

## ВДОСКОНАЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ „ХИЖАК-ЖЕРТВА”

*Пількевич І. А. д.т.н., професор,  
Котков В. І., к.т.н., доцент*

**Вступ.** Рішення сучасних екологічних проблем має не тільки важливе наукове, але і загальне значення для життя людства. Особливу роль набуває вивчення динаміки екологічних процесів, спрямоване на розробку методів прогнозування розвитку екологічних систем та їх оптимального управління в інтересах людства. При розробці методів моделювання і прогнозування в екології потрібно брати до уваги особливості моделювання в цій галузі. Тому в цій роботі запропонована вдосконалена модель „хижак-жертва”, яка базується на універсальній моделі динаміки популяцій.

**Аналіз останніх досліджень.** Протягом 2010-2013 років на кафедрі моніторингу НПС в рамках науко-дослідної роботи „Моделювання і прогнозування динаміки чисельності парнокопитних у мисливських господарствах радіоактивно забрудненої території Житомирської області” № ДР 0111U009694 була проведена перевірка адекватності та коректності універсальної моделі екологічної системи, яка розроблена доцентом кафедри комп’ютерних технологій і моделювання систем, кандидатом технічних наук, доцентом Ю. О. Тимоніним [1].

Оцінювання адекватності математичної моделі динаміки популяцій показало [2], що відносна похибка, з якою вона описує процес збільшення (зменшення) кількості особин у відповідних популяціях не перевищує 1,5%, а в середньому по ряду популяцій, що досліджувались, не перевищує 1,0%. Це дає право стверджувати, що універсальну модель екологічної системи можна застосовувати для моделювання і прогнозування динаміки чисельності популяцій тваринного світу.

**Мета, об’єкт та методика дослідження.** Недостатнє теоретичне обґрунтування закономірностей багаторічної і сезонної динаміки популяцій тваринного світу в мисливських господарствах України, відсутність методів короткострокового прогнозу розвитку мисливських тварин обумовили пріоритетність напрямку досліджень та актуальність обраної теми роботи.

**Метою роботи** є розробка методу математичного моделювання процесу розвитку тваринного світу з урахуванням хижацтва.

Об'єктом дослідження є процеси розвитку тваринного світу.

В роботі використовується методологія побудови універсальної моделі динаміки популяцій, яка базується на основних положеннях системології.

**Результати дослідження.** Розглянемо загальновідому модель взаємодії популяцій „хижак-жертва” [3]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axz, \\ \frac{dz}{dt} = (ca)xz - d_1z, \end{cases} \quad (1),$$

де  $x$  – щільність жертв;  $z$  – щільність хижака;  $r$  – питома швидкість зростання популяції при невеликому числі хижаків;  $a$  – ефективність хижака (питома швидкість, з якою хижак вбиває жертву);  $c$  – ефективність перетворення хижакими біомаси жертв;  $d_1$  – питома коефіцієнт смертності, з якою вимирають хижаки при відсутності жертви.

У першому наближенні ця модель діє. Однак, у реальній ситуації, ця модель не виправдовує себе, оскільки вона занадто спрощена в зв'язку з припущенням, що кількість жертв зростає експоненціально за відсутності хижаків, а це не відповідає дійсності. В цьому випадку ефективність хижаків можна замінити константою.

Для проведення подальшого аналізу моделі Лоткі-Вольтерра, зупинимось на додаткових елементах. Функціональну залежність типу „хижак-жертва” запишемо за допомогою лінійної функції  $f(x) = ax$ , де  $x$  – ресурси.

В динаміці популяцій таке наближення не найкраще, оскільки при збільшенні кількості жертв швидко настає момент, коли хижак може вбити жертву, але не з'їдає її. Це свідчення того, що існує деяке граничне значення, вище якого хижак не стане вбивати жертву в зв'язку з відсутністю необхідності в цьому. Функціональну залежність, що враховує цей факт, можна подати у вигляді [4]:

$$f(x) = \frac{cx}{d+x} \quad (2),$$

де  $d$  – коефіцієнт, що характеризує „швидкість”, з якою гіпербола наближається до значення « $c$ »;  $c$  – границя, до якої наближається гіпербола (2) при  $x \rightarrow \infty$ , тобто кількість жертв убитих за одиницю часу.

Графік залежності (2) показано на рис. 1.

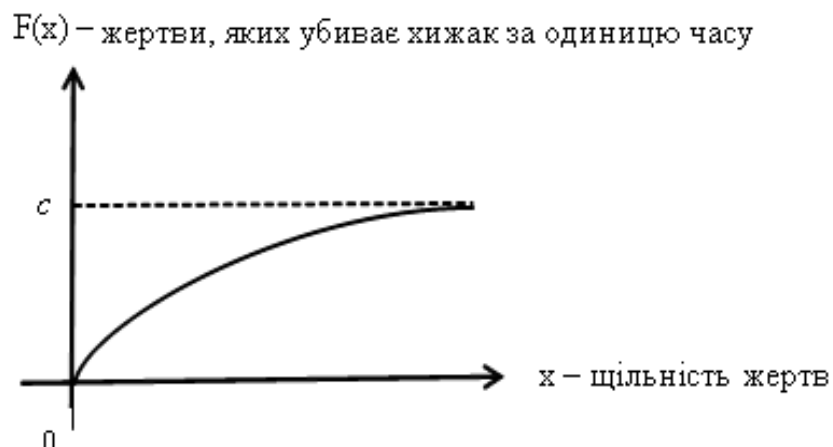


Рис. 1. Залежність кількості жертв, яких вбиває хижак за одиницю часу, від щільності жертв.

Повернемося до моделі Лоткі-Вольтерра. В результаті розв'язку рівнянь, якими представлена дана модель, отримаємо цикл коливань зі сталою амплітудою, чого в реальній ситуації не спостерігається.

Модель Лоткі-Вольтерра можна покращити заміною експоненціальної

залежності логістичною. В результаті цього отримаємо модель Розенцвайга-МакАртура, яка найбільше відповідає реальній ситуації взаємодії „хижак-жертва” [5]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left( 1 - \frac{x}{V} \right) - \frac{cxz}{x+d}; \\ \frac{dz}{dt} = \gamma \frac{cxz}{x+d} - d_1 z, \end{cases} \quad (3),$$

де  $V$  – ємність екологічної ніші.

Однак в моделі (3) не представлено факт впливу підвищеного радіаційного фону на динаміку популяцій, які розвиваються на радіоактивно забруднених територіях.

Розглянемо ще деякі типи моделей, в яких присутні фактори, що не враховані в моделі Лоткі-Вольтерра.

В моделі типу „хижак-жертва” не береться до уваги можливість неоднорідного існування популяції у займаній нею частині простору. Модель такого типу може виступати лише в ролі першого наближення до реальності. В реальних умовах проживання щільність популяції ніколи не буває однаковою в різних частинах ареалу. Крім того, навіть для однорідного простору існування завжди суттєві біологічні причини скупчення чи розрідження особин популяції. Наприклад, деякі інстинктивні мотиви поведінки особин такі як: скупчення їх в угруповання (у зграї та стада); сезонні зміни в природі (наприклад, для риб пора нересту, для птахів підростаюче потомство і т.д.).

У зв'язку з цим більш адекватний математичний опис популяцій повинен враховувати просторові фактори. Одна із відомих моделей, що враховує цей факт, має вигляд [6]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - cz)x + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}; \\ \frac{dz}{dt} = (-\beta + \gamma x)z + D_z \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}, \end{cases} \quad (4),$$

де  $t$  – час;  $\eta$  – просторова координата (для спрощення процес будемо вважати одномірним);  $x(\eta, t)$  і  $z(\eta, t)$  – відповідно щільність жертв та хижаків.  $a > 0$ ,  $c > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $D_x > 0$ ,  $D_z > 0$  – сталі величини, що характеризують внутрішні властивості популяцій.

Від рівнянь Лоткі-Вольтерра модель (4) відрізняється наявністю в правій частині членів „дифузійного” виду ( $D_x = D_z$  – коефіцієнти „дифузії”) і являє собою систему двох рівнянь параболічного типу відносно величин  $x$  і  $z$ . Походження цих складових пояснюється тим, що на швидкість зміни чисельності популяції впливає наявність „хаотичного” руху особин в просторі, що формує їхній потік із більш „заселених” в менш „заселені” території (він вважається пропорційним градієнту їхньої щільності).

Зміна чисельності популяцій в просторових моделях може суттєво відрізнятися від картини, яку дають точкові моделі.

В цілому, у розглянутих математичних моделях динаміки популяцій не враховані такі чинники: здатність популяцій до розселення; тенденція до захоплення нових місць проживання; дія захисних механізмів, що підвищують здатність особин популяцій до виживання; здатність витримувати несприятливі умови існування. На коливання чисельності динаміки популяцій впливає міграція (іміграція або еміграція) особин і не завжди є можливість знехтувати її показниками. Також чітко не визначено вплив таких факторів опору навколишнього середовища: дефіцит води; нестача придатних місць існування; несприятливі погодні умови та ін. Усі перераховані

чинники на фоні радіологічних факторів негативно позначаються на стані популяцій. В зв'язку з цим виникає необхідність вдосконалення існуючих математичних моделей динаміки популяцій.

Виходячи з вищевикладеного пропонується вдосконалити відому модель взаємодії „хижак-жертва” з урахуванням логістичного зростання шляхом введення узагальненої логістичної моделі динаміки популяцій, адекватність якої підтверджено [7]. В результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} (1 + a_1 x) \frac{dx}{dt} + a_0 x^2 - \varphi x = -\gamma z; \\ (1 + b_{1x}) \frac{dz}{dt} + b_0 z^2 - \psi z = \gamma x, \end{cases} \quad (5),$$

де  $\varphi$  і  $\psi$  – відповідно швидкість зростання популяцій жертви та хижака;  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  – параметри, що характеризують вплив стримуючих факторів на розвиток популяцій;  $\gamma$  – коефіцієнт взаємного впливу популяцій.

На даний час модель (5) знаходиться на етапі розрахунків робочих параметрів (ідентифікації) моделі, а також проведення оцінювання її адекватності.

**Висновки.** Для врахування вищевикладених факторів у відому модель взаємодії „хижак-жертва” доцільно ввести узагальнену логістичну модель динаміки популяцій. Подальшим кроком вдосконалення математичної моделі „хижак-жертва” є етапи, що пов'язані з розрахунком робочих параметрів (ідентифікації) моделі, а також оцінювання її адекватності.

#### *Джерела використаної інформації*

1. Тимонін, Ю. О. Універсальна модель систем: методологічний аспект [Текст] / Ю. О. Тимонін, Ю. Б. Бродський, І. Г. Грабар // Віс. ЖНАЕУ: наук.-теорет. зб. – 2009. – №1. – С. 358–366.
2. Пількевич, І. А. Математичне моделювання динаміки популяцій : монографія [Текст] / І. А. Пількевич. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 87 с.
3. Богобоящий, В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології : підручник [Текст] / В. В. Богобоящий, К. Р. Курбанов, П. Б. Палій, В. М. Шмандій. – К. : Центр навч. літ-ри, 2004. – 216 с.
4. Моделювання і прогнозування динаміки чисельності парнокопитних у мисливських господарствах радіоактивно забрудненої території Житомирської області : звіт про НДР (проміжний) / Житом. агроекологічний ун-т; наук. кер. І. А. Пількевич. – № ДР 0111U009694. – Житомир, 2013. – 102 с.
5. Rosenzweig, M. L., MacArthur, R. H. (1963). Graphical representation and stability conditions of predator–prey interactions. *American Naturalist* 97: 209–223.
6. Маєвський, О. В. Обґрунтування необхідності вдосконалення математичних моделей динаміки популяцій [Текст] / О. В. Маєвський // Збірник наукових праць Подільського державного аграрно-технічного університету. – Кам'янець-Подільський, 2013. – Спец. вип. до VIII науково-практичної конференції „Сучасні проблеми збалансованого природокористування”, 28-29 лист. 2013 р. – С. 21–26.
7. Пількевич, І. А. Оцінювання адекватності логістичних моделей динаміки популяцій копитних України [Текст] / І. А. Пількевич, О. В. Маєвський, В. І. Котков // Збірник наукових праць Подільського державного аграрно-технічного університету. – Кам'янець-Подільський, 2011. – Спец. вип. до VI науково-практичної конференції „Сучасні проблеми збалансованого природокористування”, 24-25 лист. 2011 р. – С. 35–39.