УДК 004.942.001.57

Молодецька К.В.[1]

[1]*Житомирський військовий інститут імені С.П. Корольова Національного авіаційного університету*

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ

У статті розглянуто особливості моделювання нестаціонарних фізичних процесів у складних динамічних системах на великих часових інтервалах із використанням алгебричних властивостей диференціальних спектрів.

Ключові слова: моделювання, фізичний процес, диференціальні перетворення, підвищення точності

Вступ

Сучасні технічні об'єкти (ТО) енергетики, транспорту, виробничих систем є складними динамічними системами управління (СУ) з розподіленими параметрами. Різноманітні фізичні процеси, що описують функціонування таких ТО, моделюють диференціальними рівняннями в частинних похідних за відповідних початкових і граничних умов [1–6]. Практика дослідження складних динамічних СУ визначає особливі вимоги до високої точності моделювання та обчислювальної швидкодії. Ці вимоги можуть бути виконані шляхом використання аналітичних та чисельно-аналітичних методів моделювання фізичних процесів. В даний час аналітичні і чисельно-аналітичні методи розв'язання крайових задач недостатньо розвинені і вимагають подальших досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій [2–4, 6] показав, що аналітичні і чисельно-аналітичні методи розв'язання крайових задач ґрунтуються на інтегральних і диференціальних перетвореннях математичних моделей фізичних процесів. Недолік цих методів полягає в залежності складності аналітичного опису фізичного процесу в області зображень від величини похибки моделювання фізичного процесу в області оригіналів. Зважаючи на все вищесказане, доцільним є застосування методу моделювання фізичних процесів у складних динамічних СУ на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів [7].

Постановка задачі

Мета статті полягає в моделюванні нестаціонарного фізичного процесу в складній динамічній СУ на великих часових інтервалах із використанням методу на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів та порівняння отриманих результатів із відомим методом стикування [4].

Застосування методу моделювання на основі алгебраїчних властивостей диференціальних спектрів

Розглянемо фізичні процеси складної динамічної СУ із розподіленими параметрами, задані функцією $u(t,x)$ двох незалежних змінних в області:

$$0 \le |x| \le H_x ,\ 0 \le t \le H_t , \qquad (1)$$

де H_x, H_t – задані додатні сталі.

Обмежимося класом фізичних процесів, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними в одній із форм:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f_1\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = f_2\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = f_3\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{4}$$

де f_1, f_2, f_3 – задані неперервні функції.

Початкові умови для рівнянь (3) і (4) задають у вигляді:

$$u(0,x) = U_0(x), \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Q(x), \tag{6}$$

де $U_0(x)$, $Q(x)$ – задані функції.

Граничні умови для всіх рівнянь (2)–(4) при моделюванні фізичних процесів у складних динамічних СУ задаються у вигляді:

$$u(t,x)\big|_{x\in\Gamma} = \alpha(t) \text{ – умови Діріхлє;} \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial N}\right|_{x\in\Gamma} = \beta(t) \text{ – умови Неймана;} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial N} + \gamma u(t,x)\Big|_{x\in\Gamma} = \mu(t) \text{ – змішані умови,} \tag{9}$$

де α, β, μ – задані неперервні функції, визначені на граничній поверхні Г;

γ – задана стала величина;

$\frac{\partial u}{\partial N}$ – похідна в точці поверхні *Г* в напрямку внутрішньої (чи зовнішньої) нормалі N до неї.

Застосуємо метод моделювання фізичних процесів на основі алгебричних властивостей на великих часових інтервалах [7] для розв’язання модельного прикладу у символьному вигляді, який має точний розв'язок, та виконаємо порівняння похибки моделювання із методом стикування [4].

Виконаємо моделювання нестаціонарного фізичного процесу $u(t,x)$ складної динамічної СУ в однорідному стрижні довжиною $l=1$, який описується хвильовим рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l = 1,\; t > 0, \tag{10}$$

при початкових:

$$u(0,x)=\frac{ch\,x}{sh1},\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=-\frac{ch\,x}{sh1}, \qquad (11)$$

і граничних умовах:

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u(t,l)}{\partial x}=e^{-t}. \qquad (12)$$

Відомий точний аналітичний розв'язок крайової задачі (10)–(12):

$$u(t,x)=\frac{1}{sh1}e^{-t}ch\,x. \qquad (13)$$

Покриємо відрізки аргументу t сітками з рівними кроками $2H_\nu$, де $\nu=0$, 1, 2…, $n-1$. Кожен з відрізків $[t_\nu,t_\nu+2H_\nu]$, $\nu=0$, 1, 2…, $n-1$ поділимо на дві рівні частини $[t_{1\nu},t_{1\nu}+H_{1\nu}]$, $[t_{\nu+1}-\bar{H}_\nu,t_{\nu+1}]$.

Запишемо дискрети прямого $U(q,x)$ і зворотного $\bar{U}(q,x)$ диференціальних спектрів у символьному вигляді, використовуючи властивості диференціальних перетворень [4]. Задамо початкові умови (5)–(6) протікання фізичного процесу як функції $a(x)$ та $b(x)$, тоді прямий диференціальний спектр фізичного процесу прийме вигляд:

$$U(0,x)=a(x),\ U(1,x)=Hb(x),\ U(2,x)=\frac{H^2}{2}\frac{d^2a(x)}{dx^2}. \qquad (14)$$

Нехай граничні умови (7)–(8) описуються відповідно деякими функціями $\varphi(x)$ та $\psi(x)$. Зворотний диференціальний спектр буде наступним:

$$\bar{U}(0,x)=\varphi(x),\ \bar{U}(1,x)=\bar{H}\psi(x),\ \bar{U}(2,x)=\frac{\bar{H}^2}{2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}. \qquad (15)$$

На наступному кроці складемо умови спряження диференціальних спектрів: прирівняємо між собою нульову і першу та першу і другу дискрети прямого $U(q,x)$ і зворотного $\bar{U}(q,x)$ диференціальних спектрів. Так як крок моделювання H використовується при побудові прямих диференціальних спектрів та означає зміну аргументів t та x функції $u(t,x)$ від нульового значення в сторону зростання їх абсолютних значень, а $\bar{H}$ застосовується для побудови зворотних диференціальних спектрів і визначає зміну аргументів функції в сторону зменшення їх абсолютних значень, вони є рівними за величиною і протилежними за напрямком. Отже, справедливою є рівність $\bar{H}=-H$. Особливістю моделювання фізичних процесів складних динамічних СУ на великих часових інтервалах є те, що для другого кроку $t\in[H_1,H_1+H_2]$ замість початкової умови (5) слід застосувати умову $u(t,x)\big|_{t=H_1+H_2}$ в кінці першого. Отже, умови спряження дають систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &a(x)+Hb(x)=\varphi(x)-H\psi(x),\\ &b(x)+H\frac{d^2a(x)}{dx^2}=\psi(x)-H\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}. \end{aligned} \qquad (16)$$

Методом виключення функції $\psi(x)$ із першого рівняння системи спряження (16) отримаємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}-\frac{1}{H^2}\varphi(x)-a(x)\left(\frac{2}{H}-1-\frac{1}{H^2}\right)=0,$$

загальний розв'язок якого визначає функцію $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=C_1e^{-\frac{1}{H}x}+C_2e^{\frac{1}{H}x}+\frac{2H-H^2-1}{H^2-1}a(x), \tag{17}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Функція $\psi(x)$ має вигляд:

$$\psi(x)=\frac{1}{H}\varphi(x)-\left(\frac{1}{H}-1\right)a(x). \tag{18}$$

Підстановка виразу (17) у (18) дає такий результат:

$$\psi(x)=\frac{C_1}{H}e^{-\frac{1}{H}x}+\frac{C_2}{H}e^{\frac{1}{H}x}+\left[\frac{2H-H^2-1}{H\left(H^2-1\right)}-\left(\frac{1}{H}-1\right)\right]a(x).$$

Виконаємо підстановку у вираз (17) граничної умови (12) модельного прикладу при $x=0$ та $x=1$ і $t=2H$, отримаємо систему рівнянь:

$$-\frac{C_1}{H}+\frac{C_2}{H}+\frac{2H-H^2-1}{H^2-1}\frac{da(x)}{dx}=0, \tag{19}$$

$$-\frac{C_1}{H}e^{-\frac{1}{H}}+\frac{C_2}{H}e^{\frac{1}{H}}+\frac{2H-H^2-1}{H^2-1}=e^{-2H}. \tag{20}$$

Якщо в похідну $\frac{da(x)}{dx}$ замість $a(x)$ підставити значення граничної умови (12), то цей множник буде рівним 1. Із системи (19)–(20) отримаємо:

$$C_1=\frac{e^{-2H}-\frac{2H-H^2-1}{H^2-1}}{2sh\frac{1}{H}}H=C_2. \tag{21}$$

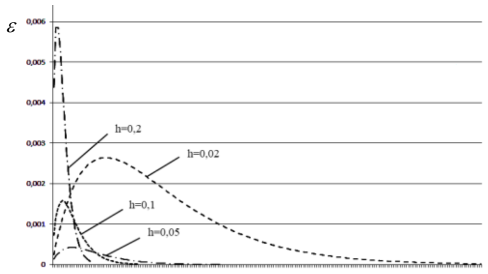
При малому кроці моделювання $H\to 0$ значення сталої $C_1\to 0$, тому на малому кроці моделювання можна прийняти $C_1=C_2$. Отже, функція $\varphi(x)$ визначається виразом:

$$\varphi(x)=\frac{2H-H^2-1}{H^2-1}a(x). \tag{22}$$

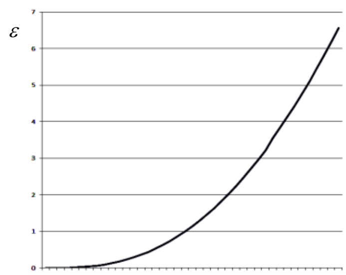
Введемо позначення $f(H)=\frac{2H-H^2-1}{H^2-1}$, тоді невідомі функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ можна записати у вигляді:

$$\varphi(x)=f(H)a(x)=u(t,x)\Big|_{t=2H},\quad \psi(x)=\left[f(H)-1+H\right]\frac{a(x)}{H}=\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Bigg|_{t=2H}.$$

На рис.1 (а) наведено залежність похибки моделювання ε для методу на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів для кроків моделювання $H=0,02;\ 0,05;\ 0,1;\ 0,2$ на часовому інтервалі $T\in[0;8]$. Похибка для методу стикування наведена на рис.1 (б).



а)



б)

Рис. 1. Графіки зміни величини похибки моделювання фізичного процесу: а) для методу на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів; б) для методу стикування

Отже, у порівнянні з методом стикування локальних рівнянь [4], метод моделювання фізичних процесів складних динамічних СУ на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів дозволяє уникнути накопичення похибки моделювання при значній кількості відрізків часового аргументу.

Висновки

Використання методу моделювання фізичних процесів на основі алгебричних властивостей диференціальних спектрів дозволяє підвищити точність та ефективності символьних математичних описів фізичних процесів складних динамічних СУ. У порівнянні з методом стикування даний метод дозволяє зменшити похибку моделювання більше ніж 2^q рази, де q – номер останньої врахованої дискрети диференціального спектру.

Література

1. *Поршнев С. В.* Вычислительная математика / С.В. Поршнев; – Санкт-Петербург: БХВ Петербург, 2004. – 320 с.
2. *Баранов В. Л.* Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач / В.Л. Баранов, С.В. Водоп'ян, Р.М. Костюченко // Вісник ЖДТУ. – 2005. – № 4 (35). – С. 42 – 48.
3. *Баранов В. Л.* Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач / В.Л. Баранов, С.В. Водоп'ян, Р.М. Костюченко // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – Вип. 3 (14). – К.: НАУ, 2005. – С. 25 – 30.
4. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные спектры и модели / Пухов Г. Е. – Киев : Наук. думка, 1990. – 184 с.
5. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г.Е. Пухов; – Киев: Наук. думка, 1986. – 158 с.
6. *Рвачев В. Л.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко; – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
7. *Молодецька К. В.* Підвищення точності моделювання фізичних процесів і полів на основі алгебраїчних властивостей диференціальних спектрів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. тех. наук : спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / К. В. Молодецька. – Київ, 2011. – 20 с.

Надійшла до редколегії

Рецензент: д.т.н., проф. Пількевич І.А.

Молодецкая К.В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

В статье рассмотрены особенности моделирования нестационарных физических процессов в сложных динамических системах на больших временных интервалах с использованием алгебраических свойств дифференциальных спектров.

Ключевые слова: моделирование, физический процесс, дифференциальные преобразования, повышение точности.

Molodetska K.V.

SIMULATION OF UNSTEADY PHYSICAL PROCESSES IN THE CONTROL SYSTEMS

In the article the features of modeling unsteady physical processes in complex dynamical systems on large time intervals using algebraic properties of differential spectra.

Keywords: modeling, physical process, differential conversion, improve the accuracy.