ФРАКТАЛ ТА ЙОГО РОЗМІРНІСТЬ

Плужніков О. Б., Грабар І. Г.
Житомирський національний агроекологічний університет

В роботі описано одну з популярних задач, що привели до визначення поняття фракталу та шляхи знаходження фрактальної розмірності. Описано декілька прикладів фрактальної розмірності найбільш відомих фрактальних структур.

One of popular tasks which resulted in determination of concept to the fractal and ways of being of fractal dimension is in-process described. A few examples of fractal dimension of the most known fractal structures are described.

Вступ

Поняття фракталу виросло в нову математичну модель, що дає єдиний опис якостей, властивих багатьом природним явищам. Цим пояснюється сучасна популярність фрактального підходу до аналізу різних об’єктів.

Особливості побудови багатьох невпорядкованих природних структур змушують використовувати для їх описання фрактальну геометрію. Ця геометрія була створена Бенуа Мандельбротом для опису складних природних об’єктів, і характерною їх рисою являється топологічна розмірність, яка відрізняється від евклідової тим, що вона може бути дробовим числом. Фрактальна розмірність, *D*, – поняття фрактальної геометрії, що означає статистичну величину, яка говорить про те наскільки повно фрактал заповнює простір, коли збільшувати його до дрібніших деталей [1]. Наприклад, у випадку двомірних систем справедливо співвідношення між площею і периметром $S \propto P^D$. Фрактальна розмірність D являється чисельним параметром, що характеризує степінь зламаності границь [2].

Існує ряд методів визначення фрактальної розмірності об'єкта. Необхідно відмітити, що всі методи мають визначені обмеження на область власного застосування. Крім того, всі методи володіють різним степенем точності, причому ця точність залежить від типу об'єкту, до якого застосовується той чи інший метод.

Задача, що привела до поняття фракталу

Спочатку поняття фракталу в фізиці виникло в зв'язку з задачею про визначення берегової лінії. Нехай потрібно по заданій карті місцевості виміряти довжину берегової лінії між точками **A** і **B** (Рис. 1).

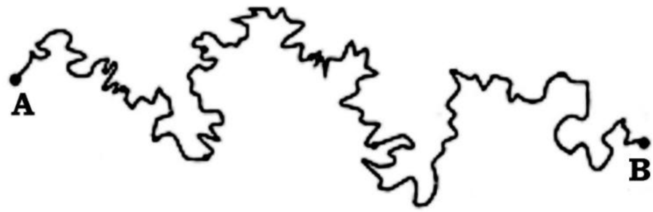

Рис. 1. Берегова лінія між точками

Щоб виміряти довжину берегової лінії між цими точками, за допомогою циркуля, розставимо по берегу жорстко зв'язані одну з одною вішки так, щоб відстань між сусідніми вішками дорівнювала, наприклад 10 км. Довжину берегової лінії між точками **A** і **B** будемо вважати рівною числу вішок мінус одна помноженому на 10 км. Наступне вимірювання цієї довжини виконаємо подібним чином, але відстань між сусідніми вішками приймемо рівним δ = 1 км. Зменшення δ приводить до збільшення числа кроків циркуля вздовж берегової лінії.

Зауважимо, що при використанні циркуля у нас будуть виникати проблеми з островами і річками. Інший спосіб вимірювання берегової лінії полягає в тому, щоб покрити карту сіткою з квадратними комірками розміром $\delta \times \delta$. Так робив норвезький фізик Е. Фьодер при вимірюванні довжини берегової лінії Норвегії (Рис. 2).

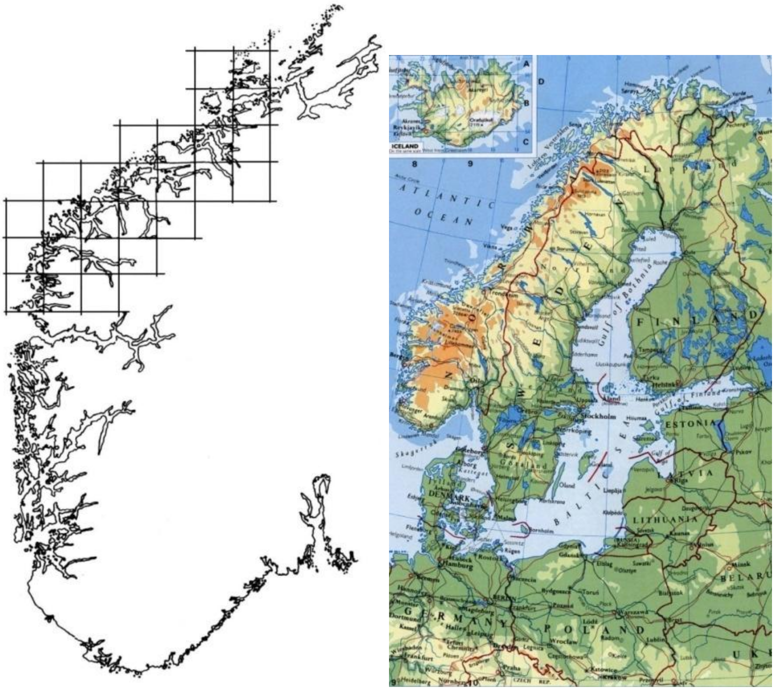

Рис. 2. Карта узбережжя південної частини Норвегії. Квадратна сітка зверху має крок δ = 50 км [3]

Спробуємо спочатку застосувати цей метод для визначення довжини кола радіуса R. Замінимо коло ламаною лінією, відрізки якої розташовані на колі. Зрозуміло, що чим більше число відрізків ми беремо, тим ближче ламана лінія наближається до кола. Довжина відрізка δ ламаної лінії, що складається з n ланок, дорівнює $\delta = 2R\sin(\pi/n)$. Оскільки ламана складається з n відрізків, то її сумарна довжина $L_n = 2nR\sin(\pi/n)$. При великих n значення $\sin(\pi/n) \approx \pi/n$ і, в границі при $n \to \infty$, вираз $L_n = 2nR\sin(\pi/n)$ переходить в добре відому формулу для довжини кола $L = 2\pi R$.

Якщо б берегова лінія також мала цілком визначену довжину L, то можна було б очікувати, що число кроків циркуля або число квадратних комірок $N(\delta)$, необхідних для покриття берегової лінії на карті, буде обернено пропорційно δ, а довжина апроксимуючої ламаної $L(\delta) = N(\delta)\cdot\delta$ при зменшенні δ буде прямувати до L. Але, це не так!

У 1961 р. вийшла робота Л. Ф. Ричардсона, присвячена вимірам довжин берегових ліній. Ним було встановлено, що, на відміну від гладкої кривої, берегова лінія виявляється як правило настільки порізаною (аж до самих маленьких масштабів), що зі зменшенням кроку δ довжина апроксимуючої ламаної $L(\delta) = N(\delta)\cdot\delta$ необмежено зростає. В той же час незмінним залишається значення $a = N(\delta)\cdot\delta^D$, де $D = const > 1$. Виявилося, що для узбережжя Англії константа $D = 1{,}24$.

Порівнюючи вирази $L(\delta) = N(\delta)\cdot\delta$ і $a = N(\delta)\cdot\delta^D$, знаходимо, що довжина апроксимуючої ламаної, при зменшенні δ збільшується за степеневим законом

$$L(\delta) = a\cdot\delta^{1-D}. \tag{1}$$

Таким чином, при визначенні довжини берегової лінії $L(\delta)$ за допомогою жорсткого масштабу δ необхідно зробити $N(\delta) = L(\delta)/\delta$ кроків. При цьому значення $L(\delta)$ змінюється при зміні δ так, що залежність $N(\delta)$ визначається степеневим законом

$$N\left(\delta\right) = \frac{a}{\delta^D}. \tag{2}$$

Для другої берегової лінії степеневий закон (2) зберігається, але D і a будуть іншими, причому для більш порізаної берегової лінії значення D зростає.

Константу D в формулах (1) і (2) називають фрактальною розмірністю берегової лінії. Для звичайної гладкої кривої (типу кола, еліпса) можна очікувати, що $a = L$ (при достатньо малих δ), а показник D дорівнює одиниці.

Знайдемо співвідношення, яке дозволить обрахувати фрактальну розмірність D за даними, отриманими при зміні довжини берегової лінії. Для цього, прологарифмувавши формулу (1), запишемо її у вигляді

$$\log L(\delta) = \log a + (1 - D)\cdot\log\delta. \tag{3}$$

Вираз (3) встановлює лінійну залежність між $\log L(\delta)$ і $\log\delta$, що графічно являє собою пряму лінію. При цьому кутовий коефіцієнт прямої $(1 - D)$ визначається фрактальною розмірністю D досліджуваної берегової лінії.

Аналогічно, прологарифмувавши формулу (2), встановлюємо лінійний зв'язок між $\log N(\delta)$ і $\log\delta$:

$$logN(\delta) = loga - D \cdot log\delta. \quad (4)$$

з виразів (3) і (4), прийнявши до уваги маленькі розміри величин δ, можна записати наступні асимптотичні формули

$$logL(\delta) = (1 - D) \cdot log\delta, \; logN(\delta) = - D \cdot log\delta. \quad (5)$$

Згідно (5), визначити фрактальну розмірність берегової лінії можна, вимірюючи кутовий коефіцієнт графіку $\log L(\delta)$ (або $\log N(\delta)$) як функції $\log\delta$.

Розмірність, яка визначається з формул (5) як результат підрахунку кількості клітинок, необхідних для покриття даної лінії (або взагалі деякої множини), прийнято називати клітинковою розмірністю.

На рис. 3 представлені результати, проведеного Фьодером підрахунку довжини берегової лінії Норвегії за допомогою квадратних сіток з кроком δ від 0,6 до 80 км (рис. 3). При використанні логарифмічного масштабу по осі абсцис і ординат декартової системи ординат всі результати вимірів добре накладаються на пряму лінію. Відповідно формулі (3) її наклон визначається кутовим коефіцієнтом $1 - D$. На рис. значення кутового коефіцієнта $1 - D \approx -0{,}52$. Таким чином, фрактальна розмірність узбережжя Норвегії $D \approx 1{,}52$, тобто знаходиться приблизно посередині між розмінностями гладкої кривої і гладкої поверхні.

На рис. 4 представлені опубліковані Мандельбротом данні про уявну довжину $L(\delta)$ деяких інших берегів. Їх фрактальні розмірності знаходяться в діапазоні значень $D \approx 1$ для гладкого узбережжя півдня Африки і $D \approx 1{,}3$ для дуже порізаного західного узбережжя Британії. Проте жодна країна і жоден берег не може порівнятись з Норвегією, у якої $D \approx 1{,}52$. Мандельброт наводить також дані для кола і показує, як і треба було очікувати, що $D = 1$.

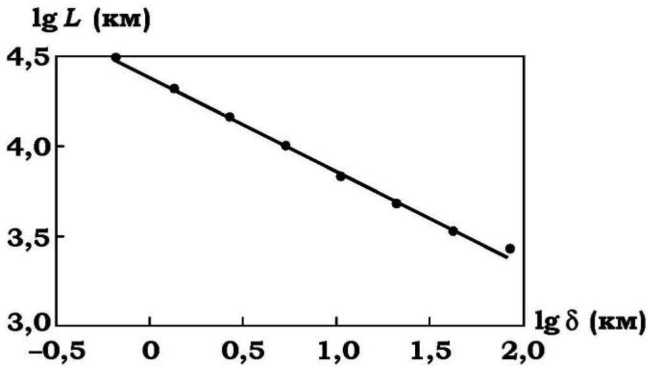

Рис. 3. Виміряна довжина узбережжя Норвегії в залежності від кроку сітки [3]

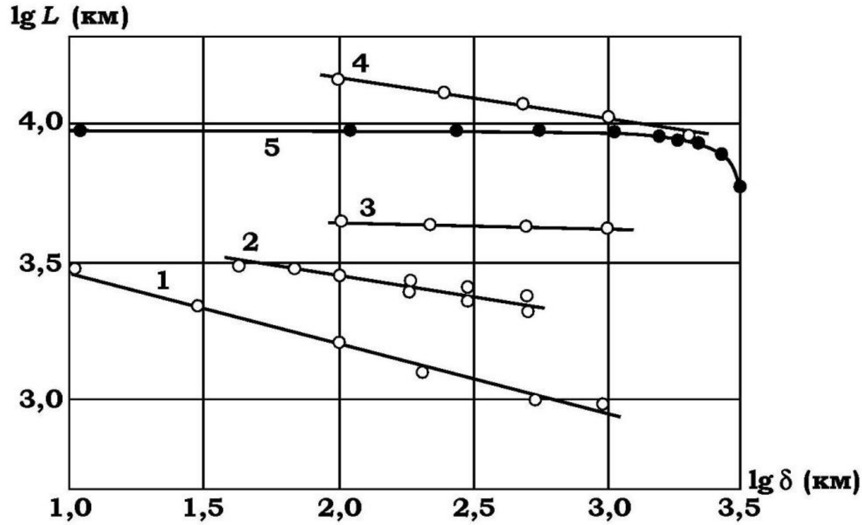

Рис. 4. Довжина узбережжя деяких країн: 1 – Британії, 2 – Германії (1900 р.), 3 – Північної Африки, 4 – Австралії, 5 – коло [3]

Якщо розглядати сніжинку Коха як острів з дивною береговою лінією, то між довжиною берегової лінії острова Коха (Рис. 5) і формулою (1) для довжин інших берегових ліній повинен бути визначений зв'язок.

Обрахуємо довжину берегової лінії острова Коха. На нульовому кроці, тобто $n = 0$, число елементів $N(\delta_0) = 3$, довжина елемента $\delta_0 = 1$, довжина берегової лінії $L(\delta_0) = N(\delta_0)\cdot\delta_0 = 3$.

На кроці $n = 1$: $\delta_1 = (1/3)\delta_0 = 1/3$, $N(\delta_1) = 4N(\delta_0) = 3\cdot 4$, довжина берегової лінії $L(\delta_1) = N(\delta_1)\cdot\delta_1 = 3\cdot(4/3)$.

На кроці $n = 2$: довжина елемента $\delta_2 = (1/3)\delta_1 = (1/3)^2$, число елементів $N(\delta_2) = 4N(\delta_1) = 3\cdot 4^2$, довжина берегової лінії $L(\delta_2) = N(\delta_2)\cdot\delta_2 = 3\cdot(4/3)^2$.

На кроці n: $\delta_n = (1/3)^n$, $N(\delta_n) = 3\cdot 4^n$, Тоді число кроків можна виразити через довжину елемента: $n = -\ln\delta/\ln 3$, а відповідну довжину берегової лінії записати у вигляді наступної формули

$$L\ \delta\ = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n = 3\exp\left(n\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) = 3\exp\left(\left(1-\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)\ln\delta\right) =$$

$$= 3\exp\ \ln\delta^{1-\ln 4/\ln 3}\ = 3\cdot\delta^{1-\ln 4/\ln 3}.$$

Співставляючи отриманий вираз з формулою (1), отримаємо рівність для довжини берегової лінії на n-тому кроці створення острова Коха:

$$L\ \delta\ = 3\cdot\delta^{1-\ln 4/\ln 3} = a\cdot\delta^{1-d}. \tag{6}$$

З виразу (6) знаходимо фрактальну розмірність берегової лінії острову Коха:

$$D = \ln 4/\ln 3 \approx 1{,}2628 > 1.$$

При $n \to \infty$, величина $\delta \to 0$, отож, довжина берегової лінії прямує до нескінченності

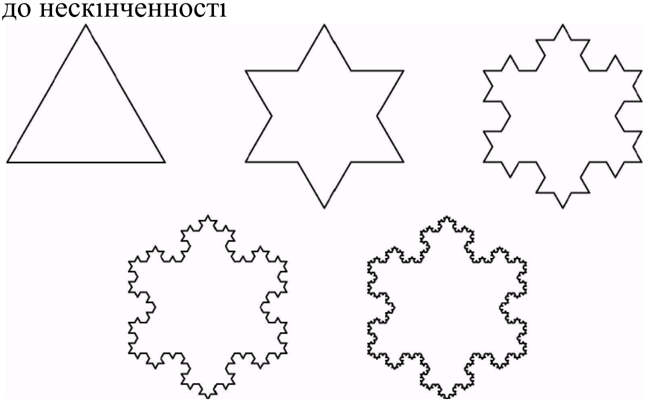

Рис. 5. Сніжинка Коха

Отже, підсумовуючи вище сказане, розмірність сніжинки Коха має топологічну розмірність, але вона не є кривою в жодному разі: довжина кривої між двома точками сніжинки Коха є нескінченною. Жоден найменший шматок цієї кривої не є подібним до лінії, але не є він чимось подібним до шматочку площини тощо. Можна сказати, що цей шматочок є занадто «товстим» щоб класифікувати його як одновимірний об'єкт, але він занадто «тонкий» щоб класифікувати його як двовимірний об'єкт. Тобто розмірність цього об'єкта є числом між одиницею і двійкою.

Цікаво розглянути реальну побудову берегової лінії острову Коха за допомогою олівця і паперу [3]. Нехай початкова довжина сторони трикутника дорівнює одному метру, а олівець залишає лінію товщиною 0,1 мм = 10^{-4} м. З математичної точки зору процедура побудови кривої може тривати нескінченно. Реальний процес зупиниться, як тільки довжина відрізка між сусідніми точками зламу порівняється з товщиною лінії. Тоді граничним масштабом для виміру довжини берегової лінії острову Коха буде $\delta = (1/3)^n = 10^{-4}$. Звідси знаходимо кількість ітерацій n при реальній побудові: $n = 4/\lg 3 \approx 8$. При цьому довжина берегової лінії Коха $L = 3\cdot(4/3)8 \approx 30$ м.

Формальне визначення найбільш вживаних фрактальних розмірностей

Існує багато специфічних визначень фрактальної розмірності. Найважливішими теоретичними фрактальними розмірностями є розмірність Рені, розмірність Хаусдорфа, компактна розмірність. На практиці, розмірність Мінковського і кореляційна розмірність широко застосовуються через їхню простоту використання. Хоч для деяких фракталів всі ці розмірності збігаються, загалом вони не є еквівалентними.

Існує два підходи для генерації фрактальної структури. Один з них – це вирощування з одиничного об'єкта (рис. 6), інший – сконструювати подальші розмірності вихідної структури, наприклад трикутник Серпінського (рис. 7) [1]. Тут ми користуємось другим підходом для визначення розмірності фрактального об'єкта (див. рис. 6).

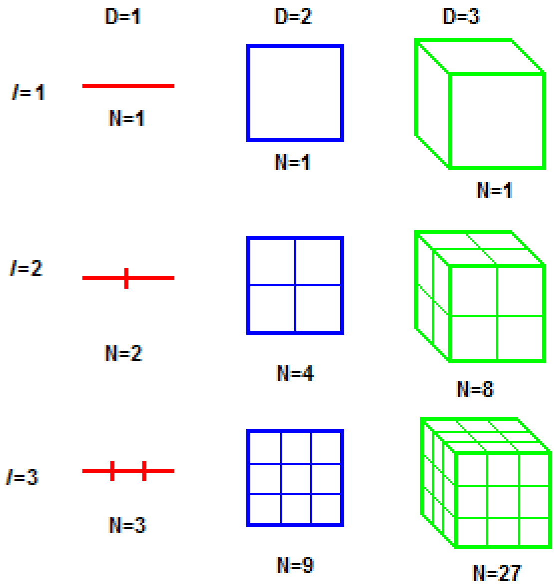

Рис. 6. Визначення розмірності з одиниці об'єкта [1]

Якщо ми візьмемо об'єкт з лінійним розміром що дорівнює 1 і припустимо що цей об'єкт знаходиться в евклідовому просторі D, зменшимо його лінійний розмір на $1/l$ в кожному напрямку в просторі, він має $N = l^D$ самоподібних об'єктів для того щоб покрити вихідний об'єкт. (Рис. 7). Розмірність визначена як

$$D = \frac{\log N\ \ l}{\log l}$$

(де логарифм може мати будь яку основу) досі дорівнює її топологічній або Евклідовій розмірності [4]. Використовуючи це рівняння для фрактальної структури, ми отримаємо її розмірність (яка є більш-менш Хаусдорфовою розмірністю), що не буде цілим числом як і передбачалось.

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N\ \ \delta}{\log \frac{1}{\delta}}$$

де $N(\delta)$ – це число самоподібних структур лінійного розміру δ, необхідних для покриття всієї структури.

Наприклад, фрактальна розмірність *трикутника Серпінського* (Рис. 7) визначається як

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N \quad \varepsilon}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\log 3^k}{\log 2^k} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585.$$

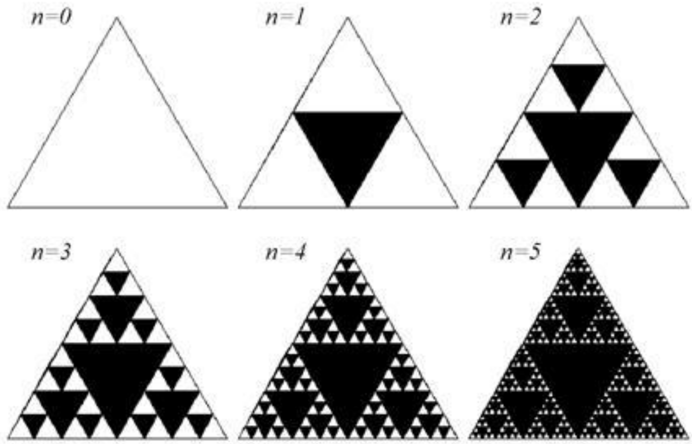

Рис. 8. Трикутник Серпінського, отриманий з допомогою рекурсивного поділу вихідної структури

Подібним до цього є *розмірність Мінковського*, що розглядає випадок поділу простору на сітку кубиків, що мають розмір ε. Проводиться підрахунок скільки таких кубиків буде містити частину атрактор. Знову,

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N \quad \varepsilon}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}$$

Інші величини розмірності включають *інформаційну розмірність*, яка розглядає яка середня ентропія потрібна для визначення заповнених кубиків коли розмір кубиків зменшується:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\langle \log p_\varepsilon \rangle}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}$$

і *кореляційна розмірність*, яку напевне підраховувати найлегше,

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \to 0, M \to \infty} \frac{\log\ g_\varepsilon / M^2}{\log \varepsilon}$$

де M – це число точок, що використовувались для генерації фракталу або атрактору, і g_ε – це число пар точок, що знаходять ближче одна до одної, ніж ε.

Розмірність Мінковського, інформаційна та кореляціна розмірності можуть бути розглянуті як часткові випадки неперервного спектру узагальненої або *розмірностей Рені* порядку α, що визначається як

$$D_\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{1-\alpha} \log\ \sum_i p_i^\alpha}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

де чисельник це границя в ентропії Рені порядку α. Розмірність Рені з α = 0 розглядає усі частини підтримки атрактору однаково; однак для більших значень α важливіше значення надається частинам атрактора, які відвідуються найчастіше.

Атрактор для якого розмірності Рені не рівні називається *мультифракталом*, або таким що має мультифрактальну структуру. Це ознака того що фрактал має різну розмірність в різних його частинах.

Висновок

Способи вимірювання фрактальної розмірності, описані вище, виведені для фракталів, які визначені формально. Однак, живі організми і явища природи мають фрактальні властивості, тому часто корисно охарактеризивувати фрактальну розмірність набору виборок даних. Фрактальна розмірність не може бути виведена точно, але може бути оцінена. Це використовується в багатьох сферах досліджень, включаючи фізику, аналіз зображень, акустику, дзета нулі Рімана, електрохімічні процеси. Оцінки фрактальної розмірності дуже чутливі до шуму в експериментальних даних, особливо до обмежень в кількості даних. Потрібно бути обережним з висновками щодо визначеної фрактальної розмірності для малорозмірної динамічної поведінки, за винятком коли використовується велика кількість даних.

Список використаних джерел

1. www.wikipedia.org

2. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature / B. B. Mandelbrot. – San Francisco : Freeman, 1982. – 460 p.

3. Гринченко В. Т. Фракталы – от удивления к рабочему инструменту : учебное пособие / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – К. : Наукова думка, 2013. – 270 с.

4. Смирнов Б. М. Фрактальные кластеры / Б. М. Смирнов // Успехи физических наук. – 1986. – Т.149. – вып.2. – С. 177–217.

5. Белко А. В. Методы построения объектов с фрактальной структурой / А. В. Белко, А. В. Никитин // Вестник. Серия 2. – 2002. – №2. – С.133–138