

УДК 681.5:620.1

І.Г. Грабар
д.т.н., професор
О.І. Грабар
к.т.н.
С.А. Левик
аспірант

Житомирський національний агроекологічний університет
Рецензент – член редколегії «Вісник ЖНАЕУ» д.т.н. Лось Л.В.

МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГРАНУЛ І ПІЛЕТІВ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ПЕРКОЛЯЦІЙНО-ФРАКТАЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Запропонована методологія розрахунку фізико-механічних властивостей, пористості, газо- та гідропроникності гранул, пілет та брикетів, отриманих методами пресування із подрібнених органічних відходів, на основі уявлень і моделей сучасної теорії перколяції та фракталів.

Актуальність

Необхідність пошуку альтернативних джерел енергії стимулювала розвиток технологій пресування пілет і брикетів із органічних відходів деревини, льону, злаків, а також спеціальних енергетичних рослин – міскантусу, верби енергетичної тощо [1]. В кожному з вказаних випадків виникає необхідність визначення таких технологічних параметрів, що забезпечують необхідні параметри брикетів і пілет (питому вагу, міцність, пористість тощо) [2–3]. Оскільки пілети і брикети формуються з попередньо приготовлених органічних мікрочастинок, між якими в результаті пресування залишається певна кількість мікропустот (пор) та в'язучих речовин (смола, клеїв як природного, так і штучного походження), нам здалося доцільним застосувати до моделювання фізико-механічних властивостей даних виробів підходи механіки перколяційних і фрактальних систем [4].

Допущення моделі

1. На макрорівні перколяційно-фрактальне середовище представляємо пружним квазіізотропним контініумом, що описується законом Гука.
2. Локальні об'єми органічних мікрочастинок будемо вважати пружними тілами Серпинського класу [111] різного рівня фрактальності.
3. Усереднене значення рівня фрактальності визначаємо з умови усередненої пористості та усереднених пружних характеристик.
4. На межі сусідніх локальних об'ємів має місце ідеальне з'єднання та відсутня концентрація напруг і деформацій.

Теоретико-ймовірнісне моделювання механічних властивостей деформованих перколяційних середовищ

Альтернативою та доповненням комп'ютерного моделювання є розвиток теоретико-ймовірносних моделей. Розглянемо задачу про характеристики міцності та пружні плоскої перколяційної системи $n \times m$ з декартовим розбиттям [4]. Розіб'ємо область на смужки, що перпендикулярні лінії дії осьової сили. Будемо вважати, що всю область можна замінити суперпозицією послідовно з'єднаних смужок і скористаємось відповідними співвідношеннями для послідовного з'єднання; взаємодія між сусідніми смужками відбувається тільки між заповненими об'ємами, що мають спільну неточкову межу; жорсткості всіх заповнених клітинок – C_{ij} , а ймовірність їх заповнення – P_{ij} .

Тоді знаходження еквівалентної жорсткості двох взаємодіючих смужок зі спільною межею, з урахуванням ймовірностей заповнення і допущенням про паралельне з'єднання елементів в одній смужці, зводиться до:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b},$$

де

$$C_a = \prod_{i=1}^n C_{ij} * P_{ij} * P_{i,(j+1)};$$

$$C_b = \prod_{i=1}^n C_{i,j+1} * P_{ij} * P_{i,(j+1)}.$$

Тоді еквівалентна жорсткість всієї області:

$$\frac{1}{C_\Sigma} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\prod_{i=1}^n C_{ij} P_{ij} P_{i,j+1}}.$$

Це дозволяє отримати деякі важливі інженерні формули для оцінки характеристик міцності та пружності деформованих перколяційних систем:

$$\sigma_\Sigma = \sigma_o \cdot p^2,$$

де E_o, s_o – модуль пружності та гранична міцність локальної області (суцільного середовища органічної речовини без пор);

p – ймовірність заповнення перколяційної системи.

Коли $p \rightarrow 1$, тобто перколяційне середовище переходить в суцільне, маємо:

$$\sigma_{\Sigma} \Rightarrow \sigma_o .$$

При цьому для кінцевомірних моделей ймовірність існування з'єднуючого кластера можна вирахувати за співвідношенням [4]:

$$W(P) = [1 + \exp(n \cdot (P^* - P))]^{-1} ,$$

де P^* – критична перколяція.

Нами вперше запропоновано методику розрахунку механічних характеристик об'ємної кінцевомірної перколяційної системи як для $P > P^*$, так і для $P < P^*$.

Нехай дано тримірний перколяційний масив кінцевих розмірів $n \times n \times n$ із ймовірністю наповнення P . Розбиваємо масив на n пластин. Для тих пластин, що містять з'єднуючий кластер, маємо:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_o \cdot p^2 ,$$

а кількість таких пластин дорівнює:

$$n_1 = W \cdot n = \frac{n}{1 + e^{n(P^* - P)}} .$$

Тоді для перколяційного масиву $n \times n \times n$ міцність на розтяг–стиск може бути оцінена за співвідношенням:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_o \frac{p^2}{1 + e^{n(P^* - P)}} . \quad (1)$$

Співвідношення (1) дозволяє оцінювати характеристики граничної міцності дво- та тривимірних перколяційних систем пресованих пілет, брикетів, гранул, а також може бути корисним для розрахунку збурених матеріалів, надлегких конструкцій з природніх чи штучних пористих матеріалів, великих інженерних споруд з послідовно-паралельним з'єднанням кінцевої кількості елементів і відомою функцією ймовірності деградації характеристик пружності чи міцності елементів, до яких можна застосувати допущення даної моделі.

Перейдемо до більш зручної характеристики – пористості. Тоді $\theta + P = 1$. І співвідношення (1) перетвориться до такого вигляду:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_o \frac{(1 - \theta)^2}{1 + e^{n(P^* + \theta - 1)}} , \quad (2)$$

де $n = D/d$, і, відповідно, D – характерний розмір гранули (пілети), d – характерний розмір мікрочастинки.

На рисунку1 наведено графіки $\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_o}$ від пористості для $n = 5$, $n = 20$ та $n = 100$.

Залежності залишкової міцності пористих гранул від параметра пористості при $n = 5$ (ряд 1), $n = 20$ (ряд 2) та $n = 100$ (ряд 3)

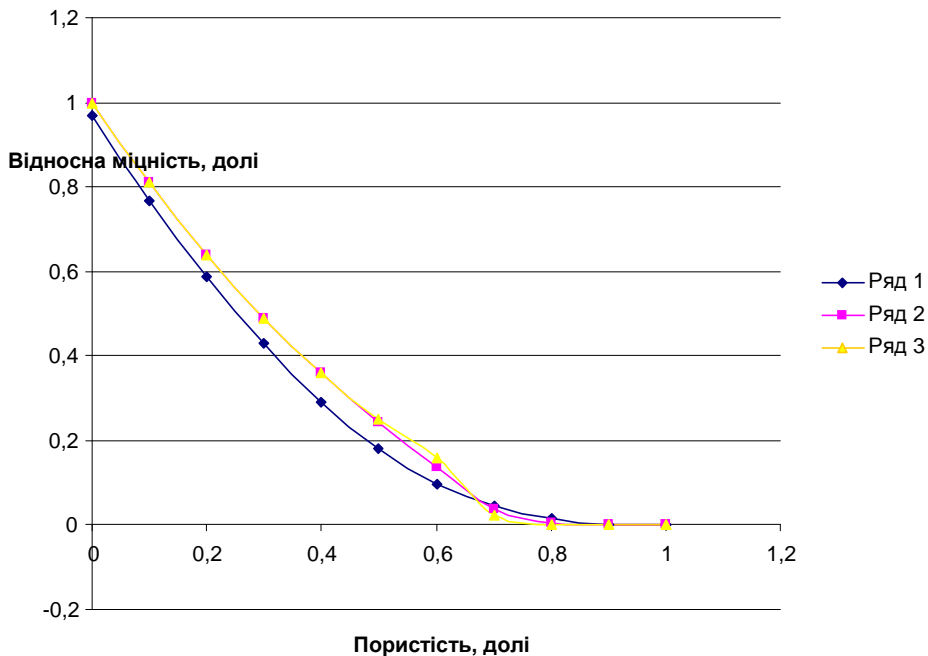


Рис. 1. Моделювання газо- та гідропроникності ПФС

В задачах спалювання пілетів і брикет велике значення має ймовірнісна оцінка газо- та гідропроникності перколяційної системи. Для оцінки параметрів проникності скористаємося електричною аналогією, що побудована для перколяційно-фрактальних середовищ [4].

Нами [4] показано, що значний прорив як з теоретичної, так і з практичної точок зору може бути досягнуто, якщо розглядати проникність в двох- або багатоконпонентних перколяційних системах, за умовами, що одна з них обов'язково повинна бути газо-, гідро- чи електропровідною, залежно від задачі. У перших двох випадках такою компонентою будемо вважати пустоти, об'єднані в кластер, в третьому – мікрочастинки електропровідника. Тоді наведений опір газо-, гідро- чи електропровідності \bar{R} можна визначити для недеформованої перколяційної системи так:

$$\bar{R} = \frac{\frac{\kappa_1 - P^* \frac{\nu}{\kappa_2}}{\kappa_1 - P^* \frac{\nu}{\kappa_2}}}{\frac{\kappa_1 - P^* \frac{\nu}{\kappa_2}}{\kappa_1 - P^* \frac{\nu}{\kappa_2}}}$$

При деформуванні перколяційної системи настає зміна (перенормування) ефективного значення концентрації P провідникової компоненти (збільшення площі при деформації підкладки за $P = \text{const}$ призведе до зменшення провідникової та збільшення діелектричної концентрації).

Тоді при деформації перколяційної системи в наближенні квазінезасмодіючих мікрочастинок залежність наведеного газо-, гідро- чи електро- опору від концентрації провідникової компоненти та величини деформації матиме вигляд:

$$\frac{R_e}{R_0} = \frac{\frac{\kappa_1 - P^* \frac{\nu}{\kappa_2}}{\kappa_1 - P^* \frac{\nu}{\kappa_2}}}{\frac{\kappa_1 - P^* \frac{\nu}{\kappa_2}}{\kappa_1 - P^* \frac{\nu}{\kappa_2}}},$$

де \bar{R}_{0e} та \bar{R}_e – наведений опір перколяційної системи в недеформованому та деформованому станах відповідно; ε – деформація; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу; ν – критичний індекс перколяційної системи (для двомірної перколяції $\nu \sim 0,5$).

Визначення критичної концентрації P^*

В більшості випадків дослідження явища перколяції в теоретичних моделях будується для нескінченномірних просторів. Це дозволяє суттєво спростити розв'язок, оскільки область розв'язків розбивається на 2 підобласті:

I – $P < P^*$ – з'єднуючі кластери не існують;

II – $P > P^*$ – з'єднуючі кластери існують завжди.

Нами розроблено алгоритми та проведено значне за обсягами комп'ютерне моделювання для важливих, з практичної точки зору, випадків кінцевомірних моделей для широкого діапазону значень $n = D/d$. На рисунку 2 наведено результати цього моделювання для просторів R^2 та R^3 і показано, що для невеликих значень $n \in (25...50)$ ймовірність фазового переходу на межі критичної перколяції суттєво розмивається й існування з'єднуючого кластера можливе за $P \in (0,5...0,7)$ (рис. 2). При цьому ймовірність існування такого кластера добре описується запропонованим нами співвідношенням:

$$W(P) = [1 + \exp(n \cdot (P^* + \theta - 1))]^{-1},$$

що за своєю математичною структурою близьке до відомого розподілу Фермі–Дірака. У випадку, коли форма гранули чи пілети має кілька характерних

розмірів $L_1; L_2; L_2$ (наприклад, для гранули, що має діаметр D та довжину L , $k = L/D = 2 \dots 5$) ймовірність з'єднуючого кластера така:

$$W(P) = W_1 * W_2 * W_3 \dots = [1 + \exp(n \cdot (P^* + \theta - 1))]^{-k}.$$

Значення P^* як для $L \times L$, так для $L \times L \times L$ набуває відповідно значень 0,5927 та 0,3118, що вказуються в літературі.

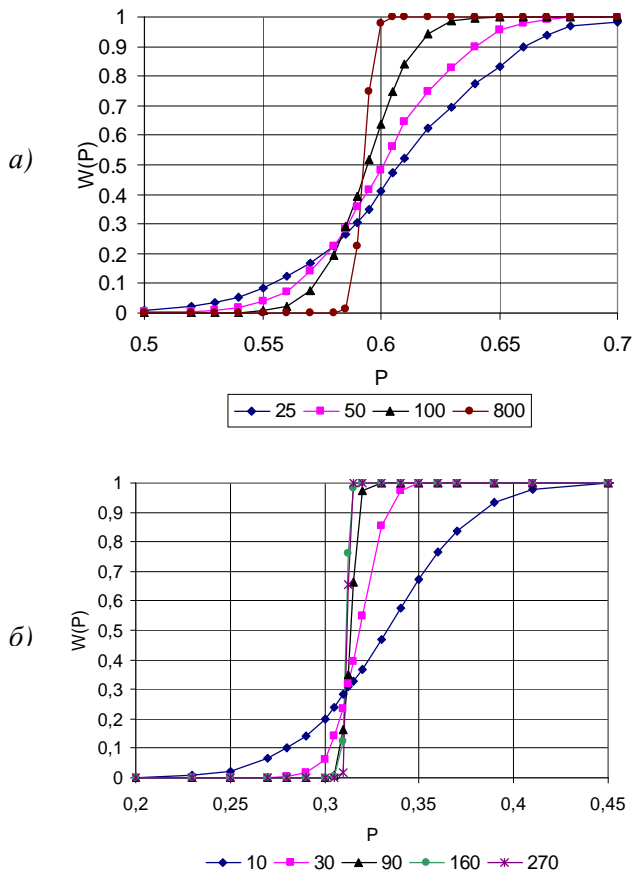


Рис. 2. Залежність ймовірності існування з'єднуючого кластера від ймовірності заповнення середовища для плоских $L \times L$ (а), та об'ємних $L \times L \times L$ (б) моделей

Класифікація тіл Серпинського для моделювання властивостей пресованих гранул

При моделюванні властивостей пресованих гранул спробуємо скористатись уявленнями структур з дробною (нецілою) метрикою. Це дає можливість описати багато властивостей цих гранул. Фракталом будемо називати структуру з дробовою розмірністю простору $D(m_1 < D < m_2)$ такою, що об'єм даної структури в просторі $R^{m_2} : V_{R^{m_2}} \Rightarrow 0$, де R^{m_1} та R^{m_2} – метричні простори з цілою розмірністю. Тоді для квазіфрактала $(m_1 < D < m_2) V_{R^{m_2}} \Rightarrow C$, де C – деяка константа.

Найчастіше з ідеальних фрактальних структур використовується множина Кантора та його дво- (килим Серпинського) та тривимірна модифікація [4].

Для всіх фракталів (рис. 3), якщо характерний розмір початкової (заправочної) множини дорівнює L (нульовий рівень фрактальності), то на першому рівні фрактальності тіло, що відкидається, має такий характерний розмір:

$$L_* \leq \frac{L}{3}. \tag{3}$$

Коли в (3) виконується рівняння, то маємо фрактал, коли нерівність – квазіфрактал. Нехай найбільша з пустот у фракталі має розмір L_{\max} , найменша – L_{\min} і при цьому виконується умова самоподібності $L_{i+1} = G \cdot L_i$, то

$$L_{\min} = G^{j-1} \cdot L_{\max},$$

звідки рівень фрактальності можна знайти зі співвідношення

$$j = 1 + \frac{\ln \frac{L_{\min}}{L_{\max}}}{\ln G}.$$

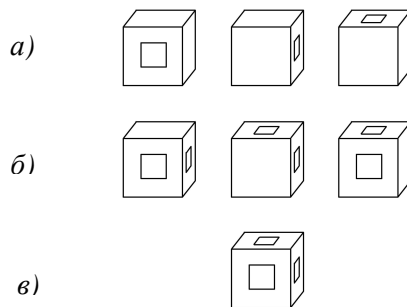


Рис. 3. Класи тіл Серпинського: а) [100] [010] [001]; б) [110] [011] [101]; в) [111]

Для фракталів (рис. 3) у загальному вигляді отримано залежності площі поверхні, пружної деформації та модуля пружності еквівалентного тіла Серпинського, як функції рівня фрактальності j :

$$\frac{S_j}{S_0} = (\mathbf{V}_{jlk})^j;$$

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_0} = (\mathbf{V}_{xyz})^j;$$

$$\frac{E_j}{E_0} = (\mathbf{G}_{lnk})^j.$$

Для тіл Серпинського (рис. 3) побудована матриця масштабних констант:

$$\begin{bmatrix} V_{100} & V_{011} & V_{111} \\ V_{010} & V_{101} & V_{111} \\ V_{001} & V_{110} & V_{111} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{6}{7} & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{9} & \frac{12}{17} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Для всіх випадків, як і у випадку R^2 , побудовано залежності модуля пружності пористості (включень). Дані залежності також мають вигляд, що характерний для критичних явищ:

$$\frac{E}{E_0} = (1 - q_v)^{n_{lnk}}.$$

Висновки

1. Запропоновано модель та отримано інженерні залежності для оцінки характеристик міцності пресованих гранул та пілетів в ймовірнісній постановці.
2. Отримано числові оцінки залежності міцності пресованих пілетів та гранул від пористості для широкого діапазону співвідношень макророзмірів до розмірів мікрочастинок. Проведено комп'ютерне моделювання та отримано залежності існування з'єднуючих кластерів перколяційних систем кінцевих розмірів.
3. Запропоновано залежності оцінки пружних властивостей пресованих пористих тіл в наближенні тіл Серпинського класу [111] різного рівня фрактальності.

Література

-
1. Лось Л.В. Перспективи енергетичного використання соломи для сільського господарства України / Л.В. Лось, В.В. Іванцов, Р.Ц. Новіцький // Вісник ДАЕУ. – 2008. – № 1. – С. 199–204.
 2. Семенова Т.В. Мезомеханический анализ гранулированных материалов при контактном нагружении (обзор) / Т.В. Семенова, С.В. Шилько,

- В.А. Ковтун* // – Механика композиционных материалов и конструкций. – Т. 7. – № 2. – 2001. – С. 189–205.
3. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред / *Т.Д. Шермергор.* // – М. : Наука, 1977. – 400 с.
 4. Перколяційно-фрактальні матеріали: властивості, технології, застосування / *І.Г. Грабар, О.І. Грабар, О.Ф. Гутніченко та ін.* – Житомир : ЖДТУ, 2007. – 354 с.