# УЗАГАЛЬНЕНО-ОБЕРНЕНИЙ ОПЕРАТОР ДО ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

*Журавльов В. П., к.ф.-м.н.*

Нехай $z(t)$ вектор-функція, яка діє є відрізка $I = [a,b]$ у дійсній банахів простір $\mathbf{B}_1$, $z(t) \in \mathbf{C}(I,\mathbf{B}_1) := \{z(\cdot) \to \mathbf{B}_1, |||z||| = \sup\|z(t)\|_{\mathbf{B}1}\}$, $\mathbf{C}(I,\mathbf{B}_1)$ – банахів простір неперервних на $I$ вектор-функцій.

Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ інтегральний оператор Фредгольма з виродженим ядром:

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds, \tag{1}$$

де оператор-функції M(t) та N(t) діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у себе, сильно неперервні з нормами $|||M||| = \sup\limits_{t\in I}\|M(t)\|_{\mathrm{B}_1} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup\limits_{t\in I}\|N(t)\|_{\mathrm{B}_1} = N_0 < \infty$.

Відомо, що добуток $M(t)x$ сильно неперервної оператор-функції $M(t)$ на елемент $x \in B_1$ є неперервною вектор-функцію. Тому оператор $L$ діє з банахового простру $\mathbf{C}(I,\mathbf{B}_1)$ у себе.

Позначимо:

$$D = I_{\mathrm{B}_1} - A, \ A = \int_a^b N(s)M(s)ds. \tag{2}$$

Лінійний оператор $D$ – діє з банахового простору $B_1$ у себе і є обмеженим.

Нехай оператор $D$ – узагальнено оборотний. Тоді існують обмежені проектори $P_{N(D)} : \mathbf{B}_1 \to N(D)$ $\|P_{N(D)}\|_{\mathrm{B}_1} = p < \infty$, $P_{Y_D} : \mathbf{B}_1 \to Y_D$, $\|P_{Y_D}\|_{\mathrm{B}_1} = p_1 < \infty$ та обмежений узагальнено-обернений оператор $D^-$ [1].

**Теорема.** *Нехай* $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ – *обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді оператори*

$$(P_{N(L)}z)(t) = M(t)P_{N(D)}\int_b^a N(s)z(s)ds,$$

$$(P_{Y_D}f)(t) = M(t)\,P_{Y_D}\int_a^b N(s)z(s)ds \tag{3}$$

*є обмеженими проекторами на нуль-простір $N(L)$ та підпростір $Y_L$ інтегрального оператора $L$, відповідно.*

Оскільки $A = I_{\mathrm{B}_1} - D$, $DP_{N(D)} = 0$, то проектор $(P_{N(L)}z)(t) = M(t)P_{N(D)}\int_b^a N(s)z(s)ds$ є проектором на нуль-простір $N(L)$ оператора $L$, тобто $LP_{N(L)} = 0$.

Дійсно, $(LP_{N(L)}z)(t) =$

$$M(t)P_{N(D)}\int_a^b N(s)\{z(s)ds - M(t)\int_a^b N(\tau)d\tau\}ds = M(t)P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds -$$

$$-M(t)AP_{N(D)}\int_a^b N(s)ds = M(t)P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)\left[I_{\mathrm{B}_1} - D\right]P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds = 0. \tag{4}$$

Оскільки оператори $P_{N(L)}$ та $P_{Y_L}$ обмежені, то інтегральний оператор – узагальнено оборотний. Наступна теорема дає конструкцію узагальнено-оберненого оператора $L^-$ до інтегрального оператора.

**Теорема.** *Нехай* $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ – *узагальнений оборотний оператор L.*

*Тоді оператор*

$$\left(L^{-} f\right)(t) = f(t) + M(t) D^{-} \int_a^b N(s) f(s) ds \qquad (5)$$

*є обмеженим узагальнено-оберненим оператором до інтегрального оператора L.*

Для доведення теореми необхідно і достатньо перевірити співвідношення $LL^{-}L = L$, в якому задовольняє узагальнено-обернений оператор [2].

Обмеженість оператора $L^{-}$ витікає з обмеженості оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та оператора $D^{-}$.

### *Використані джерела інформації*


1. Журавльов В.Ф. Решение нормально разрешимых операторных уравнений в банаховых пространствах с базисом // Доклады академии наук. РАН. – 1997. – т. 352, № 3. – С. 304-306.

2. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.