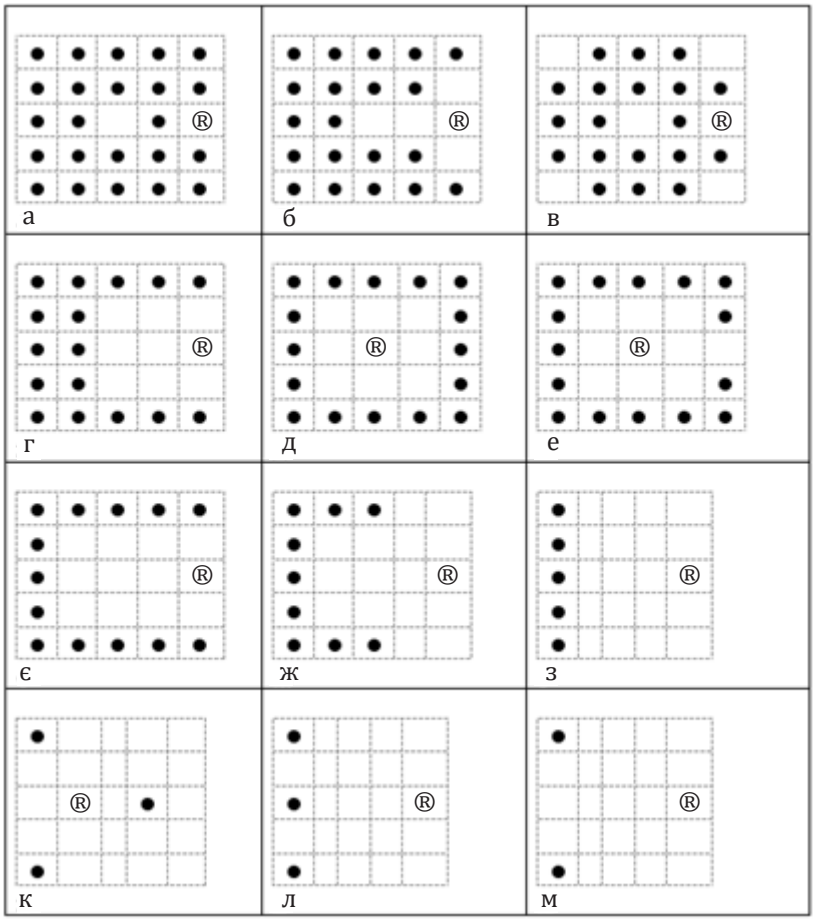
$$D(F_{ij}; \Omega; a; в; \omega) \qquad (7)$$

де: R – радіус функції збурення; ω – кругова частота вектора збурення.

Результати комп'ютерного моделювання

Для кількісної перевірки впливу збурення на зміни в поведінці аттрактора авторами проведені численні комп'ютерні експерименти. Зокрема, в таблиці 1 наведено план експерименту по впливу заповнення матриці 5x5 центральних сил на вид і структуру аттрактора при одній збуреній силі (позначена ®).

Таблиця 1. *План експерименту з дослідження впливу заповнення матриці 5x5 центральних сил і збурення ® на фрактальну структуру аттрактора*



На рис. 2 (а-м) наведені зображення аттракторів для систем центральних сил для широкого діапазону значень радіуса збурення R і кругової частоти ω при збуренні однієї із центральних сил. Значення радіуса збурення вказано біля кожного зображення аттрактора.

Нехай точка прикладення F_{ij} центральної сили рухається циклічно по колу радіуса R з круговою частотою ω. Тоді (8):

$$X_{ij}=X_0 + R^*\cos(\omega t)$$
$$Y_{ij}=Y_0 + R^*\sin(\omega t) \quad (8)$$

Як слідує з рис. 2 (а-м) (позначення літер – те ж, що й у таблиці 1), ступінь заповненості матриці центральних сил впливає на загальну структуру аттрактора, однак на підобласть збуреної сили (виділено червоним) впливає мало.

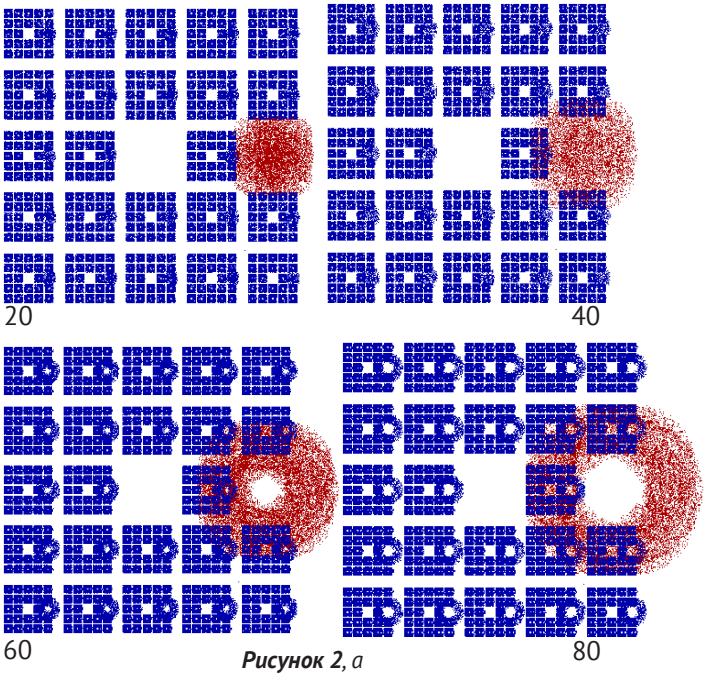
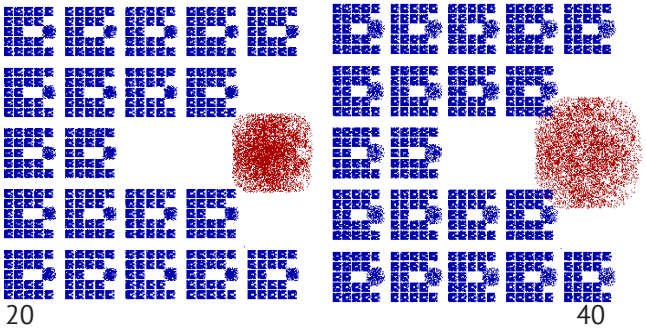


Рисунок 2, *а*



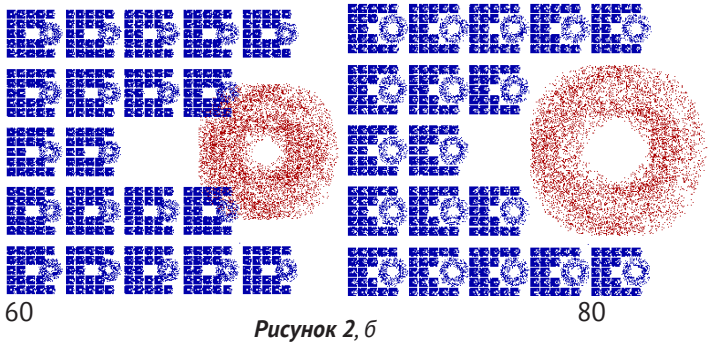
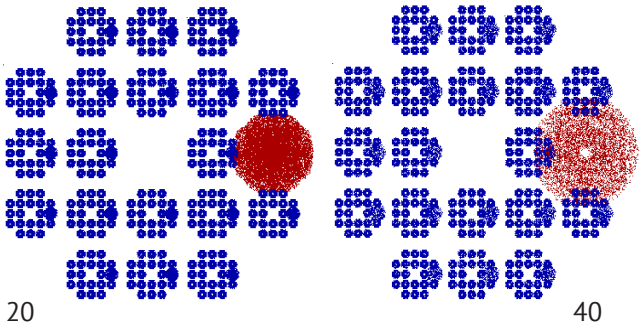


***Рисунок 2**, б*



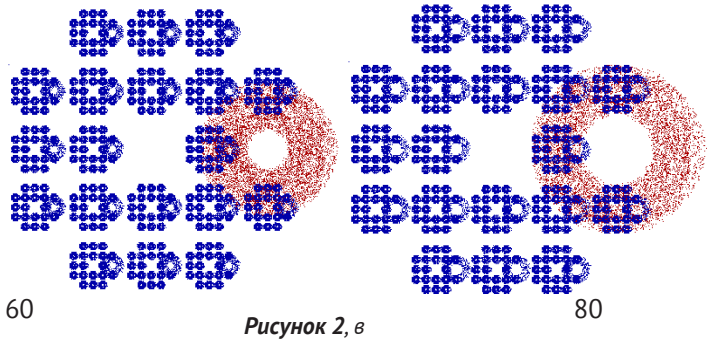
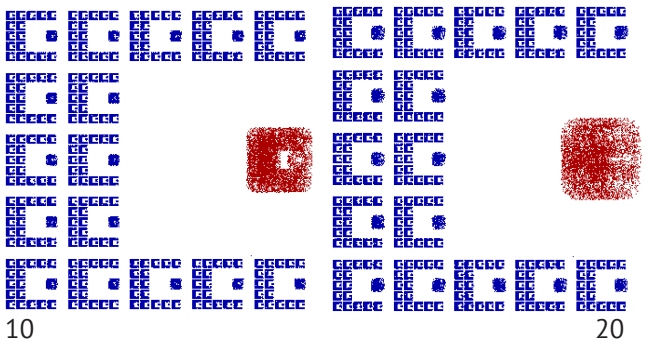


***Рисунок 2**, в*



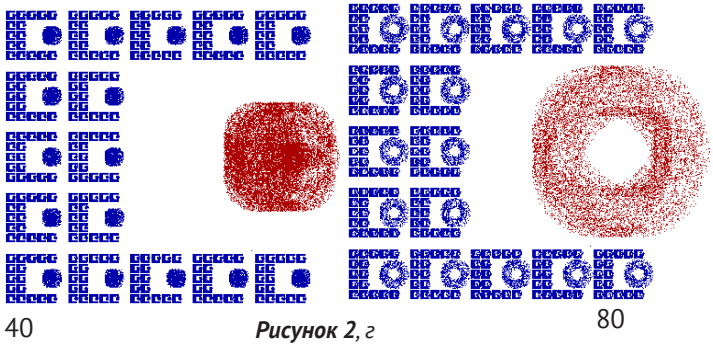
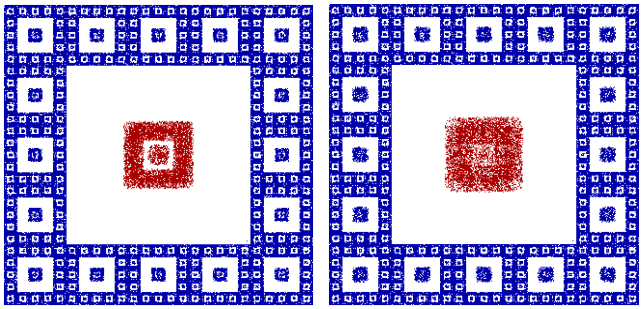


***Рисунок 2**, г*



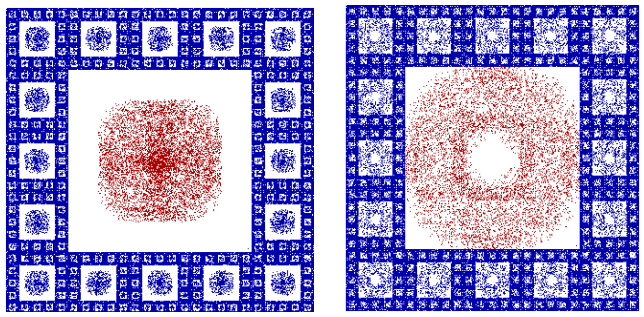


***Рисунок 2**, д*

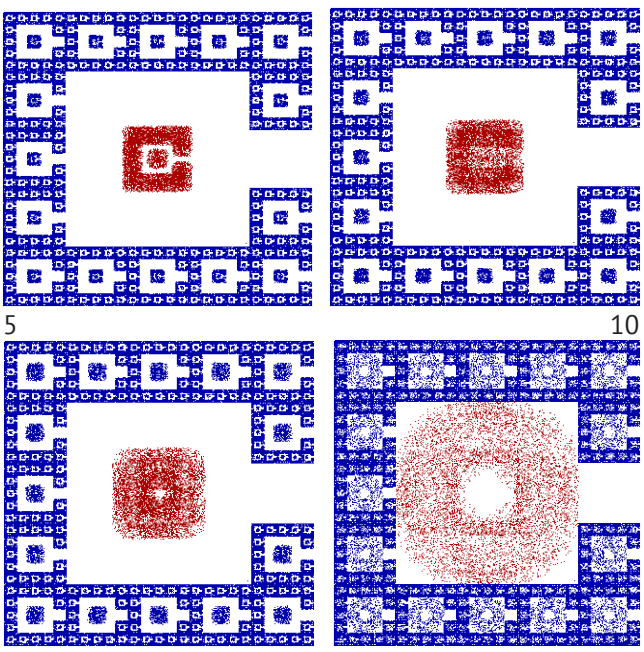


***Рисунок 2**, е*

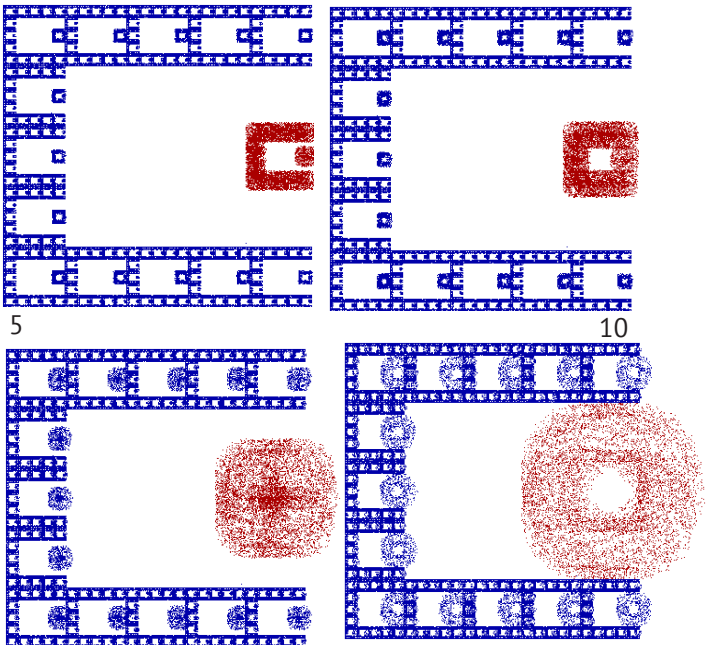


***Рисунок 2**, є*

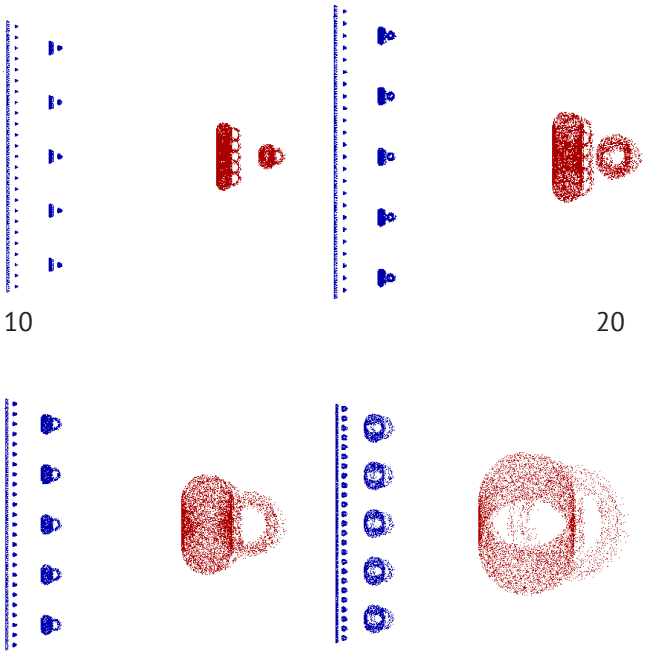


***Рисунок 2**, з*

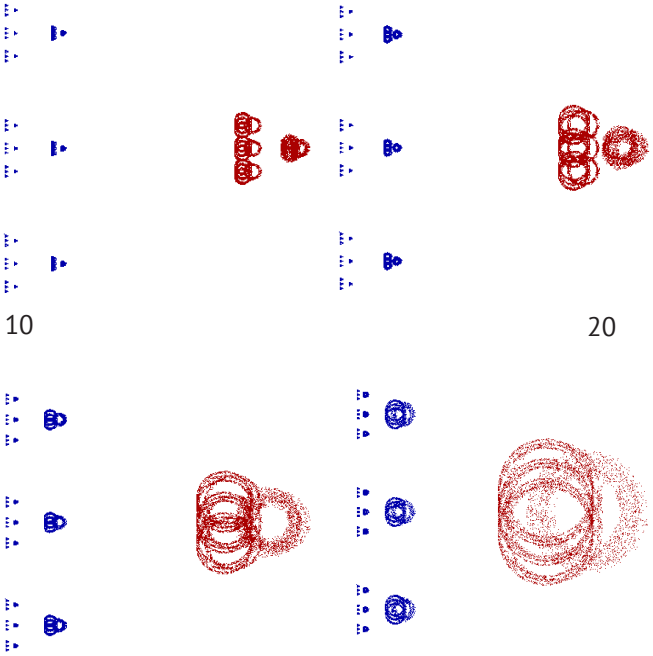


***Рисунок 2**, л*

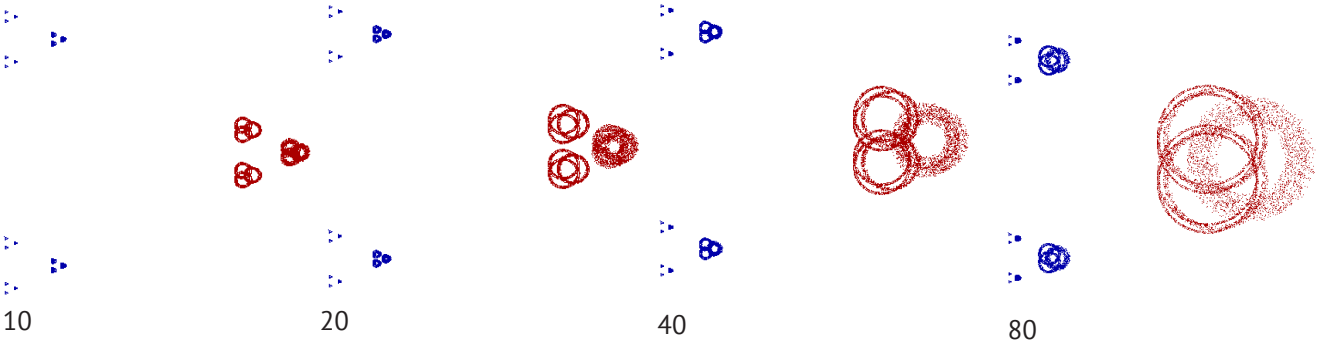


***Рисунок 2**, м*

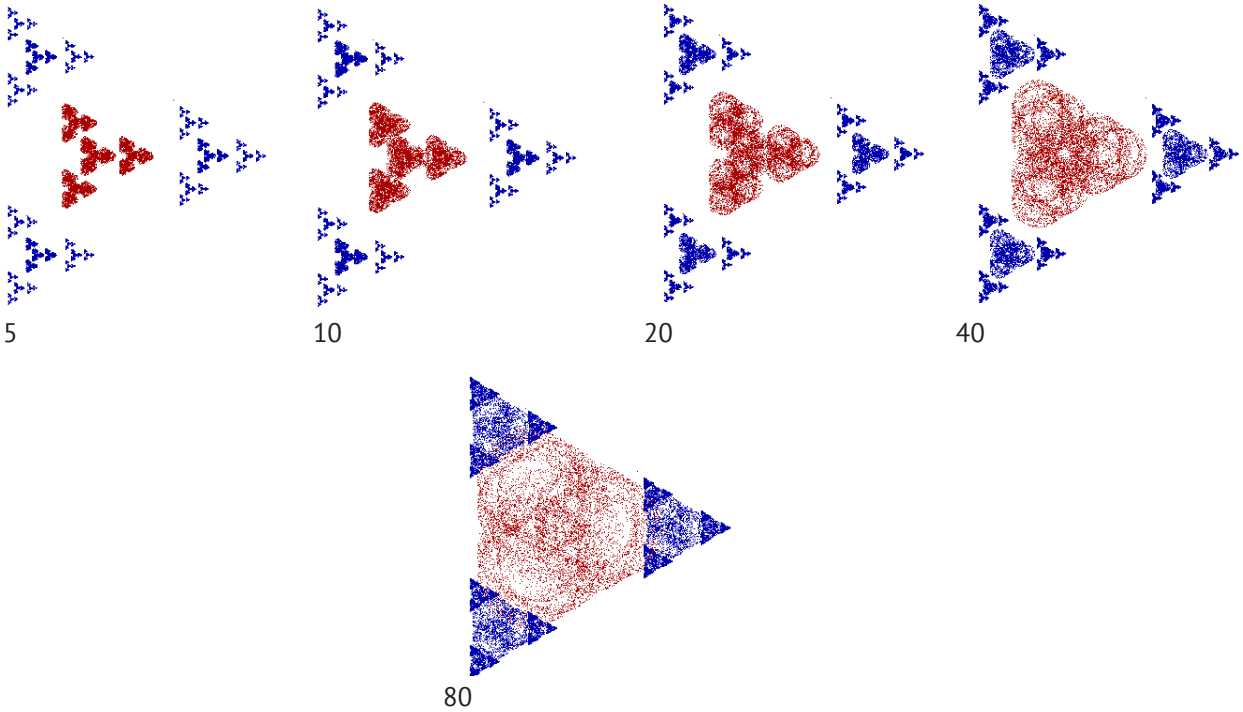


***Рисунок 2**, к*

***Рисунок 2**. Вплив заповнення матриці центральних сил на вид і форму аттракторів при різних значеннях параметра збурення R (вказано цифрами)*

Така тенденція прослідковується на кінетиці одинадцяти фрактальних аттракторів рис. 2, а-м. При цьому збурена центральна сила суттєво впливає на формування загальної структури аттрактора:

1) Аттрактор залишається фрактальним, самоподібним, масштабно інваріантним при будь-яких значеннях радіуса збурення R.

2) При збільшенні радіуса R бігармонійного збурення форма границі області збуреної сили $D_{зб}$ усе більше наближається до кола.

3) Еволюція границі $D_{зб}$ при збільшенні R добре описується рівнянням n – кола для випадків (а-ж) (9):

$$x^{2n} + y^{2n} = r^{2n} \quad (9)$$

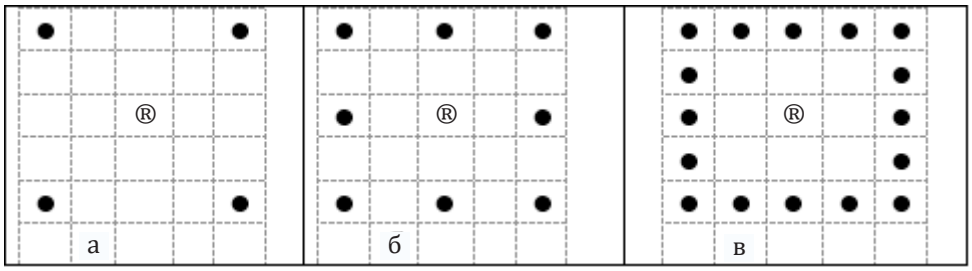
4) Для структур односторонньої дії ПЦС (з-м) еволюція аттрактора подібна еволюції трикутника до кола.

5) Найбільш характерно демонструється еволюція області збуреної сили $D_{зб}$ у випадках центрального розміщення збуреної сили з рівномірним симетричним розміщенням незбурених центральних сил по контуру (рис. 2, к)

6) Аттрактори, наведені на рис. 2, з, л, м еволюціонують з трикутної форми до відповідної кількості кілець, що чисельно відповідає кількості полюсів центральних сил, кожне з яких, відповідно до законів побудови фрактальних множин, ще багаторазово розщіплюється на таку ж кількість підмножин.

Для кількісного дослідження впливів параметрів збурення на параметри області аттрактора, що контролюється збуреною силою $D_{зб}$, проведено серію комп'ютерних експериментів за планом таблиці 2. Для всіх випадків даної серії дослідів аттрактор залишається фрактальним, а границя області $D_{зб}$ еволюціонує від квадрата при малих значеннях радіуса збурення R до кола при збільшенні R. Як буде показано далі (таблиці 4–6), така еволюція гарно описується моделлю 2n-кола (9).

Таблиця 2. *План експерименту з дослідження параметрів n-кола при зміні параметра збудження ® (Матриці 2x2, 3x3, 5x5)*



Визначення параметрів 2n-кола за результатами числового моделювання

На рис. 3 наведено графіки 2n-кола для значень n = 1, 2, 3, 4, 10. Як слідує з рис. 3, існує якісна схожість між еволюцією 2n-кола та еволюцією контурів області $D_{зб}$. При цьому максимальний радіус r_{max} 2n-кола відповідає діагоналі (45°) на рис. 3, а мінімальний радіус r_{min} – відповідно 0° чи 90°. Це дозволяє запропонувати інженерні формули для визначення головного параметра 2n-кола – показника n за результатами обмірювань аттрактора. Так, для 45° маємо (10):

$$x_* = r/2^{1/2n} \qquad (10)$$

Звідки (11):

$$n = \frac{1}{1 - \frac{ln(r^{max}/r^{min})^2}{ln2}} \qquad (11)$$

Або, замінивши в (11) відношення максимального до мінімального радіусів 2n-кола через ξ, отримаємо (12):

$$n = \frac{1}{1 - \frac{ln\xi^2}{ln2}} \qquad (12)$$

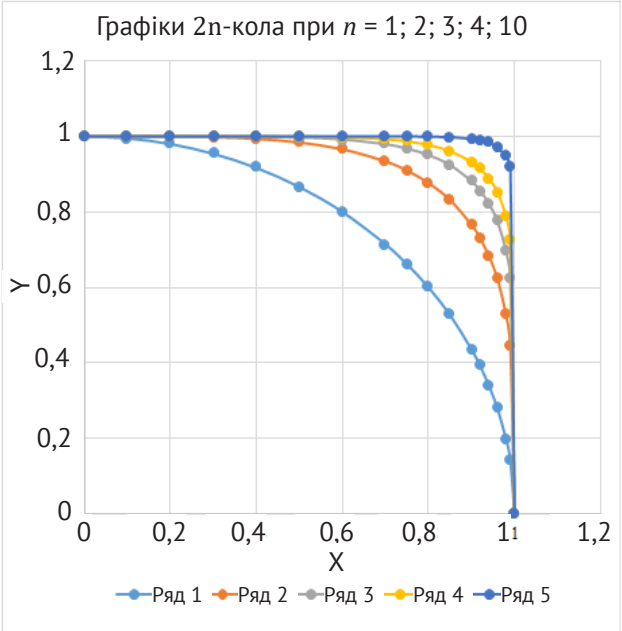


Рисунок 3. *Зображення 2n-кола за формулою (9) для n = 1; 2; 3; 4; 10*

У таблиці 3 наведено перевірка формули (12) для 2n-кола рис. 3 та оцінено похибку обчислення. Як видно з таблиці 3, при зростанні n похибка обчислень зростає.

Таблиця 3. *Перевірка формули (12) та її порівняння з теоретичними значеннями рис. 3*

$n_{теор}$	1	2	3	4	10
r_{min}, мм	171	171	171	171	171
r_{max}, мм	171	204	216	223	234
$n = \frac{1}{1 - \frac{ln(r^{max}/r^{min})^2}{ln2}}$	1	2,037	3,068	4,275	10,529
δ, %	0	1,8	2,2	6,8	5,3

У таблицях 4–6 наведено результати обробки експериментальних даних згідно плану експерименту таблиці 2, а на рис. 4–6 наведено графіки залежності параметра 2n-кола від відносного радіуса збурення.

Як випливає з рис. 4–6 ці залежності з високими значеннями коефіцієнта кореляції описуються степеневими моделями (13):

$$n(\mathrm{m};\frac{R}{B}) = \frac{C}{(\frac{2R}{B})^K} = C(\frac{B}{2R})^K \qquad (13)$$

Таблиця 4. *Вплив радіуса збурення R на значення параметра n для матриці 2x2*

R	10	20	30	40	50	60	70	80
$2R/B$	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
	m=1.15							
r_{min}	20,5	27	33	39	45	51	57	63
r_{max}	27	33	40	47	52	58	64	71
n	4,87	2,375	2,247	2,166	1,715	1,590	1,502	1,50
	m=1.25							
r_{min}	28	34	39	45	50	56	62	67
r_{max}	38	43	49	54	60	66	72	77
n	8,41	3,101	2,93	2,11	2,11	1,901	1,759	1,671
	m=1.35							
r_{min}	34	39	44	50	54	60	65	70
r_{max}	47	52	57	62	67	72	78	83
n	15,21	5,88	3,95	2,636	2,648	2,11	2,11	1,9721

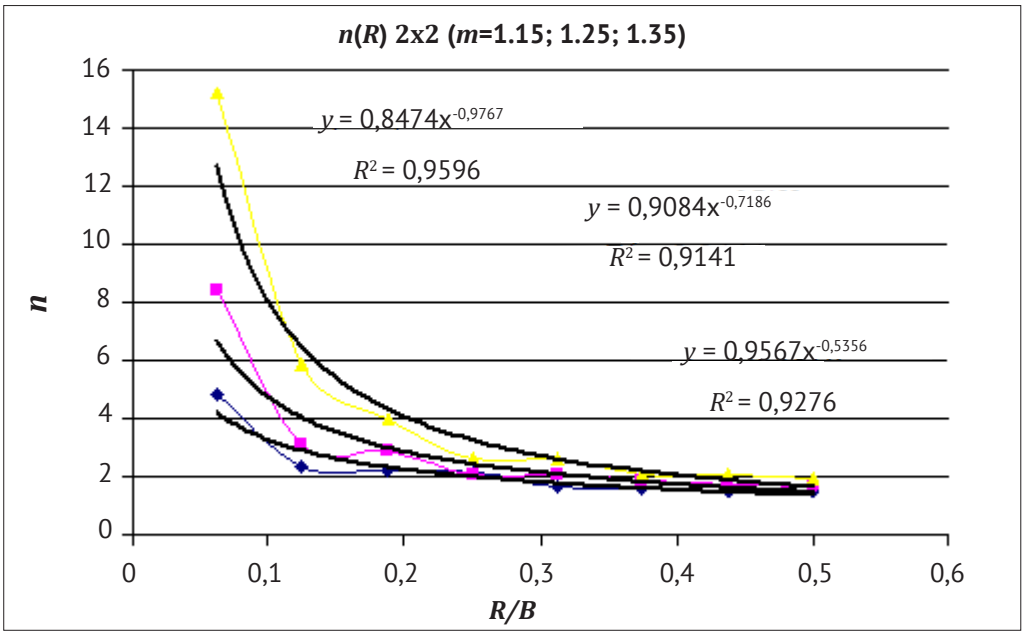


Рисунок 4. *Залежності n(2R/B; m) для матриці 2x2*

C=0,5465m+0,221; $r^2_{1/1}$ = 9,9955; $K(m)$ = 3,5006-2,205^m; $r^2_{1/1}$ =0,9904

$$n = \frac{0.5465m + 0.221}{(\frac{2R}{B})^{3.5006-2.205m}} \qquad (14)$$

***Таблиця 5**. Вплив радіуса збурення R на значення параметра n для матриці 3x3*

R	10	20	30	40	50	60	70	80
$2R/B$	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
	m=1.15							
r_{min}	20	27	33	39	45	51	57	63
r_{max}	28	33	40	45	52	58	64	70
n	34,3	2,38	2,25	1,703	1,715	1,590	1,502	1,436
	m=1.25							
r_{min}	28	33	39	45	50	56	61	66
r_{max}	38	43	48	54	60	66	71	76
n	8,41	4,23	2,49	2,11	2,11	1,901	1,779	1,686
	m=1.35							
r_{min}	34	38	43	49	53	58		
r_{max}	46	51	56	62	67	71		
n	7,83	6,62	4,20	3,11	3,09	2,401		

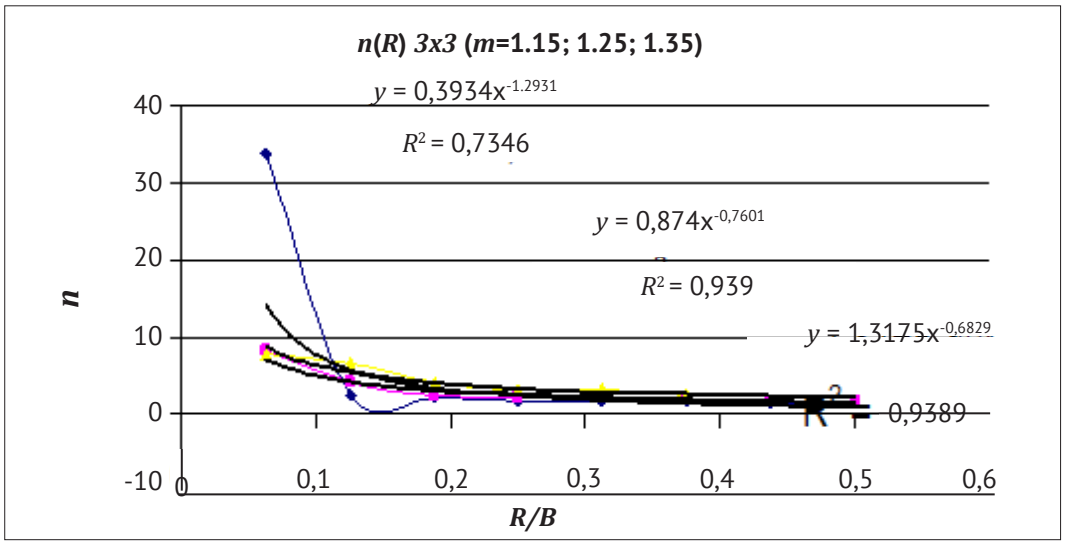


***Рисунок 5**. Залежності n(2R/B; m) для матриці 3x3*

C=4,6205 m-4,914 ; $r^2_{1/1}$=0,9995; $K(m)$ = 4,7258-3,051^m; $r^2_{1/1}$=0,8432

$$n = \frac{4{,}6205m - 4{,}914}{\left(\frac{2R}{B}\right)^{4{,}7258-3{,}051m}} \qquad (15)$$

***Таблиця 6**. Вплив радіуса збурення R на значення параметра n для матриці 5x5*

R	10	20	30	40	50	60	70	80
$2R/B$	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
	m=1.15							
r_{min}	21	27	33	39	45	51	57	63
r_{max}	27	33	39	45	52	58	63	70
n	3,64	2,38	1,93	1,703	1,715	1,590	1,406	1,43

	m=1.25							
r_{min}	28	33	39	44	50	55	61	66
r_{max}	37	42	49	54	60	65	71	76
n	5,11	3,29	2,93	2,44	2,11	1,93	1,79	1,69
	m=1.35							
r_{min}	34	38	43	49	53			
r_{max}	47	52	57	61	66			
n	15,21	10,53	5,35	2,72	2,72			

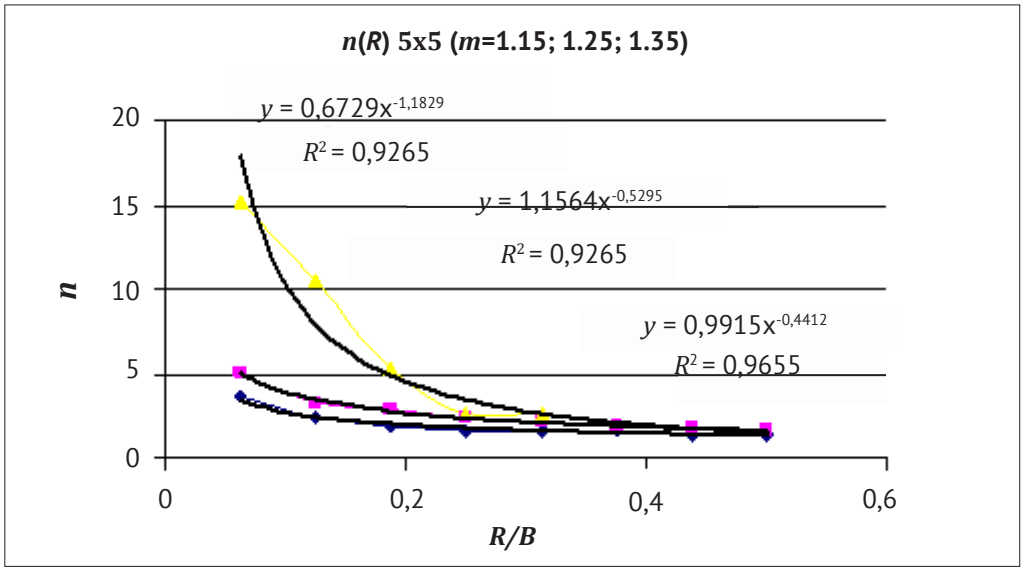


Рисунок 6. *Залежності n(2R/B; m) для матриці 5x5*

C=1,593 m-1,051; $r^2_{1/1}$=0,4201; $K(m)$ = 5,3535-3,7085^m; $r^2_{1/1}$ = 0,8379

$$n = \frac{1{,}593m - 1{,}051}{\left(\frac{2R}{B}\right)^{5{,}3535-3{,}7085m}} \qquad (16)$$

За результатами моделювання (таблиці 4–6 і рис. 4–6) відповідно для матриць 2x2, 3x3 і 5x5 отримані узагальнені залежності параметра 2n-кола (14)–(16) від радіуса збурення R і «гравітаційного» параметра m, що дозволяє прогнозувати параметри зміни області $D_{зб}$ у широких діапазонах параметрів збурення та «гравітації» поля центральних сил.

ВИСНОВКИ

1. На основі розроблених авторами алгоритмів моделювання аттракторів руху матеріальної точки в полі N центральних сил кількісно вивчено закономірності впливу збурень на вид і структуру аттракторів цього руху.

2. На прикладі поля центральних сил у вигляді матриці 5x5 виявлено вплив заповнення матриці на видозміни фрактальних характеристик аттракторів від параметрів збурень. При цьому встановлено, що всі аттрактори у всьому вивченому діапазоні збурень мають фрактальну природу і займають проміжне положення між моно- та мультифракталами.

3. Встановлено, що бігармонійне збурення однієї із центральних сил для матриць 2x2; 3x3; 5x5 із розміщенням збуреної сили в центрі матриці генерує підмножину аттрактора цієї сили $D_{зб}$, границя якої добре моделюється 2n-колом. При цьому встановлено, що при малих значеннях радіуса збурення R параметр $n\to\infty$, а при великих значеннях R параметр $n\to1$.

4. За результатами комп'ютерного моделювання п та побудовані кількісні моделі $n(2R/B; m)$ для матриць 2x2; 3x3; 5x5 та показано їх тісну

кореляцію в широкому діапазоні варіацій параметрів збурення та «гравітаційних» характеристик поля центральних сил.

5. Як показав числовий експеримент, для лінійного розміщення стаціонарних центральних сил та ортогонального розміщення збуреної сили аттрактор має трикутну будову зі збільшенням заповнення внутрішньої області при збільшенні радіуса збурення R.

6. Розміщення збуреної сили в центрі правильного трикутника стаціонарних центральних сил породжує фрактальний аттрактор трикутної форми з поступовим заповненням внутрішньої області при збільшенні параметра збурення R.

Подальші дослідження варто зосередити на розробці квадратурних і числових методів визначення фрактальної розмірності збурених фракталів, що займають проміжний стан між моно- та мультифракталами.

REFERENCES

[1] Mandelbrot, B. (2004). *Fractals, case and Finance (1959-1997)*. Izhevsk: R&C Dynamics.

[2] Mandelbrot, B. & Khadson, R.L. (2006). *The misbehavior of markets*. Kyiv: Vyliams.

[3] Mandelbrot, B. (2010). *Fractal geometry of nature*. Moscow, Izhevsk: NIC RHD.

[4] Feder, E. (2014). *Fractals*. Moscow: Lenand.

[5] Nykolaeva, E.V. (Ed.). (2017). *Fractals as an art*. Retrieved from https://strata.spb.ru/catalog/gumanitarnye-nauki/fraktaly-kak-iskusstvo-sbornik-statey.html

[6] Kronover, R.M. (2000). *Fractals and chaos in dynamical systems: Basic theory*. Moscow: Postmarket.

[7] Komohortsev, S.V., Yskhakov, R.S., & Felk, V.A. (2019). Influence of fractal dimension on the magnetization curve of an exchange-coupled cluster of magnetic nanoparticles. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 155(5), 886-893. doi: 10.1134/S0044451019050122.

[8] Barnsley, M.F., & Rising, H. (1993). *Fractals everywhere*. Boston: Academic Press.

[9] Slavinska, A.L., & Syrotenko, O.P. (2019). Application of the fractal structure in the ornaments of Ukrainian national embroidery. *Herald of Khmelnytskyi National University*, 5(277), 57-63. doi: 10.31891/2307-5732-2019-277-5-57-63.

[10] Ametov, A. (2017). *Fractal Visecca*. Retrieved from http://grafika.me/node/708.

[11] Nadryhailo, T.Zh., & Titarenko, O.S. (2009). Software tools for generating fractal sets. *Mathematical Modeling*, 2(21), 22-26.

[12] Potapov, A.A. (2004). Fractals and dynamic chaos in modern problems of remote sensing. In "*Remote sensing of the Earth and atmosphere using aerospace methods*": *Materials of the 2nd all-Russian scientific conference* (pp. 51-56). Saint Petersburg: RHHMU. Retrieved from https://clck.ru/SfxfN.

[13] Eskov, V.M., Zinchenko, Y.P., Filatov, M.A., & Eskov, V.V. (2016). Eskov-Zinchenko effect refutes the views of I.R. Prigogine, J.A. Wheeler and M. Gell-Mann about deterministic chaos of biological systems – complexity. *Journal of New Medical Technologies,* 23(2), 34-43. doi: 10.12737/20422.

[14] Eskov, V.M., Khadartsev, A.A., Filatova, O.E., & Filatov, M.A. (2015). Living systems (complexity) from the point of chaos and self-organization theory. *Journal of New Medical Technologies,* 22(3), 25-32. doi: 10.12737/13294.

[15] Eskov, V.M., Filatova, O.E., & Ilyashenko, L.K. (2017). Biophysics of living systems in mirror of chaos and self-organization theory. *Journal of New Medical Technologies*, 24(4), 20-26. doi: 10.12737/article_5a38f0267f9733.52971633.

[16] Bashkatov, Iu.V., Prokhorov, S.A., Alyev, N.Sh., & Ten, R.B. (2017). Evaluation of spectral parameters chaos of the cardiac-vascular system. *Complexity. Mind. Postnonclassic*, 4, 43-50. doi: 10.12737/article_5a1c022bd3df56.20636712.

[17] Hrabar, I.H., & Hrabar, O.I. (2020). Modeling of the limit states in the dynamic systems of living and lifeless nature. *Scientific Horizons,* 03(88), 59-73. doi: 10.33249/2663-2144-2020-88-3-59-73.

[18] Hrabar, I.H., Hrabar, O.I., Hutnichenko, O.A., & Kubrak, Yu.O. (2007). *Percolation-fractal materials: Properties, technologies, application*. Zhytomyr: ZhDTU.

[19] Hrabar, I.H., & Hrabar, O.I. (2020). *Modeling the impact of the time of preparation of innovation "from idea to market" on economic growth and international research and innovation cooperation*. Kyiv: NTUU "KPI". Retrieved from https://clck.ru/SfxpK

[20] Grabar, I.G., Grabar, O.I., Kubrak, Yu.O., & Marchuk, M.M. (2018). Chaos and a quantitative modeling of the kinetics of phase transitions on the final measure areas. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, 2, 215-226.

[21] Vasylenko, S.L. (2009). *Fractal polygons and "golden" section*. Retrieved from https://docplayer.ru/47747992-Fraktalnye-mnogougolniki-i-zolotoe-sechenie.html.

[22] Chupikova, S.A. (2013). *Fractal analysis of the Verkhniy Yenisei river basin*. Retrieved from https://pandia.ru/text/77/336/64686.php.

[23] Grabar, I.G., & Grabar, O.I. (2020). *Fractal ornaments*. Zhytomyr: Polissia National University.