

ОЦЕНКИ ДЛЯ ВРЕМЕНИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ивахненко В. В., к.ф.-м.н.

Проблема разработки методов и средств предотвращения возможной негативной перестройки экологии Черного моря, как и других внутриматериковых водоемов и отдельных районов Мирового океана, содержащих растворенный в воде сероводород (H_2S), связана с оценкой и прогнозом пространственно-временной изменчивости растворенных концентраций кислорода и сероводорода, обусловленных изменением природных и антропогенных факторов.

Так как с течением времени сероводород окисляется и происходит полное восстановление аэробной зоны, весьма актуальной экологической проблемой является определение времени полного окисления H_2S .

Рассмотрим задачу (очистки) со свободной границей, моделирующую восстановление жизнедеятельности сероводородсодержащего слоя [1].

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_t &= f(u), & 0 < x < s(t), & \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq s(0), & \\ u_x(0,t) - hu(0,t) &= -h\varphi(t), & \varphi'(t) \geq 0, & \quad t > 0, \\ u(s(t),t) &= u_x(s(t),t) = 0, & t > 0, & \end{aligned} \quad (1),$$

где $u = u(x,t)$ – концентрация H_2S ; x – координата, отсчитываемая от середины загрязненного участка, $|x| < s(0)$; $2s(0)$ – начальная ширина загрязнения; t – время; $f(u)$ – функция, моделирующая стоки H_2S ; $\varphi(t)$ – концентрация H_2S на поверхности сероводородсодержащего слоя; $h = const$.

Рассмотрим вариационную постановку задачи (1) с $f(u) = u^\beta$, $0 \leq \beta < 1$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + h^2 u^2(0,t) + \|u_x\|^2 + (u^\beta, u) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad (2),$$

где $\|u\|^2 = \int_0^{s(t)} u^2(x,t) dx$, которая позволяет получить неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + (u^\beta, u) \leq 0. \quad (3)$$

С помощью интегрального неравенства Иенсена для вогнутой функции $F(g)$:

$$F\left(\int_0^s \theta(x)g(x)dx\right) \geq \int_0^s \theta(x)F(g(x))dx, \quad (4)$$

при условии $\theta(x,t) = u^p(x,t) / \int_0^{s(t)} u^p(x,t)dx$, $p = 1 + \beta$; $\int_0^{s(t)} \theta^2(x,t)dx \leq 1$, из (3) получаем дифференциальное неравенство для квадрата нормы

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + (\|u\|^2)^{\frac{p}{2}} \leq 0, \quad p = 1 + \beta, \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (5)$$

Разрешив последнее, получаем:

$$t \leq \frac{1}{2} \frac{\|u_0(x)\|^2}{\|u\|^2} \int_0^{\|u\|^2} y^{-p/2} dy, \quad p = 1 + \beta. \quad (6)$$

При $u(x,t) = 0$ из (6) следует оценка сверху для времени стабилизации решения задачи (1), содержащая квадрат нормы начального распределения

$$t \leq T, \quad T = \frac{1}{2} \frac{\|u_0(x)\|^2}{\int_0^{\|u_0(x)\|^2} y^{-p/2} dy} = \frac{1}{1-\beta} (\|u_0(x)\|^2)^{\frac{1-\beta}{2}}. \quad (7)$$

В дополнение к оценке (7) получена еще одна оценка для времени T через носитель начального распределения S_0

$$t \leq T, \quad T = \int_0^{v_0} \frac{dy}{f(y)}, \quad v_0 = \int_0^{s_0} u_0(x) dx. \quad (8)$$

В случае $S(0) = S_0 = \sqrt{2}$, $u_0(x) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$ согласно численным расчетам $T \approx 0,35$,

время полного очищения, рассчитанное по формуле (8), $T \approx 0,48$, по формуле (7) $T \approx 0,54$, а по формуле А.С. Калашникова [2] $T = \frac{1}{1-\beta} \max |u_0(x)|^{1-\beta}$, $T \approx 1$. Так как

численный эксперимент наиболее точен, то из этого ряда вытекает точность предлагаемых оценок времени очищения.

Эти оценки хорошо согласуются с численными расчетами и дают возможность рассчитывать время восстановления жизнедеятельности сероводородсодержащего слоя, позволяя тем самым вырабатывать рекомендации воздействия человека на экосистему Чёрного моря с целью предотвращения её негативной перестройки.

Використані джерела інформації

1. Ивахненко В.В. Приближённые решения одномерной задачи диффузии с реакцией // Вестник ХГТУ. – 2003. – № 3 (19). – С. 147–151.
2. Калашников А.С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // Журн. вычисл. математика и мат. физика. – 1974. – 14, № 4. С. 891–905.