УДК 517.983

В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин, П. Н. Забродский (Житомир. нац. агроэкол. ун-т)

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ МАТРИЦАМИ

We propose new methods for the construction of generalized inverse operator matrices for the operator matrices in Banach spaces. The solvability criteria and the formulas for representations of the general solutions of operator equations with operator matrices are obtained. As an application, we consider the relationship between the obtained formulas and the well-known Frobenius formula for the construction of the matrix inverse to a nondegenerate block matrix.

Запропоновано способи побудови узагальнено-обернених операторних матриць до операторних матриць у банахових просторах. Отримано критерії розв'язності та формули для загальних розв'язків операторних рівнянь з операторними матрицями. Як застосування розглянуто зв'язок отриманих формул із відомою формулою Фробеніуса для побудови оберненої матриці до невиродженої блокової матриці.

Введение. В настоящее время хорошо разработаны и успешно применяются способы обобщенного обращения операторов в конечномерных и бесконечномерных пространствах, построения проекторов и ортопроекторов, которые стали неотъемлемым аппаратом при исследовании краевых задач для различных типов функционально-дифференциальных и операторных уравнений в евклидовых и банаховых пространствах [1 – 5].

Исследование линейных, слабовозмущенных и слабонелинейных краевых задач для не везде разрешимых операторных уравнений приводит к необходимости решения уравнений с операторными матрицами [6, 7]. Поэтому актуальными являются задачи построения обобщенно-обратных операторов к операторным матрицам, установления условий разрешимости, а также представления общих решений таких уравнений.

Решение этих задач будет интересно и для обобщенного обращения блочных матриц, поскольку их применение при моделировании теоретических и практических задач в математике, технике, экономике и т. п. приводит к необходимости разработки новых аналитических способов исследования и решения матричных алгебраических уравнений.

Постановка задачи. Пусть $\mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2,\ \mathbf{B}_3$ — банаховы пространства.

Рассмотрим операторные уравнения

$$L_0 x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M_0 \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = g, \tag{1}$$

где L_0 и M_0 — операторные матрицы. Линейный оператор $L_0 = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ действует из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в прямое произведение банаховых пространств $\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3$, а линейный оператор $M_0 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$ — из прямого произведения банаховых пространств $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ в банахово пространство $\mathbf{B}_3$.

Ставится задача об условиях существования и построении обобщенно-обратных операторных матриц к операторным матрицам L_0 и M_0, а также об установлении условий разрешимости и представлении общих решений уравнений (1).

Основной результат. ***1.*** Рассмотрим уравнение с операторной матрицей вида

$$L_0 x = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $L_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — линейный ограниченный обобщенно обратимый, а $L_2 \colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B_3}$ — линейный ограниченный операторы, $u \in \mathbf{B}_2$, $v \in \mathbf{B_3}$.

Класс линейных ограниченных обобщенно обратимых операторов, действующих из банахова пространства $\mathbf{X}$ в банахово пространство $\mathbf{Y}$, будем обозначать через $\mathbf{GI}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Вследствие обобщенной обратимости оператора L_1 существуют [8, 9] ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L_1)} \colon \mathbf{B}_1 \to N(L_1)$ на нуль-пространство $N(L_1)$ оператора L_1 и $\mathcal{P}_{Y_{L_1}} : \mathbf{B}_2 \to Y_{L_1}$ на подпространство $Y_{L_1} = \mathbf{B}_2 \ominus R(L_1)$.

Обозначим через $\widetilde{L}_2 = L_2 \mathcal{P}_{N(L_1)} \colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_3$ линейный ограниченный оператор. Пусть оператор $\widetilde{L}_2$ обобщенно обратим. Тогда существуют: $\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} \colon \mathbf{B}_1 \to N(\widetilde{L}_2)$ — ограниченный проектор на нуль-пространство оператора $\widetilde{L}_2$, $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} : \mathbf{B}_3 \to Y_{\widetilde{L}_2}$ — ограниченный проектор на подпространство $Y_{\widetilde{L}_2} = I_{\mathbf{B}_3} \ominus R(\widetilde{L}_2)$ оператора $\widetilde{L}_2$ и ограниченный обобщенно-обратный оператор $\widetilde{L}_2^-$ к оператору $\widetilde{L}_2$.

Теорема 1. *Пусть $L_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ и $\widetilde{L}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3)$. Тогда операторное уравнение* (2) *разрешимо для тех и только тех* $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, *для которых выполняется условие*

$$\mathcal{P}_{Y_{L_0}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \tag{3}$$

и при этом имеет семейство решений вида

$$x = \mathcal{P}_{N(L_0)} \hat{x} + L_0^- \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{P}_{Y_{L_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ & \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 L_1^- & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix}$$

— ограниченный проектор на подпространство $Y_{L_0} = I_{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3} \ominus R(L_0)$, $\mathcal{P}_{N(L_0)} = \mathcal{P}_{N(L_1)} \mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)}$ — ограниченный проектор на нуль-пространство оператора L_0, $\hat{x}$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_1$,

$$L_0^- = \left[L_1^- - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- \qquad \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- \right] \tag{5}$$

— ограниченная обобщенно-обратная операторная матрица к операторной матрице $L_0 = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$.

Доказательство. Поскольку первое уравнение $L_1 x = u$ из (2) нормально разрешимо, то оно имеет решение тогда и только тогда, когда [2, 3, 9]

$$\mathcal{P}_{Y_{L_1}} u = 0,$$

и при этом имеет семейство решений

$$x = \mathcal{P}_{N(L_1)}\hat{x} + L_1^- u, \tag{6}$$

где $\hat{x} \in \mathbf{B}$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_1$.

Подставив найденное x из (6) во второе уравнение $L_2 x = v$, получим

$$\widetilde{L}_2 \hat{x} = v - L_2 L_1^- u. \tag{7}$$

Вследствие обобщенной обратимости, а следовательно, и нормальной разрешимости оператора $\widetilde{L}_2$ уравнение (7) разрешимо относительно $\hat{x}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}}\big[v - L_2 L_1^- u\big] = 0,$$

и при этом имеет семейство решений

$$\hat{x} = \mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)}\tilde{x} + \widetilde{L}_2^-\big[v - L_2 L_1^- u\big], \tag{8}$$

где $\tilde{x} \in \mathbf{B}_1$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_1$, $\widetilde{L}_2^-$ — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору $\widetilde{L}_2$.

Подставив (8) в (6), получим

$$x = \mathcal{P}_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)}\tilde{x} - \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- u + L_1^- u + \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- v =$$

$$= \mathcal{P}_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)}\tilde{x} + \Big[L_1^- - \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- \quad \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^-\Big]\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Докажем, что оператор $\Big[L_1^- - \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- \quad \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^-\Big]$ является обобщенно-обратным к оператору L_0.

Для проверки условий [1, 3, 9]

$$L_0^- L_0 L_0^- = L_0^-, \qquad L_0 L_0^- L_0 = L_0, \tag{9}$$

определяющих обобщенно-обратный оператор, найдем

$$L_0 L_0^- = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\Big[L_1^- - \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- \quad \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^-\Big] =$$

$$= \begin{bmatrix} L_1 L_1^- - L_1\mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- & L_1\mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- \\ L_2 L_1^- - L_2\mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- & L_2\mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ (I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{L}_2\widetilde{L}_2^-)L_2 L_1^- & I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 L_1^- & I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

так как $L_1 \mathcal{P}_{N(L_1)} = 0,\ I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{L}_2 \widetilde{L}_2^- = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}}$.

Поскольку одно из условий (9) следует из другого [9], проверим, например, второе из соотношений (9):

$$L_0 L_0^- L_0 = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 L_1^- & I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ \\ L_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} L_1 - \mathcal{P}_{Y_{L_1}} L_1 \\ \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 L_1^- L_1 + L_2 - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 (L_1^- L_1 - I_{\mathbf{B}_1}) + L_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} L_1 \\ \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 \mathcal{P}_{N(L_1)} + L_2 \end{bmatrix} = L_0,$$

так как $\mathcal{P}_{Y_{L_1}} L_1 = 0,\ L_2 \mathcal{P}_{N(L_1)} = \widetilde{L}_2$, а $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \widetilde{L}_2 = 0$.

Аналогично проверяется и первое из соотношений (9). Таким образом, операторная матрица

$$L_0^- = \left[L_1^- - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- \quad \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- \right]$$

является обобщенно-обратной к операторной матрице

$$L_0 = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения [1, 3]

$$L_0^- L_0 = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L_0)}, \quad L_0 L_0^- = I_{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{L_0}},$$

которые связывают обобщенно-обратный оператор и проекторы, находим $\mathcal{P}_{N(L_0)}$ и $\mathcal{P}_{Y_{L_0}}$:

$$L_0^- L_0 = \left[L_1^- - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- \quad \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- \right] \begin{bmatrix} L_1 \\ \\ L_2 \end{bmatrix} =$$

$$= L_1^- L_1 - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- L_1 + \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 =$$

$$= I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L_1)} - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 \left[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L_1)} \right] + \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 =$$

$$= I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L_1)} - \mathcal{P}_{N(L_1)} \left[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_1)} \right] = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L_1)} \mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что

$$\mathcal{P}_{N(L_0)} = \mathcal{P}_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)}.$$

Покажем, что оператор $\mathcal{P}_{N(L_0)}$ является проектором на нуль-пространство $N(L_0)$ оператора L_0, т. е.

$$\mathcal{P}^2_{N(L_0)} = \mathcal{P}_{N(L_0)}, \qquad L_0\mathcal{P}_{N(L_0)} = 0.$$

Проверим первое соотношение. Действительно, поскольку $\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} = I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{L}_2^-\widetilde{L}_2$, то

$$\mathcal{P}^2_{N(L_0)} = \mathcal{P}_{N(L_1)}[I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{L}_2^-\widetilde{L}_2]\mathcal{P}_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} =$$

$$= \mathcal{P}^2_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} - \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2\mathcal{P}^2_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} = \mathcal{P}_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} = \mathcal{P}_{N(L_0)},$$

так как $L_2\mathcal{P}_{N(L_1)} = \widetilde{L}_2$, а $\widetilde{L}_2\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} = 0$.

Проверим второе соотношение:

$$L_0\mathcal{P}_{N(L_0)} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\mathcal{P}_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} = \begin{bmatrix} L_1\mathcal{P}_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} \\ L_2\mathcal{P}_{N(L_1)}\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

так как $L_1\mathcal{P}_{N(L_1)} = 0,\ L_2\mathcal{P}_{N(L_1)} = \widetilde{L}_2,\ \widetilde{L}_2\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_2)} = 0$.

Из (10) имеем

$$L_0L_0^- = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}}L_2L_1^- & I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix} = I_{\mathbf{B}_2\times\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{L_0}}, \tag{12}$$

откуда

$$\mathcal{P}_{Y_{L_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}}L_2L_1^- & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix}.$$

Далее покажем, что $\mathcal{P}_{Y_{L_0}}$ является проектором на подпространство $Y_{L_0} = I_{\mathbf{B}_2\times\mathbf{B}_3} \ominus R(L_0)$, т. е. удовлетворяет условиям

$$\mathcal{P}^2_{Y_{L_0}} = \mathcal{P}_{Y_{L_0}}, \qquad L_0^-\mathcal{P}_{Y_{L_0}} = 0.$$

Проверим первое условие:

$$\mathcal{P}^2_{Y_{L_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}}L_2L_1^- & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}^2_{Y_{L_1}} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}}L_2L_1^-\mathcal{P}_{Y_{L_1}} - \mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{L}_2}}L_2L_1^- & \mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 L_1^- & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_{L_0}},$$

так как $L_1^- \mathcal{P}_{Y_{L_1}} = 0$.

Далее проверим второе условие:

$$L_0^- \mathcal{P}_{Y_{L_0}} = \left[L_1^- - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- \quad \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- \right] \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{L_1}} & 0 \\ \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 L_1^- & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[L_1^- \mathcal{P}_{Y_{L_1}} - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- \mathcal{P}_{Y_{L_1}} - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} L_2 L_1^- \quad \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} \right] = [0 \quad 0],$$

так как $L_1^- \mathcal{P}_{Y_{L_1}} = 0$ и $\widetilde{L}_2^- \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_2}} = 0$.

Из (12) следует, что (5) является решением операторного уравнения (2) при выполнении условий (11).

***Замечание* 1.** Известно [1, 3, 9], что обобщенно-обратный оператор не определяется однозначно. Поэтому если в системе операторных уравнений (2) провести процедуру, в которой сначала найти решение второго уравнения, а затем подставить его в первое, то обобщенно-обратный оператор будет иметь вид

$$L_0^- = \left[\mathcal{P}_{N(L_2)} \widetilde{L}_1^- \quad L_2^- - \mathcal{P}_{N(L_2)} \widetilde{L}_1^- L_1 L_2^- \right], \tag{13}$$

а проекторы

$$\mathcal{P}_{N(L_0)} = \mathcal{P}_{N(L_2)} \mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_1)},$$

$$\mathcal{P}_{Y_{L_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_1}} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_1}} L_1 L_2^- \\ \\ 0 & \mathcal{P}_{Y_{L_2}} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $\widetilde{L}_1 = L_1 \mathcal{P}_{N(L_2)}$ и L_2 — линейные ограниченные обобщенно обратимые операторы.

Если один из операторов L_1 или L_2 обратим, то теорема 1 значительно упрощается. Пусть, например, обратим оператор L_2.

Теорема 2. *Пусть* $L_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — *ограниченный, а* $L_2 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_3$ — *обратимый операторы. Тогда операторное уравнение* (2) *разрешимо для тех и только тех* $\operatorname{col}[u, v]$, *которые удовлетворяют условию*

$$\mathcal{P}_{Y_{L_0}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = u - L_1 L_2^{-1} v = 0,$$

при выполнении которого оно имеет единственное решение

$$x = L_0^- \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = L_2^{-1} v,$$

где $\mathcal{P}_{Y_{L_0}} = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} & L_1 L_2^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *— ограниченный проектор на подпространство* $Y_{L_0} = I_{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3} \ominus R(L_0)$, $\mathcal{P}_{N(L_0)} = 0$,

$$L_0^- = \begin{bmatrix} 0 & L_2^{-1} \end{bmatrix}$$

— ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору L_0.

Доказательство. Действительно, поскольку оператор $L_2 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_3$ обратим, то $\mathcal{P}_{N(L_2)} = 0$, $\mathcal{P}_{Y_{L_2}} = 0$. Тогда $\widetilde{L}_1 = L_1 \mathcal{P}_{N(L_2)} = 0$, $\mathcal{P}_{N(\widetilde{L}_1)} = I_{\mathbf{B}_1}$, $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{L}_1}} = I_{\mathbf{B}_2}$ и из формул (13), (14) следует утверждение теоремы 2.

***Замечание* 2.** Из теоремы 2 следует, что в случае, когда оператор $L_2 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_3$ обратим, оператор L_0 будет n-нормальным, так как $\ker L_0 = 0$. Тогда оператор $L_0^- = \begin{bmatrix} 0 & L_2^{-1} \end{bmatrix}$ будет левым обратным оператором $(L_0)_l^{-1}$ к оператору L_0 [10].

2. Далее рассмотрим условия разрешимости и представление общего решения операторного уравнения с операторной матрицей вида

$$M_0 \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = g, \tag{15}$$

где $M_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B_3}$ — линейный ограниченный обобщенно обратимый, а $M_2 : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B_3}$ — линейный ограниченный операторы, $\mathrm{col}\,[y, z] \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, $g \in \mathbf{B_3}$.

Вследствие обобщенной обратимости оператора M_1 существуют ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(M_1)}$ на нуль-пространство $N(M_1)$ оператора M_1 и $\mathcal{P}_{Y_{M_1}}$ на подпространство $I_{\mathbf{B_3}} - R(M_1)$, а также ограниченный обобщенно-обратный оператор M_1^- к оператору M_1.

Обозначим через $\widehat{M}_2 = \mathcal{P}_{Y_{M_1}} M_2$ линейный ограниченный оператор. Пусть оператор $\widehat{M}_2$ обобщенно обратим. Тогда существуют ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} : \mathbf{B}_2 \to N(\widehat{M}_2)$, $\mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}} : \mathbf{B}_3 \to I_{\mathbf{B_3}} \ominus R(\widehat{M}_2)$ и ограниченный обобщенно-обратный оператор $\widehat{M}_2^-$ к оператору $\widehat{M}_2$.

Ставится задача о построении обобщенно-обратного оператора M_0^- к оператору M_0, проекторов $\mathcal{P}_{N(M_0)}$ и $\mathcal{P}_{Y_{M_0}}$, нахождении условий разрешимости, а также формульном представлении общего решения уравнения (15).

Запишем (15) в виде

$$M_1 y + M_2 z = g, \tag{16}$$

или

$$M_1 y = g - M_2 z. \tag{17}$$

Уравнение (17) разрешимо относительно y тогда и только тогда [2, 3, 9], когда

$$\mathcal{P}_{Y_{M_1}} \big[g - M_2 z \big] = 0, \tag{18}$$

и при этом имеет семейство решений

$$y = \mathcal{P}_{N(M_1)} \hat{y} + M_1^- \big[g - M_2 z \big], \tag{19}$$

где $\hat{y}$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{B}_1$, M_1^- — обобщенно-обратный оператор к оператору M_1.

Из равенства (18) имеем

$$\mathcal{P}_{Y_{M_1}} M_2 z = \mathcal{P}_{Y_{M_1}} g. \tag{20}$$

Тогда из (20) получим операторное уравнение относительно элемента z:

$$\widehat{M}_2 z = \mathcal{P}_{Y_{M_1}} g. \tag{21}$$

Поскольку оператор $\widehat{M}_2$ обобщенно обратим, то уравнение (21) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}} \mathcal{P}_{Y_{M_1}} g = 0,$$

и при этом имеет решение

$$z = \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \hat{z} + \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} g, \tag{22}$$

где $\hat{z}$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_2$, $\widehat{M}_2^-$ — обобщенно-обратный оператор к оператору $\widehat{M}_2$.

Подставив (22) в (19), получим

$$y = \mathcal{P}_{N(M_1)} \hat{y} + M_1^- \left[g - M_2 \left\{ \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \hat{z} + \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} g \right\} \right] =$$

$$= \mathcal{P}_{N(M_1)} \hat{y} - M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \hat{z} + M_1^- g - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} g.$$

Таким образом, уравнение (15) имеет семейство решений

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)} & -M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1^- - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \\ \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \end{bmatrix} g.$$

Теорема 3. *Пусть* $M_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3)$ *и* $\widehat{M}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3)$. *Тогда операторное уравнение* (15) *разрешимо для тех и только тех* g, *которые удовлетворяют условию*

$$\mathcal{P}_{Y_{M_0}} g = 0, \tag{23}$$

при выполнении которого оно имеет семейство решений

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(M_0)} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + M_0^- g, \tag{24}$$

где $\mathcal{P}_{Y_{M_0}} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}} \mathcal{P}_{Y_{M_1}}$ *— проектор на подпространство* $Y_{M_0} = \mathbf{B}_3 \ominus R(M_0)$,

$$\mathcal{P}_{N(M_0)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)} & -M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix}$$

— проектор на нуль-пространство $N(M_0)$ *оператора* M_0,

$$M_0^- = \begin{bmatrix} M_1^- - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \\ \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \end{bmatrix}$$

— обобщенно-обратная операторная матрица к операторной матрице $M_0 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$, $\hat{y} \in \mathbf{B}_1,\ \hat{z} \in \mathbf{B}_2$ *— произвольные элементы соответствующих пространств.*

Доказательство. Сначала докажем, что оператор

$$M_0^- = \begin{bmatrix} M_1^- - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \\ \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

является обобщенно-обратным оператором к оператору $M_0 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$.

Для этого необходимо и достаточно проверить, что оператор M_0^- удовлетворяет условиям [9]

$$M_0^- M_0 M_0^- = M_0^-, \qquad M_0 M_0^- M_0 = M_0, \tag{26}$$

каждое из которых является следствием другого.

Проверим, например, первое условие. Сначала определим

$$M_0^- M_0 = \begin{bmatrix} M_1^- - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \\ \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} M_1^- M_1 - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} M_1 & M_1^- M_2 - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} M_2 \\ \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} M_1 & \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} M_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} M_1^- M_1 & M_1^- M_2 [I - \widehat{M}_2^- \widehat{M}_2] \\ 0 & \widehat{M}_2^- \widehat{M}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(M_1)} & M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix} = I_{\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{N(M_0)}.$$

Тогда

$$M_0^- M_0 M_0^- = [I_{\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{N(M_0)}] M_0^- = M_0^- - \mathcal{P}_{N(M_0)} M_0^- =$$

$$= M_0^- - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)} & M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^- - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \\ \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \end{bmatrix} =$$

$$= M_0^- - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)}(M_1^- - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}}) + M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \\ \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \end{bmatrix} = M_0^-,$$

так как $\mathcal{P}_{N(M_1)} M_1^- = 0, \quad \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \widehat{M}_2^- = 0.$

Аналогично проверяется второе из условий (26).

Далее покажем, что оператор $\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)} & -M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix}$ является проектором $\mathcal{P}_{N(M_0)}$ на нуль-пространство $N(M_0)$ оператора M_0, т. е.

$$\mathcal{P}^2_{N(M_0)} = \mathcal{P}_{N(M_0)}, \qquad M_0 \mathcal{P}_{N(M_0)} = 0.$$

Проверим первое условие:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)} & -M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}^2_{N(M_1)} & -\mathcal{P}_{N(M_1)} M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} - M_1^- M_2 \mathcal{P}^2_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}^2_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)} & -M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix},$$

так как $\mathcal{P}_{N(M_1)} M_1^- = 0$, а $\mathcal{P}^2_{N(\widehat{M}_2)} = \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)}$.

Проверим второе условие:

$$M_0 \mathcal{P}_{N(M_0)} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)} & -M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} M_1 \mathcal{P}_{N(M_1)} & -M_1 M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} + M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} M_1 \mathcal{P}_{N(M_1)} & -[I - \mathcal{P}_{Y_{M_1}}] M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} + M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{M}_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

так как $M_1 \mathcal{P}_{N(M_1)} = 0$ и $\widehat{M}_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} = 0$.

Таким образом, $\mathcal{P}_{N(M_0)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(M_1)} & -M_1^- M_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} \end{bmatrix}$ — проектор на нуль-пространство оператора M_0.

Далее покажем, что оператор

$$\mathcal{P}_{Y_{M_0}} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}} \mathcal{P}_{Y_{M_1}}$$

является проектором на подпространство $Y_{M_0} = \mathbf{B}_3 \ominus R(M_0)$.

Для доказательства воспользуемся соотношением, которое связывает обобщенно-обратный оператор и проектор [3]

$$M_0M_0^- = I_{\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{M_0}}. \tag{27}$$

Определим

$$M_0M_0^- = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^- - M_1^- M_2 \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \\ \widehat{M}_2^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \end{bmatrix} =$$

$$= M_1M_1^- - M_1M_1^- M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} + M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} =$$

$$= [I_{\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{M_1}}][I_{\mathbf{B}_3} - M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}}] + M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} =$$

$$= I_{\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{M_1}} + \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} = I_{\mathbf{B}_3} - [I_{\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-]\mathcal{P}_{Y_{M_1}} =$$

$$= I - \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\mathcal{P}_{Y_{M_1}} = I_{\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{M_0}},$$

так как $\mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2 = \widehat{M}_2,\ I - \widehat{M}_2\widehat{M}_2^- = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}$. Тогда $\mathcal{P}_{Y_{M_0}} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\mathcal{P}_{Y_{M_1}}$.

Проверим, что $\mathcal{P}_{Y_{M_0}}$ действительно является проектором на подпространство Y_{M_0}, т. е. удовлетворяет условиям

$$\mathcal{P}^2_{Y_{M_0}} = \mathcal{P}_{Y_{M_0}}, \qquad \mathcal{P}_{Y_{M_0}}M_0 = 0.$$

Проверим первое условие:

$$\mathcal{P}^2_{Y_{M_0}} = [\mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\mathcal{P}_{Y_{M_1}}]^2 = [I_{\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-]\mathcal{P}_{Y_{M_1}}[I_{\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-]\mathcal{P}_{Y_{M_1}} =$$

$$= \mathcal{P}^2_{Y_{M_1}} - \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}^2_{Y_{M_1}} - \mathcal{P}^2_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} + \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}^2_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} =$$

$$= \mathcal{P}_{Y_{M_1}} - \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} - \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} + \mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2\widehat{M}_2^-\mathcal{P}_{Y_{M_1}} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\mathcal{P}_{Y_{M_1}},$$

так как $\mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2 = \widehat{M}_2,\ \widehat{M}_2^-\widehat{M}_2\widehat{M}_2^- = \widehat{M}_2^-,\ I_{\mathbf{B}_3} - \widehat{M}_2\widehat{M}_2^- = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}$.

Проверим второе условие:

$$\mathcal{P}_{Y_{M_0}}M_0 = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\mathcal{P}_{Y_{M_1}}\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_1 & \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

так как $\mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_1 = 0,\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\mathcal{P}_{Y_{M_1}}M_2 = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}}\widehat{M}_2 = 0.$

Из (27) следует, что при выполнении условия (23) уравнение (15) имеет решение (24).

***Замечание* 3.** Вследствие неоднозначного представления обобщенно-обратных операторов для оператора $M_0 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$ обобщенно-обратным будет также оператор

$$M_0^- = \begin{bmatrix} \widehat{M}_1^-\mathcal{P}_{Y_{M_2}} \\ M_2^- - M_2^- M_1\widehat{M}_1^-\mathcal{P}_{Y_{M_2}} \end{bmatrix},$$

где $\widehat{M}_1 = \mathcal{P}_{Y_{M_2}}M_1$ и M_2 — линейные ограниченные обобщенно обратимые операторы.

При этом проекторы будут иметь вид

$$\mathcal{P}_{Y_{M_0}} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_1}}\mathcal{P}_{Y_{M_2}},$$

$$\mathcal{P}_{N(M_0)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_1)} & 0 \\ -M_2^- M_1 \mathcal{P}_{N(\widehat{M}_1)} & \mathcal{P}_{N(M_2)} \end{bmatrix},$$

где $\widehat{M}_1 = \mathcal{P}_{Y_{M_2}} M_1,\ M_2$ — линейные ограниченные обобщенно обратимые операторы.

Теорема 3 значительно упрощается, если один из операторов M_1 или M_2 имеет обратный. Пусть это будет оператор M_1.

Теорема 4. *Пусть оператор* $M_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *обратим, а оператор* $M_2 : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_3$ *ограничен. Тогда операторное уравнение* (15) *разрешимо для любых* g *и имеет семейство решений*

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(M_0)} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + M_0^- g,$$

где $\mathcal{P}_{N(M_0)} = \begin{bmatrix} 0 & -M_1^{-1} M_2 \\ 0 & I_{\mathbf{B}_2} \end{bmatrix}$ *— ограниченный проектор на подпространство* $N(M_0)$,

$$M_0^- = \begin{bmatrix} M_1^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

— ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору M_0.

Доказательство. Действительно, поскольку оператор $M_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ обратим, то $\mathcal{P}_{N(M_1)} = 0,\ \mathcal{P}_{Y_{M_1}} = 0$. Тогда условие разрешимости (23) всегда выполняется ($\mathcal{P}_{Y_{M_0}} = 0$) и уравнение (16) будет везде разрешимым. Оператор $\widehat{M}_2 = \mathcal{P}_{Y_{M_1}} M_2$ нулевой и, следовательно, $\mathcal{P}_{N(\widehat{M}_2)} = I_{\mathbf{B}_1}\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}} = I_{\mathbf{B}_3}$. Тогда из теоремы 3 следует утверждение теоремы 4.

***Замечание* 4.** Очевидно, что в случае, когда оператор M_2 обратим, обобщенно-обратный оператор к оператору M_0 имеет вид

$$M_0^- = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2^{-1} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

***Замечание* 5.** Из теоремы 4 следует, что в случае, когда $M_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_3$ обратим, оператор M_0 будет d-нормальным, поскольку $\mathcal{P}_{Y_{M_0}} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{M}_2}} \mathcal{P}_{Y_{M_1}} = 0$. Тогда оператор M_0^- будет правым обратным оператором $(M_0)_r^{-1}$ к оператору M_0 [10].

Обращение блочных невырожденных матриц. Предложенные формулы для обобщенного обращения операторных матриц могут быть применены для обобщенного обращения блочных матриц, а также для вычисления обратных матриц к блочным невырожденным матрицам.

Пусть A — $(n \times n)$-мерная невырожденная матрица. Разобьем матрицу A, например, на столбцевые блоки M_1 размерности $(n \times k),\ k < n,\ M_2$ размерности $(n \times (n-k))$:

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}.$$

В силу невырожденности матрицы A ее столбцы линейно независимы, поэтому матрицы-блоки M_1 и M_2 имеют полный ранг: $\operatorname{rank} M_1 = k,\ \operatorname{rank} M_2 = n - k$ и, как следствие,

$\mathcal{P}_{N(M_1)} = 0$ и $\mathcal{P}_{N(M_2)} = 0$. В этом случае для матриц M_1 и $\widehat{M_2}$ существуют обобщенно-обратные матрицы M_1^- и $\widehat{M_2}^-$, которые будут левыми обратными матрицами $(M_1)_l^{-1}$ и $(\widehat{M_2})_l^{-1}$ соответственно [10].

Тогда, применяя формулу (25), получаем

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (M_1)_l^{-1} - (M_1)_l^{-1} M_2 \widehat{M_2}^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \\ \\ \widehat{M_2}^- \mathcal{P}_{Y_{M_1}} \end{bmatrix}.$$

Аналогично, если невырожденная матрица A разбита на строчечные блоки L_1 и L_2 соответствующих размеров:

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix},$$

то в силу невырожденности матрицы A ее строки линейно независимы, поэтому $\mathcal{P}_{Y_{L_1}} = 0$ и $\mathcal{P}_{Y_{L_2}} = 0$. В этом случае для матриц L_1 и $\widetilde{L}_2$ существуют обобщенно-обратные матрицы, которые будут правыми обратными матрицами $(L_1)_r^{-1}$ и $(\widetilde{L}_2)_r^{-1}$ [10].

Тогда, применяя формулу (5), имеем

$$A^{-1} = \left[(L_1)_r^{-1} - \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- L_2 (L_1)_r^{-1} \qquad \mathcal{P}_{N(L_1)} \widetilde{L}_2^- \right].$$

Связь с формулами Фробениуса. В качестве примера применения полученных формул для обобщенного обращения операторных матриц рассмотрим обращение невырожденной блочной матрицы G, которая разбита на блоки

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

где A — $(k \times k)$-мерная невырожденная матрица, D — $((n-k) \times (n-k))$-мерная матрица, а B и C — прямоугольные матрицы соответствующих размеров.

Разобьем матрицу A на строчечные блоки

$$L_1 = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$G = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}.$$

Обратную матрицу будем искать в виде блочной матрицы

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то согласно теореме 4 обобщенно-обратная матрица к матрице L_1 имеет вид

$$L_1^- = \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

а

$$\mathcal{P}_{N(L_1)} = \begin{bmatrix} 0 & -A^{-1}B \\ 0 & I_k \end{bmatrix}$$

— проектор на подпространство $N(L_1)$. Тогда определим матрицу

$$\widetilde{L}_2 = L_2\mathcal{P}_{N(L_1)} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -A^{-1}B \\ 0 & I_k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H \end{bmatrix},$$

где $H = D - CA^{-1}B$ — дополнение по Шуру [11] матрицы A.

В [11] показано, что при условии $\det A \neq 0$ и $\det H \neq 0$, иначе матрица G была бы вырожденной. Применяя формулу (28), получаем $\widetilde{L}_2^- = \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1} \end{bmatrix}$. Тогда согласно теореме 1 имеем

$$Z_2 = \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -A^{-1}B \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^{-1}BH^{-1} \\ H^{-1} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления блока Z_1 находим

$$\mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- = Z_2 L_2 L_1^- =$$

$$= \begin{bmatrix} -A^{-1}BH^{-1} \\ H^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} \\ H^{-1}CA^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$Z_1 = L_1^- - \mathcal{P}_{N(L_1)}\widetilde{L}_2^- L_2 L_1^- =$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} \\ \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} \\ H^{-1}CA^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получена формула для построения обратной матрицы к блочной невырожденной матрице, которая совпадает с формулой Фробениуса [11, с. 60]

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{bmatrix}.$$

***Замечание* 6.** Применяя теоремы 1 – 4, можно получить формулы для обобщенного обращения вырожденных матриц произвольной размерности, которые разбиты произвольным образом на четыре блока.

Литература

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Нормально разрешимые краевые задачи. – Киев: Наук. думка, 2019. – 628 с.
2. *Boichuk A. A., Zhuravlev V. F., Pokutnyi A. A.* Normally solvable operator equations in a Banach space // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 2. – P. 179 – 192.
3. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – 2nd ed. – Berlin: De Gruyter, 2016. – 296 p.
4. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Zhuravlev V. F.* Linear boundary value problems for normally solvable operator equations in a Banach space // Different. Equat. – 2014. – **50**, № 3. – P. 1 – 11.
5. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Application of the ergodic theory to the investigation of boundary-value problems with periodic operator coefficients // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 3. – P. 329 – 339.
6. *Kozlova N. O., Feruk V. A.* Noetherian boundary-value problems for integral equations // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, № 3. – P. 266 – 275.
7. *Журавлев В. Ф., Фомин Н. П.* Слабовозмущенные краевые задачи для интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, № 4. – С. 488 – 501.
8. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. – 2007. – Вип. 13. – С. 78 – 116.
9. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
10. *Zhuravlev V. F.* Solvability criterion and representation of solutions of n-normal and d-normal linear operator equations in a Banach space // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 2. – P. 186 – 202.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Получено 14.11.18