УДК 621.372.061

МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ ЗМІЩЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

В.Л. Баранов
Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій
К.В. Молодецька
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету
Д.В. Хаустов
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАНУ

Запропоновано метод моделювання нестаціонарних фізичних процесів на великих часових інтервалах. Метод ґрунтується на використанні системи зміщених диференціальних перетворень п о часовому аргументу.
Ключові слова: нестаціонарні фізичні процеси, зміщені диференціальні перетворення.

Постановка проблеми. Моделювання нестаціонарних фізичних процесів на великих часових інтервалах чисельними методами розв'язання крайових задач вимагає значного обсягу обчислень на ЕОМ [1-3]. Методи аналітичного і чисельно-аналітичного моделювання на ЕОМ зменшують обсяг обчислень лише у випадку моделювання нестаціонарних фізичних процесів на малих часових інтервалах. Складність аналітичного опису нестаціонарних процесів на великих часових інтервалах потребує розробки нових чисельно-аналітичних методів моделювання, які дозволять зменшити складність аналітичного опису фізичних процесів і обсяг обчислень на ЕОМ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1-6] показав, що аналітичні й чисельно-аналітичні методи моделювання нестаціонарних фізичних процесів ґрунтуються на інтегральних та диференціальних перетвореннях їх математичних моделей у вигляді рівнянь із частинними похідними з початковими і граничними умовами. У випадку лінійних математичних моделей нестаціонарних фізичних процесів застосовують методи інтегральних перетворень [6]. Аналітичне моделювання нелінійних фізичних процесів може бути виконано на основі використання диференціальних перетворень [4,5]. Математична модель нестаціонарного фізичного процесу в області диференціальних перетворень має вигляд диференціального спектра, кількість дискрет якого зростає пропорційно часовому інтервалу. Це пов'язано із тим, що похибка моделювання в області оригіналів залежить від кількості дискрет диференціального спектра. Бажана похибка моделювання нестаціонарного фізичного процесу на великому часову інтервалі може бути досягнута тільки у випадку врахування значної кількості дискрет диференціального спектра. У свою чергу, складність аналітичного опису дискрет диференціального спектра зростає із збільшенням номера дискрети диференціального спектра. Тому виникає проблема моделювання нестаціонарних фізичних процесів на великих часових інтервалах на основі диференціальних спектрів з обмеженою кількістю дискрет.

Мета статті полягає в розробці методу моделювання нестаціонарних фізичних процесів в області диференціальних зображень з обмеженою кількістю дискрет диференціального спектра, який дозволяє на великому часовому інтервалі досягнути заданого рівня похибки моделювання.

Обмежимося класом нестаціонарних фізичних процесів, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними у формі:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{1}$$

де f - задана неперервна функція.

Початкову умову для рівняння (1) задають у вигляді:

$$u(x,0)=U_0(x), \tag{2}$$

де $U_0(x)-$задана функція.

Граничні умови для рівняння (1) задаються у вигляді:

$$u(x,t)\big|_{x\in\Gamma}=\alpha(t)- \text{ умови Діріхлє;} \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\right|_{x\in\Gamma}=\beta(t)-\text{умови Неймана;} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}+\gamma u(x,t)\big|_{x\in\Gamma}=\mu(t)-\text{змішані умови,} \tag{5}$$

де α,β,μ - задані неперервні функції, визначені на граничній поверхні Г;
$\gamma-$задана стала величина;
$\frac{\partial u}{\partial N}-$похідна в точці поверхні Г в напрямку внутрішньої (чи зовнішньої) нормалі N до неї.

Розглянемо нестаціонарні фізичні процеси, які задані функцією u(x,t) двох незалежних змінних в області:

$$0\le|x|\le H_x,\quad 0\le t\le H, \tag{6}$$

де задані додатні сталі.

В межах великого часового інтервалу $[0,H]$ застосуємо зміщених диференціальних перетворень:

$$U_v(x,k)=\frac{h^k}{k!}\left[\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right]_{t=t_v},\ u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_v}{h}\right)^k U_v(x,k), \tag{7}$$

$$t_v=h(2v-1),\ v=1,2,...,n,$$

де $H_x,H-$ зміщені диференціальні зображення функції $u(x,t)$, які прийнято називати диференціальними спектрами, а їх значення при фіксованих значеннях цілочисельного аргументу $k=0,1,2,3,...,\infty-$ дискретами диференціальних спектрів;
t_v-фіксовані точки часового аргументу, в яких будується диференціальний спектр $U_v(x,k),\quad v=1,2,...,n;$
h - стала величина, яка розраховуються з умов досягнення заданого рівня похибки моделювання при врахуванні q дискрет диференціального спектра $U_v(x,k)$.

Вираз (7) зліва переводить нестаціонарний процес $u(x,k)$ в область диференціальних зображень. Обернений перехід з області зображень в область оригіналів описує вираз (7) справа.

Якщо врахувати дискрети диференціального спектра и,,(х,к) при значеннях цілочисельного аргументу $k=0,1,2,3,...,q-1,q$, то цей вираз набуває вигляду:

$$\bar{u}(x,t)=\sum_{k=0}^{q}\left(\frac{t-t_v}{h}\right)^k U_v(x,k), \tag{8}$$

де $\bar{u}(x,k)=u(x,k)+\varepsilon-$наближений опис фізичного процесу;
$\varepsilon-$похибка моделювання.

Вираз (8) має вигляд ряду Тейлора при врахуванні я членів, тому оцінка зверху похибки моделювання ε згідно з Лагранжем [7] задається виразом:

$$\varepsilon \le \frac{h^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{\substack{0\le x\le H_x\\ 0\le t\le H}} \left| \frac{\partial^{q+1} u(x,t)}{\partial t^{q+1}} \right| . \tag{9}$$

З виразу (9) отримуємо умову, згідно якої задається стала величина h;

$$h \le \sqrt[q+1]{\frac{\varepsilon (q+1)!}{\sup\limits_{\substack{0\le x\le H_x\\ 0\le t\le H}} u^{(q+1)}(x,t)}} . \tag{10}$$

де позначено

Переведемо диференціальне рівняння (1) в область зображень на основі системи зміщених диференціальних перетворень (7). Тоді отримуємо систему з n рекурентних виразів:

$$U_v(x,k+1) = \frac{h}{k+1} F_v\left[x, T_v(k), U_v(x,k), \frac{dU_v(x,k)}{dx}, \frac{d^2 U_v(x,k)}{dx^2} \right], \ v = 1,\, 2,\, \ldots,\, n , \tag{11}$$

де F_v – зображення функції f в точці t_v;

$T_v(k)$ – зміщене зображення часового аргументу t.

Рекурентні вирази (11) дають змогу знайти зміщені диференціальні спектри $U_v(x,k)$, послідовно надаючи цілочисельному аргументу значення $k = 0, 1, 2, 3, ..., q.$ Але початкові дискрети диференціального спектра невідомі, тому їх слід задавати у символьному вигляді як невідому функцію аргументу x :

$$U_v(x,0) = \varphi_v(x), \quad v = \overline{1,n}, \tag{12}$$

З початкових умов (12) в аналітичному вигляді згідно рекурентних виразів (11) розраховуються зміщені диференціальні спектри $U_v(x,k), \quad v = \overline{1,n},$ які описують в області зображень нестаціонарний фізичний процес на великому часовому інтервалі.

Застосовуючи вираз (8) при $t = t_v - h, \quad t = t_v + h$, початкову умову (2) і умови спряженості неперервної функції $u(x,t)$ отримаємо систему рівнянь вигляду:

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{q} (-1)^k U_1(x,k) = U(x,0), \\
\sum_{k=0}^{q} U_1(x,k) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k U_2(x,k), \\
\sum_{k=0}^{q} U_2(x,k) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k U_3(x,k), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_{k=0}^{q} U_{n-1}(x,k) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k U_n(x,k), \\
\sum_{k=0}^{q} U_n(x,k) = U(x,H).
\end{gathered} \tag{13}$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (13) відносно аргументу x дозволяє знайти невідомі функції $\phi_v(x), \quad v = \overline{1,n}.$ У випадку лінійної системи диференціальних рівнянь (13) загальний розв'язок визначається в аналітичному вигляді відомими методами [3].

У випадку нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь (13) її аналітичне розв'язання виконують одномірними диференціальними перетвореннями відносно аргументу x методами, які запропоновані академіком Г.Є. Пуховим [8,9].

На основі аналітичного розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь (13) отримуються невідомі функції $\phi_v(x,C)$, $v=\overline{1,n}$, де C - вектор констант інтегрування, кількість компонент якого дорівнює порядку системи (13). Компоненти $C_1, C_2, ..., C_m$ вектора C визначаються на основі граничних умов (3) - (5):

$$u(x,t)\Big|_{\substack{t=t_v \\ x\in\Gamma}} = \varphi_v(x,C)\Big|_{x\in\Gamma} = \alpha(t)\Big|_{t=t_v} \text{ – умови Діріхлє;}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\right|_{\substack{t=t_v \\ x\in\Gamma}} = \left.\frac{\partial \varphi_v(x,C)}{\partial x}\right|_{x\in\Gamma} = \beta(t)\Big|_{t=t_v} \text{ – умови Неймана;} \qquad (14)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\right|_{x\in\Gamma} + \gamma\varphi_v(x,C)\Big|_{x\in\Gamma} = \mu(t)\Big|_{t=t_v} \text{ – змішані умови,}$$

$$t_v = h(2v-1),\ v=\overline{1,n}.$$

Розв'язок системи рівнянь (14) визначає компоненти вектора C констант інтегрування.

На основі зміщених диференціальних спектрів $U_v(x,k)$, $v=\overline{1,n},$ та виразу (8) при $t=t_v+h$ розраховують нестаціонарний фізичний процес для значень часового аргументу $t_i=2h_v$, де $i=v=\overline{1,n}$ згідно виразу:

$$u(x,t)\Big|_{t_i=2hv} = \sum_{k=0}^{q} U_v(x,k). \qquad (15)$$

Відомо [10], що верхня межа похибки при застосуванні q дискрет зміщених

диференціальних спектрів оцінюється величиною $2^{-q}\varepsilon$, де $\varepsilon-$ оцінка зверху похибки моделювання основними одномірними диференціальними перетвореннями з кроком $2h$. Тому запропонований метод, який застосовує систему зміщених

диференціальних перетворень, зменшує оцінку верхньої межі похибки в 2^q раз у порівнянні із методом стикування локальних рівнянь Г.Є. Пухова [8] на основі диференціальних перетворень із кроком $2h$ по часовому аргументу.

Виконаємо моделювання запропонованим методом нестаціонарного процесу в однорідному стержні довжиною *l*, який описується рівнянням теплопровідності:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<l,\ 0<t\le H, \qquad (16)$$

де задана стала $H=2$, при початкових:

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l}, \qquad (17)$$

і граничних умовах:

$$u(x,0) = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0. \qquad (18)$$

Відомий точний аналітичний розв'язок крайової задачі (16) - (18):

$$u(x,t) = e^{-\frac{\pi^2}{4l^2}t}\sin\frac{\pi x}{2l}. \qquad (19)$$

Оберемо довжину стержня рівною:

$$I = \frac{\pi}{2}. \qquad (20)$$

Задамо верхню межу похибки моделювання рівною $\varepsilon = 0,02$. Моделювання виконаємо на обмеженій кількості дискрет зміщених диференціальних спектрів, яка враховує лише нульову і першу дискрети. У цьому випадку $q=1$. З виразу (10) при

$\varepsilon = 0,02$; $q = 1$ і $\sup u^{(q+1)}(x,t) = 1$ згідно умов (17), (20) маємо $h \le 0,2$. Переведемо диференціальне рівняння (16) в область зображень на основі зміщених диференціальних перетворень (7):

$$U_\nu(x,k+1) = \frac{h}{k+1}\frac{d^2U(x,k)}{dx^2}, \quad \nu = \overline{1,n}. \tag{21}$$

На заданому часовому інтервалі $H = 2$ маємо п'ять зміщених точок $t_v = h(2v-1)$ при $h = 0,2$, тобто $n = 5$. Невідомі початкові дискрети зміщених диференціальних спектрів задаємо у символьному вигляді (12) при $n = 5$. Перші дискрети зміщених диференціальних спектрів визначимо із виразу (21) при $k = 0$:

$$U_\nu(x,1) = h\ddot{\varphi}_\nu(x), \quad \nu = 1,2,\ldots,5, \tag{22}$$

де позначено $\ddot{\varphi}_v(x) = \dfrac{d^2\varphi_v(x)}{dx^2}$.

Система зміщених диференціальних спектрів (21), (22) має вигляд:

$$U_\nu(x,0) = \varphi_\nu(x);\ U_\nu(x,1) = h\ddot{\varphi}_\nu(x);\ \nu = 1,2,\ldots,5. \tag{23}$$

На основі зміщеного диференціального спектра (23) при $v = 1$ виконуємо обернений перехід з області зображень в область оригіналів згідно з виразом (8) при $t = 0,\quad t_v = h,$ і $q = 1$:

$$U(x,0) = \varphi_1(x) - h\ddot{\varphi}_1(x). \tag{24}$$

З виразів (17), (20), (24) маємо звичайне диференціальне рівняння відносно невідомої функції $\varphi 1(x)$:

$$\ddot{\varphi}_1(x) - \frac{1}{h}\varphi_1(x) = -\frac{1}{h}\sin x. \tag{25}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (25) має вигляд:

$$\varphi_1(x) = C_1 sh\sqrt{\frac{1}{h}}x + C_2 ch\sqrt{\frac{1}{h}}x + \frac{1}{1+h}\sin x, \tag{26}$$

де C_1, C_2 – константи інтегрування.

Вираз (26) при x = 0 і граничні умови (18) дозволяють знайти C_2:

$$u(0,t) = \varphi_1(0) = C_2 = 0. \tag{27}$$

Підстановка виразу (26) у граничні умови (18) при $x = I = \dfrac{\pi}{2}$ і $C_2 = 0$ дає рівняння:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=I} = C_1\sqrt{\frac{1}{h}}ch\sqrt{\frac{1}{h}}x\Big|_{x=I} + \frac{1}{1+h}\cos x\Big|_{x=I=\frac{\pi}{2}} = 0. \tag{28}$$

З рівняння (28) маємо $C_1 = 0$. З виразу (26) при $C_1, = C_2 = 0$ отримаємо невідому функцію у точці $t_1 = h$:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{1+h}\sin x. \tag{29}$$

Всі невідомі функції $\varphi_v(x), v = 1,2,...,5$ отримаємо із системи (13) після підстановки в неї зміщених диференціальних спектрів (23):

$$\begin{gathered}\varphi_1(x) - h\ddot{\varphi}_1(x) = \sin x,\\ \varphi_1(x) + h\ddot{\varphi}_1(x) = \varphi_2(x) - h\ddot{\varphi}_2(x),\\ \varphi_2(x) + h\ddot{\varphi}_2(x) = \varphi_3(x) - h\ddot{\varphi}_3(x),\\ \varphi_3(x) + h\ddot{\varphi}_3(x) = \varphi_4(x) - h\ddot{\varphi}_4(x),\\ \varphi_4(x) + h\ddot{\varphi}_4(x) = \varphi_5(x) - h\ddot{\varphi}_5(x),\\ \varphi_5(x) + h\ddot{\varphi}_5(x) = U(x,H).\end{gathered} \tag{30}$$

Підстановка (29) у друге рівняння системи (30) дає звичайне диференціальне рівняння для визначення невідомої функції $\varphi_2(x)$:

$$\ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{h}\varphi_2(x) = -\frac{1-h}{h(1+h)}\sin x\ . \qquad (31)$$

Диференціальне рівняння (31) відрізняється від (25) тільки правою частиною. Тому розв'язок диференціального рівняння (31), який задовольняє граничні умови (18), має вигляд:

$$\varphi_2(x) = \frac{1-h}{(1+h)^2}\sin x\ . \qquad (32)$$

Аналогічним чином із системи (30) отримаємо інші невідомі функції:

$$\varphi_\nu = \frac{(1-h)^{\nu-1}}{(1+h)^\nu}\sin x\ ,\ \ \nu = 1,2,\ldots,5\ . \qquad (33)$$

Підстановка (23), (33) у вираз (15) дає рішення крайової задачі (16) - (18) для значень часового аргументу $t_i = 2hi$ у вигляді:

$$u(x, t_i = 2hi) = \left(\frac{1-h}{1+h}\right)^i \sin x\ ,\ \ i = 1,2,\ldots,5\ . \qquad (34)$$

Рівняння теплопровідності (16) вирішувалося академіком Г.Є. Пуховим на основі двомірних диференціальних перетворень [9]:

$$u(x,t) = \sum_{p+k=s=0}^{s=5}\left(\frac{x}{l}\right)^p\left(\frac{t}{H}\right)^k U(p,k) = x - xt - \frac{x^3}{3!} + x\frac{t^3}{2!} + \\ + \frac{x^2 t}{3!} - \frac{xt^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3t^3}{3!2!} + \frac{xt^4}{4!}\ , \qquad (35)$$

де $U(p,k)$ – двомірне диференціальне зображення функції $u(x,t)$.

Обчислювальна складність виразу (35) значно більша ніж виразу (34). Крім цього, похибка моделювання рішення крайової задачі у точці х = 1, $t = H = 2$ на основі двомірних диференціальних перетворень (35) у двадцять разів більша ніж похибка моделювання запропонованим методом при $i = 5,\ \ h = 0,2$ на основі виразу (34), яка дорівнює $\varepsilon = 0,003$ у порівнянні з точним рішенням (19), (20).

Висновки. Запропоновано метод моделювання нестаціонарних фізичних процесів на великих часових інтервалах, який дозволяє знизити обчислювальну складність і похибку моделювання у порівнянні з методом моделювання на основі двомірних диференціальних перетворень. У порівнянні із методом стикування локальних рівнянь на основі одномірних диференціальних перетворень Г.Є. Пухова

запропонований метод зменшує оцінку верхньої межі похибки в 2^q раз, де q – кількість врахованих дискрет зміщених диференціальних спектрів.

Література

1. *Бахвалов* Н.С. Численные методы / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. - М.: БИНОМ, 2003.-632 с.

2. *Мэтьюз* Д.Г. Численные методы. Использование МАТІ_АВ / Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. - М.: "Вильяме", 2001.-720 с.

3. *Поршнев* СВ. Вычислительная математика / Поршнев СВ. - Санкт - Петербург: БХВ -Петербург, 2004. - 320 с.

4. *Баранов* В.Л. Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач / Баранов В П., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М. // Вісник ЖДТУ. - 2005.-№4(35).-С. 42-48.

5. *Баранов* В.Л. Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач / Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М. //

Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. пр. - Вип. 3(14). - К.: НАУ, 2005. - С. 25 - ЗО.

6. *Рвачев* В.Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / Рвачев В.Л., Слесаренко А.П. - Киев: Наукова думка, 1976. - 288 с.
7. *Трухаев* Р.И. Методы инфлюентного анализа высоких порядков / Р.И. Трухаев.- Ленинград: Наука, 1987.-257с.
8. *Пухов* Г.Е. Дифференциальные спектры и модели / Пухов Г.Е. - Киев: Наук. Думка, 1990. - 184 с.
9. *Пухов* Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Пухов Г.Е. - Киев: Наук, думка, 1986. - 158 с.
10. *Баранов* В.Л. Порівняння методів моделювання динамічних процесів основними та зміщеними диференціальними перетвореннями / Баранов В.Л., Баранов Г.Л., Фролова О.Г. // Проблеми інформатизації та управління: 36. наук. пр. - Вип. 10. - К:НАУ, 2004. - С. 72-77.

УДК 621.372.061

Баранов В.Л., Молодецкая Е.В., Хаустов Д.В. Метод моделирования нестационарных физических процессов на основе системы смещенных дифференциальных преобразований

Предложен метод моделирования нестационарных физических процессов на больших временных интервалах. Метод основан на использовании системы смещенных дифференциальных преобразований по временному аргументу.

UDC 621.372.061

Baranov V., Molodetska K., Khaustov D. Method of modeling non-stationary physical processes on the basis of skew differential transformations

The method of modeling non-stationary physical processes on long-term intervals. The method is based on the use of differential transformations according to time aspect.

Key words: non-stationary physical processes, long-term intervals, skew differential transformations.

Рецензент: д. т.н., професор Хорош ко В. О.
Надійшла 28.01.2010 р.