УДК 621.372.061

ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ І ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ ПРЯМИХ І ЗВОРОТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПЕКТРІВ ІЗ ЗНАЧНОЮ КІЛЬКІСТЮ ДИСКРЕТ

В.Л. Баранов
Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій
Р.М. Костюченко, К.В. Молодецька
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету

Розглянуто особливості моделювання фізичних полів і процесів на системі прямих і зворотних диференціальних спектрів із значною кількістю дискрет. Використання системи диференціальних спектрів, що описують фізичні поля і процеси в області диференціальних перетворень, дозволяє зменшити похибку моделювання в області оригіналів, але потребує вирішення некоректної задачі. Наведено приклад моделювання.
Ключові слова: моделювання фізичних полів, диференціальні спектри, похибка моделювання.

Постановка проблеми. Моделювання фізичних процесів і полів пов'язане з розв'язанням крайових задач, що потребують виконання значного об'єму обчислень на ЕОМ [1-3]. У випадку використання математичних моделей фізичних процесів і полів з метою управління об'єктами з розподіленими параметрами виникає необхідність моделювання в реальному часі, яке може бути виконано шляхом зниження об'єму обчислень методами аналітичного і чисельно-аналітичного моделювання на ЕОМ. В даний час аналітичні і чисельно-аналітичні методи розв'язання нелінійних крайових задач недостатньо розвинені і вимагають подальших досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1-9] показав, що аналітичні і чисельно-аналітичні методи розв'язання крайових задач ґрунтуються на інтегральних і диференціальних перетвореннях математичних моделей фізичних процесів і полів. Застосування різних методів інтегральних перетворень обмежується в основному дослідженням лінійних математичних моделей [9]. Моделювання нелінійних фізичних процесів може бути виконано в аналітичному або чисельно-аналітичному вигляді на основі використання одномірних диференціальних перетворень [4-8]. Недолік цих методів полягає в залежності складності аналітичного опису фізичного процесу в області зображень від похибки моделювання фізичного процесу в області оригіналів. Математична модель фізичного процесу в області диференціальних перетворень має вигляд диференціального спектру, від кількості дискрет якого безпосередньо залежить похибка моделювання фізичного процесу в області оригіналів [4-8]. Складність аналітичного опису дискрет диференціального спектру зростає із збільшенням номера дискрети. У випадку значної кількості дискрет диференціального спектра виникає додаткова проблема вирішення некоректної задачі. Це пов'язано із обмеженою кількістю початкових і граничних умов, яка менше, ніж кількість невідомих параметрів опису фізичного поля або процесу.

Мета статті полягає в розробці методу розв'язання некоректної задачі при моделюванні процесів і полів на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів із значною кількістю дискрет.

Розглянемо фізичні процеси, які моделюються функцією $u(x,t)$ двох незалежних змінних в області:

$0 \le |x| \le H_x$, $0 \le t \le H_t$, де H_x, H_t – задані додатні сталі. (1)

Фізичні поля описуються функцією $u(x_1, x_2)$ в області, що визначена обмеженнями:

$0 \le |x_1| \le H_1$, $0 \le |x_2| \le H_2$, де H_1, H_2 – задані додатні сталі. (2)

Обмежимося класом фізичних процесів, математична модель яких описується диференціальними рівняннями з частинними похідними в одній із форм:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f_1\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f_2\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f_3\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad (5)$$

де f_1, f_2, f_3 – задані неперервні функції.

До вигляду (3) – (5) зводяться лінійні і квазілійні рівняння з частинними похідними. Рівняння (3), (4) описують хвильові процеси в середовищах різної фізичної природи. Прикладом рівняння (5) може бути рівняння теплопровідності.

Математичні моделі фізичних полів $u(x_1, x_2)$ розглянемо у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = \varphi_1\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = \varphi_2\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right), \quad (7)$$

де φ_1, φ_2 – задані неперервні функції.

Рівняння Лапласа і Пуассона можуть бути представлені в одній із форм (6) або (7).

Математична модель фізичних процесів крім опису в одній із форм (3) – (7) містить початкові і граничні умови, які дозволяють виділити серед множини розв'язків рівнянь з частинними похідними єдиний розв'язок, що відповідає математичному опису фізичного процесу.

Початкові умови для рівнянь (4) і (5) задають у вигляді:

$$u(x,0) = U_0(x), \quad (8)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Q(x), \quad (9)$$

де $U_0(x)$, $Q(x)$ - задані функції.

Граничні умови для всіх рівнянь (3) – (7) при моделюванні фізичних процесів і полів здаються у вигляді:

$u(x,t)\big|_{x\in\Gamma} = \alpha_1(t)$, $u(x_1,x_2)\big|_{\bar{x}\in\Gamma} = \alpha_2(x_1,x_2)$ - умови Діріхлє; (10)

$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\right|_{x\in\Gamma} = \beta_1(t)$, $\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial N}\right|_{\bar{x}\in\Gamma} = \beta_2(x_1,x_2)$ - умови Неймана; (11)

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial N} + \gamma_1 u(x,t)\big|_{x\in\Gamma} = \mu_1(t)$, $\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial N} + \gamma_2 u(x_1,x_2)\big|_{\bar{x}\in\Gamma} = \mu_2(x_1,x_2)$ - змішані умови, (12)

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$ - задані неперервні функції, визначені на граничній поверхні Г;

γ_1, γ_2 - задані сталі величини;

$\frac{\partial u}{\partial N}$ - означає похідну, взяту в точці поверхні Г в напрямку внутрішньої (чи зовнішньої) нормалі N до неї;
$\bar{x} = (x_1, x_2)$.

Метод моделювання фізичних процесів і полів, який описується математичними моделями (1) – (12), побудуємо на основі одномірних диференціальних перетворень [5].

У випадку моделювання фізичних полів використаємо систему одномірних зміщених диференціальних перетворень [4] виду:

$$U_1(k_1, x_2) = \frac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left[\frac{\partial^{k_1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right]_{x_1 = x_{1\nu}}, \quad u(x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1 - x_{1\nu}}{H_1}\right)^{k_1} U_1(k_1, x_2), \tag{13}$$

$$U_2(x_1, k_2) = \frac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left[\frac{\partial^{k_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right]_{x_2 = x_{2\nu}},$$
$$u(x_1, x_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2 - x_{2\nu}}{H_2}\right)^{k_2} U_2(x_1, k_2), \tag{14}$$

де $x_{1\nu}, x_{2\nu}$ - координати фіксованої точки в межах області (2);
k_1, k_2 - цілочисельні аргументи, які приймають значення 0, 1, 2, 3, $\ldots, \infty$;
$U_1(k_1, x_2)$, $U_2(x_1, k_2)$ - диференціальні зображення функції $u(x_1, x_2)$, які прийнято називати диференціальними спектрами, а їх значення при фіксованих значеннях цілочисельних аргументів – дискретами диференціальних спектрів;
H_1 і H_2 - довільні додатні сталі.

Моделювання фізичних процесів можна виконати тією ж системою диференціальних перетворень (13) і (14), якщо прийняти $t = x_1$, $x = x_2$. Тому надалі будемо розглядати випадок моделювання фізичних полів.

В роботах [4-6] розглядався випадок використання системи диференціальних перетворень (13) чи (14) в одній фіксованій точці ($x_{1\nu}$, $x_{2\nu}$) області (2). Зараз розглянемо випадок використання системи диференціальних перетворень (13), (14) в двох фіксованих точках $(x_{1\nu}, x_{2\nu})$ при $\nu = 1,2$. Одну фіксовану точку (x_{11}, x_{21}) оберемо на лівій границі області (2) при $x_{11} = x_{21} = 0$, а другу фіксовану точку (x_{12}, x_{22}) обираємо на правій границі області (2) при $x_{12} = H_1$, $x_{22} = H_2$.

Отже, моделювання фізичного поля $u(x_1, x_2)$ виконаємо на основі двох систем диференціальних перетворень:

$$\begin{cases} U_1(k_1, x_2) = \frac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left[\frac{\partial^{k_1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right]_{x_1 = 0}, \quad u(x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{H_1}\right)^{k_1} U_1(k_1, x_2); & (15) \\ U_2(x_1, k_2) = \frac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left[\frac{\partial^{k_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right]_{x_2 = 0}, \quad u(x_1, x_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2} U_2(x_1, k_2), & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{U}_1(k_1, x_2) = \dfrac{\overline{H}_1^{k_1}}{k_1!}\left[\dfrac{\partial^{k_1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right]_{x_1 = H_1}, \quad u(x_1, x_2) = \sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\left(\dfrac{x_1 - \overline{H}_1}{\overline{H}_1}\right)^{k_1} \overline{U}_1(k_1, x_2); & (17) \\ \overline{U}_2(x_1, k_2) = \dfrac{\overline{H}_2^{k_2}}{k_2!}\left[\dfrac{\partial^{k_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right]_{x_2 = H_2}, \quad u(x_1, x_2) = \sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\left(\dfrac{x_2 - \overline{H}_2}{\overline{H}_2}\right)^{k_2} \overline{U}_2(x_1, k_2), & (18) \end{cases}$$

де рискою зверху позначено диференціальний спектр на правій границі області (2).

Вирази (15) - (18) зліва відповідають переведенню поля $u(x_1, x_2)$, яке моделюється, в область диференціальних зображень. Обернений перехід з області зображень в область оригіналів описують вирази (15) - (18) справа.

Моделювання полягає в переведенні диференціальних рівнянь з частинними похідними (6) і (7) в область зображень на основі диференціальних перетворень (15)-(18):

$$U_1(k_1 + 2, x_2) = \frac{H_1^2}{(k_1 + 1)(k_1 + 2)} \Phi_1\left[k_1, x_2, U_1(k_1, x_2), \frac{k_1 + 1}{H_1} U_1(k_1 + 1, x_2), \right.$$
$$\left. \frac{dU_1(k_1, x_2)}{dx_2}, \frac{k_1 + 1}{H_1}\frac{dU_1(k_1 + 1, x_2)}{dx_2}, \frac{d^2 U_1(k_1, x_2)}{dx_2^2}\right], \tag{19}$$

$$U_2(x_1, k_2 + 2) = \frac{H_2^2}{(k_2 + 1)(k_2 + 2)} \Phi_2\left[x_1, k_2, U_2(x_1, k_2), \frac{dU_2(x_1, k_2)}{dx_1}, \frac{k_2 + 1}{H_2} U_2(x_1, k_2 + 1), \right.$$
$$\left. \frac{k_2 + 1}{H_2}\frac{dU_2(x_1, k_2 + 1)}{dx_1}, \frac{d^2 U_2(x_1, k_2)}{d^2 x_1}\right], \tag{20}$$

$$\overline{U}_1(k_1 + 2, x_2) = \frac{\overline{H}_1^2}{(k_1 + 1)(k_1 + 2)} \overline{\Phi}_1\left[k_1, x_2, \overline{U}_1(k_1, x_2), \frac{k_1 + 1}{\overline{H}_1} \overline{U}_1(k_1 + 1, x_2), \right.$$
$$\left. \frac{d\overline{U}_1(k_1, x_2)}{dx_2}, \frac{k_1 + 1}{\overline{H}_1}\frac{d\overline{U}_1(k_1 + 1, x_2)}{dx_2}, \frac{d^2 \overline{U}_1(k_1, x_2)}{dx_2^2}\right], \tag{21}$$

$$\overline{U}_2(x_1, k_2 + 2) = \frac{\overline{H}_2^2}{(k_2 + 1)(k_2 + 2)} \overline{\Phi}_2\left[x_1, k_2, \overline{U}_2(x_1, k_2), \frac{d\overline{U}_2(x_1, k_2)}{dx_1}, \frac{k_2 + 1}{\overline{H}_2} \overline{U}_2(x_1, k_2 + 1), \right.$$
$$\left. \frac{k_2 + 1}{H_2}\frac{d\overline{U}_2(x_1, k_2 + 1)}{dx_1}, \frac{d^2 \overline{U}_2(x_1, k_2)}{d^2 x_1}\right], \tag{22}$$

де Φ_1 і $\overline{\Phi}_1$ - зображення функції φ_1 на основі диференціальних перетворень (15) і (17) відповідно; Φ_2 і $\overline{\Phi}_2$ - зображення функції φ_2 в області диференціальних перетворень (16) і (18) відповідно.

Перевага диференціальних перетворень (15)-(18) полягає в переведенні диференціальних рівнянь з частинними похідними в рекурентні вирази (19)-(22), які дають змогу знайти дискрети диференціальних спектрів $U_1(k_1, x_2)$, $U_2(x_1, k_2)$, $\overline{U}_1(k_1, x_2)$, $\overline{U}_2(x_1, k_2)$, послідовно надаючи цілочисельні значення 0, 1, 2, 3, … аргументам k_1 і k_2. Початкові дискрети диференціальних спектрів, що необхідні для реалізації рекурентних обчислень, знайдемо із граничних умов (10)-(12) і основних властивостей диференціальних перетворень [4-8]:

$$U_1(0,x_2)=u(0,x_1),\ U_2(x_1,0)=u(x_1,0),\ U_1(1,x_2)=H_1\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0},\ U_2(x_1,1)=H_2\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0},$$
$$\overline{U}_1(0,x_2)=u(H_1,x_2),\overline{U}_2(x_1,0)=u(x_1,H_2),\overline{U}_1(1,x_2)=\overline{H}_1\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Big|_{x_1=H_1},\overline{U}_2(x_1,1)=\overline{H}_2\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=H_2}. \qquad (23)$$

Якщо частина граничних умов у виразі (23) невідома, то їх слід задати у символьному вигляді як невідому функцію. Математичний опис фізичного поля в області зображень знаходимо шляхом рекурентного обчислення дискрет диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$ за виразами (19)-(22) на основі початкових дискрет (23), послідовно надаючи цілочисельним аргументам k_1 і k_2 значення 0, 1, 2, 3, … . Моделювання фізичного поля $u(x_1,x_2)$ вимагає обчислення однієї пари диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ чи $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$. Вибір тієї чи іншої пари диференціальних спектрів здійснюють із умови отримання ненульових значень дискрет диференціальних спектрів, так як тільки в цьому випадку можливо побудувати функцію $u(x_1,x_2)$ на основі обернених диференціальних перетворень (15)-(18) і дискрет диференціальних спектрів. В інших випадках вибір однієї із пар диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ чи $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$ довільний. Надалі будемо називати диференціальні спектри $U_1(k_1,x_2)$, $U_2(x_1,k_2)$ прямими, а диференціальні спектри $\overline{U}_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$ - зворотними. Обґрунтування такої термінології міститься в правих виразах (15)-(18). Обернені диференціальні перетворення (15), (16) описують фізичне поле $u(x_1,x_2)$ в області (2) при зміні аргументів x_1 та x_2 від нульового значення в сторону зростання їх абсолютних значень. З іншого боку, обернені диференціальні перетворення (17), (18) описують фізичне поле $u(x_1,x_2)$ в області (2) від його правої границі $x_1=H_1$, $x_2=H_2$ в сторону зменшення абсолютних значень аргументів x_1 та x_2. Невідомі дискрети диференціальних спектрів знайдемо шляхом спряження прямих і зворотних диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$ і $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ чи $U_2(x_1,k_2)$ і $\overline{U}_2(x_1,k_2)$ на основі умов спряження в точці спряження $x_{1c}=\frac{H_1}{2}=\frac{\overline{H}_1}{2}$, $x_{2c}=\frac{H_2}{2}=\frac{\overline{H}_2}{2}$:

$$u(x_{1c},x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_{1c}}{H_1}\right)^{k_1}U_1(k_1,x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_{1c}-\overline{H}_1}{\overline{H}_1}\right)^{k_1}\overline{U}_1(k_1,x_2), \qquad (24)$$

$$u(x_1,x_{2c})=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_{2c}}{H_2}\right)^{k_2}U_2(x_1,k_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_{2c}-\overline{H}_2}{\overline{H}_2}\right)^{k_2}\overline{U}_2(x_1,k_2), \qquad (25)$$

Крім умов спряження (24), (25) необхідно виконати умови спряження по похідним:

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Big|_{x_1=x_{1c}}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{H_1}\right)^{k_1}U_1(k_1,x_2)\right]_{x_1=x_{1c}}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1-\overline{H}_1}{\overline{H}_1}\right)^{k_1}\overline{U}_1(k_1,x_2)\right]_{x_1=x_{1c}}, \qquad (26)$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=x_{2c}}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2}U_2(x_1,k_2)\right]_{x_2=x_{2c}}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2-\overline{H}_2}{\overline{H}_2}\right)^{k_2}\overline{U}_2(x_1,k_2)\right]_{x_2=x_{2c}} \qquad (27)$$

Після диференціювання виразів (26), (27) і підстановки в них координат точки спряження $x_1=x_{1c}=\frac{H_1}{2}=\frac{\overline{H}_1}{2}$, $x_2=x_{2c}=\frac{H_2}{2}=\frac{\overline{H}_2}{2}$ отримаємо:

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_{1c}}{H_1}\right)^{k_1}(k_1+1)U_1(k_1+1,x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_{1c}-\overline{H}_1}{\overline{H}_1}\right)^{k_1}(k_1+1)\overline{U}_1(k_1+1,x_2), \qquad (28)$$

$$\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_{2c}}{H_2}\right)^{k_2}(k_2+1)U_2(x_1,k_2+1)=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_{2c}-\overline{H}_2}{\overline{H}_2}\right)^{k_2}(k_2+1)\overline{U}_2(x_1,k_2+1). \qquad (29)$$

Якщо підставити дискрети диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ і $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$, визначені на основі рекурентних виразів (19)-(22), то умови спряження (24), (25) і (28), (29) дають систему звичайних диференціальних рівнянь, розв’язання якої дозволяє знайти невідомі дискрети диференціальних спектрів.

Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь (24), (28) чи (25), (29) виконується будь яким відомим методом [7-9]. Якщо система звичайних диференціальних рівнянь (24), (28) чи (25), (29) нелінійна, то для її розв'язання доцільно використати одномірні диференціальні перетворення, запропоновані академіком Г.Є. Пуховим [7,8]. Рівняння спряження (24)-(29) стійкі до помилок, що виникають у випадку врахування обмеження кількості дискрет диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ чи $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$. Як показано в [10] помилки в лівій і правій частинах рівнянь (24)-(29) взаємно компенсуються, а верхня межа похибки оцінюється величиною $2^{-q}\varepsilon$, де q – номер останніх врахованих дискрет прямого і зворотного диференціальних спектрів, а ε - помилка, викликана врахуванням скінченного числа членів ряду Тейлора в диференціальних перетвореннях (15)-(18). Відомо, що помилка ε може бути оцінена наближено по Коші і точно за формулами Лагранжа чи Ейлера-Лагранжа [11]. Як наслідок, запропонований метод зменшує похибку розв'язку більш ніж в 2^q раз у порівнянні із методом, який ґрунтується тільки на одному диференціальному спектрі прямому чи зворотному [10].

З метою значного зниження похибки моделювання необхідно використовувати велику кількість дискрет прямого і зворотного диференціальних спектрів. Однак, в цьому випадку зростає порядок системи диференціальних рівнянь (24), (28) і (25), (29). Інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь (24), (28) і (25), (29) дає кількість невідомих констант інтегрування рівне порядку системи рівнянь.

Невідомі константи інтегрування зазвичай знаходять наступним чином. Виконують обернений перехід із області зображень в область оригіналів згідно виразів зліва (15)-(18) і підставляють отримані оригінали в початкові (8), (9) і граничні умови (10)-(12), які дають систему рівнянь для знаходження невідомих констант інтегрування.

Однак кількість початкових і граничних умов обмежена постановкою крайової задачі, а кількість невідомих констант інтегрування росте пропорційно розмірності систем звичайних диференціальних рівнянь (24), (28) і (25), (29) та може перевищувати кількість рівнянь в системі, яка формується на основі початкових (8), (9) і граничних (10)-(12) умов. Це має місце у випадках, коли для моделювання фізичних полів і процесів використовується велика кількість дискрет прямого і зворотного диференціального спектра з метою істотного зниження похибки моделювання.

В цьому випадку виникає некоректна задача розв’язання системи рівнянь, кількість яких менша числа невідомих констант інтегрування. Використання відомого методу Тихонова [12] до розв’язання цієї некоректної задачі зводить її до розв'язання оптимізаційної задачі, яка потребує більшого об’єму обчислень.

З метою розв’язання цієї проблеми в роботі пропонується метод регуляризації некоректних задач, оснований на методі балансу диференціальних спектрів [7,8].

Згідно цього методу початкові (8), (9) і граничні (10)-(12) умови переводяться в область зображень по тій змінній, яка не використовується для фіксації початкової чи граничної умови. Отримана система рівнянь розширюється до кількості рівнянь, рівної кількості невідомих шляхом присвоєння аргументу k_1 чи k_2 цілочисельних значень 0, 1, 2, 3 … Обґрунтуванням цього способу регуляризації некоректної задачі є метод балансу диференціальних спектрів [7,8], згідно із яким рівності двох функцій в області оригіналів відповідає рівність однойменних дискрет їх диференціальних спектрів при фіксованих значеннях цілочисельного аргументу 0, 1, 2, 3 … В деяких часткових випадках рівність однойменних дискрет диференціальних спектрів двох функцій дає тотожність $0 \equiv 0$. Ця обставина не є перешкодою для розширення системи рівнянь до розмірності, що вимагається, так як цілочисельні аргументи k_1 і k_2 змінюються від 0 до ∞.

Після розширення системи рівнянь до необхідної кількості, знаходяться всі невідомі константи інтегрування як розв'язок цієї системи і підставляються в дискрети прямого і зворотного диференціальних спектрів. Потім, на їх основі, виконуються обернені перетворення по правим частинам виразів (15)-(18), які дають наближені аналітичні описи фізичних процесів чи полів.

Запропонований метод моделювання фізичних процесів і полів на основі прямих і обернених диференціальних спектрів у випадку виникнення некоректної задачі розглянемо на наступному прикладі. Виконаємо моделювання нестаціонарного процесу в однорідному стержні довжиною $l = 1$, який описується хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l = 1, \; t > 0 \tag{30}$$

при початкових

$$u(0,x) = \frac{ch\,x}{sh1}, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = -\frac{ch\,x}{sh1} \tag{31}$$

і граничних умовах

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(t,l)}{\partial x} = e^{-t}. \tag{32}$$

Відомий точний аналітичний розв'язок крайової задачі (30)-(32):

$$u(t,x) = \frac{1}{sh1} e^{-t} ch\,x. \tag{33}$$

Перейдемо до нових змінних $x_1 = t$, $x_2 = x$ і переведемо рівняння (30) в область зображень на основі диференціальних перетворень (16) і (18). Це дає змогу записати рекурентні вирази (20) і (22) у вигляді:

$$U(x_1, k+2) = \frac{H^2}{(k+1)(k+2)} \frac{d^2 U(x,k)}{dx_1^2}, \tag{34}$$

$$\overline{U}(x_1, k+2) = \frac{\overline{H}^2}{(k+1)(k+2)} \frac{d^2 \overline{U}(x,k)}{dx_1^2} \tag{35}$$

На основі співвідношень (23) і граничних умов (32) знайдемо початкові дискрети прямого і зворотного диференціального спектрів:

$$U(x_1, 0) = \varphi(x_1), \quad U(x_1, 1) = 0 \tag{36}$$

$$\overline{U}(x_1, 0) = \psi(x_1), \quad \overline{U}(x_1, 1) = \overline{H} e^{-x_1} \tag{37}$$

Надаючи цілочисельному аргументу k = 0, 1, 2, 3 … з рекурентного виразу (34) за початковими дискретами (36) знайдемо дискрети диференціального спектру $U(x_1,k)$:

$$U(x_1,0)=\varphi(x_1)\,;\ U(x_1,1)=0\,;\ U(x_1,2)=\frac{H^2}{2}\ddot{\varphi}(x_1)\,;\ U(x_1,3)=0\,,\ \text{де}\ \ddot{\varphi}(x_1)=\frac{d^2\varphi(x_1)}{dx_1^2}. \tag{38}$$

Аналогічним чином знаходимо дискрети диференціального спектру $\overline{U}(x_1,k)$ за виразом (35) і початковими дискетами (37):

$$\overline{U}(x_1,0)=\psi(x_1)\,;\ \overline{U}(x_1,1)=\overline{H}e^{-x_1}\,;\ \overline{U}(x_1,2)=\frac{\overline{H}^2}{2}\ddot{\psi}(x_1);\ \overline{U}(x_1,3)=\frac{\overline{H}^3}{6}e^{-x_1}\,,\ \text{де}\ \ddot{\psi}(x_1)=\frac{d^2\psi(x_1)}{dx_1^2}. \tag{39}$$

З умови спряження (25),(29) в точці $x_{2c}=\frac{H}{2}=\frac{\overline{H}}{2}$ при $H=\overline{H}=l=1$, які використовують диференціальні спектри (38),(39) маємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases}\varphi(x_1)+\frac{1}{8}\ddot{\varphi}(x_1)=\psi(x_1)+\frac{1}{8}\ddot{\varphi}(x_1)-\frac{25}{48}e^{-x_1},\\ \frac{1}{2}\ddot{\varphi}(x_1)=-\frac{1}{2}\ddot{\psi}(x_1)+\frac{9}{8}e^{-x_1};\end{cases} \tag{40}$$

яка визначає невідомі функції $\varphi(x_1)$ і $\psi(x_1)$:

$$\varphi(x_1)=\frac{193}{216}e^{-x_1}+\frac{1}{8}C_1\sin 2\sqrt{2}\,x_1+\frac{1}{8}C_2\cos 2\sqrt{2}x_1+C_3x_1+C_4 \tag{41}$$

$$\psi(x_1)=\frac{293}{216}e^{-x_1}-\frac{1}{8}C_1\sin 2\sqrt{2}x_1-\frac{1}{8}C_2\cos 2\sqrt{2}x_1+C_3x_1+C_4\,, \tag{42}$$

де C_1,C_2,C_3,C_4 - константи інтегрування.

Підстановка (41)-(42) в диференціальні спектри (38), (39) дає розв'язок хвильового рівняння (30) в області зображень в формі прямого диференціального спектра

$$\begin{gathered}U(x_1,0)=\frac{193}{216}e^{-x_1}+\frac{1}{8}C_1\sin 2\sqrt{2}x_1+\frac{1}{8}C_2\cos 2\sqrt{2}x_1+C_3x_1+C_4\,,\ U(x_1,1)=0\,,\\ U(x_1,2)=\frac{H^2}{2}\left(\frac{193}{216}e^{-x_1}-C_1\sin 2\sqrt{2}x_1-C_2\cos 2\sqrt{2}x_1\right),\ U(x_1,3)=0\,.\end{gathered} \tag{43}$$

і зворотного диференціального спектру

$$\begin{gathered}\overline{U}(x_1,0)=\frac{293}{216}e^{-x_1}-\frac{1}{8}C_1\sin 2\sqrt{2}x_1-\frac{1}{8}C_2\cos 2\sqrt{2}x_1+C_3x_1+C_4\,,\ \ \overline{U}(x_1,1)=\overline{H}e^{-x_1}\,,\\ \overline{U}(x_1,2)=\frac{\overline{H}^2}{2}\left(\frac{293}{216}e^{-x_1}+C_1\sin 2\sqrt{2}x_1+C_2\cos 2\sqrt{2}x_1\right),\ \overline{U}(x_1,3)=\frac{\overline{H}^3}{6}e^{-x_1}\,.\end{gathered} \tag{44}$$

Розв'язок хвильового рівняння (30) в області оригіналів отримаємо на основі виразів справа (16) і (18) з врахуванням (43) і (44) при $H=\overline{H}=l=1$:

$$u(x_1,x_2)=\frac{193}{216}e^{-x_1}\left(1+\frac{x_2^2}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{x_2^2}{2}\right)C_1\sin 2\sqrt{2}x_1+\left(\frac{1}{8}-\frac{x_2^2}{2}\right)C_2\cos 2\sqrt{2}x_1+C_3x_1+C4\,, \tag{45}$$

при $x_2\in[0;0{,}5]$;

$$\begin{gathered}\overline{u}(x_1,x_2)=\left\{\left[(x_2-1)+\frac{1}{6}(x_2-1)^3\right]+\frac{293}{216}\left[1+\frac{1}{2}(x_2-1)^2\right]\right\}e^{-x_1}+\left[\frac{1}{2}(x_2-1)^2-\frac{1}{8}\right]C_1\sin 2\sqrt{2}x_1+\\ +\left[\frac{1}{2}(x_2-1)^2-\frac{1}{8}\right]C_2\cos 2\sqrt{2}x_1+C_3x_1+C_4\,,\ \ \text{при}\ x_2\in[0{,}5;1];\end{gathered} \tag{46}$$

Розв'язок (45), (46) при $t = x_1$, $x = x_2$ відповідає граничним умовам (32). Тому для знаходження чотирьох констант інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4 маємо лише дві початкові умови (31), які з врахуванням розв'язку (43) дають лише два рівняння:

$$u(0, x_1) = \frac{193}{216}\left(1 + \frac{x_2^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{x_2^2}{2}\right)C_2 + C_4 = \frac{ch\, x_2}{sh1}, \tag{47}$$

$$\frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} = -\frac{193}{216}\left(1 + \frac{x_2^2}{2}\right) + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{x_2^2}{2}\right)C_1 + C_3 = -\frac{ch\, x_2}{sh1}. \tag{48}$$

В даному прикладі потрібно ще два рівняння для знаходження невідомих констант C_1, C_2, C_3, C_4. Необхідні рівняння знайдемо методом балансу диференціальних спектрів. Переведемо рівняння (47) в область зображень за допомогою виразу (16):

$$U(0, k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{\partial^k u(0, x_2)}{\partial x_2^k}\right]_{x_2 = 0} = \frac{1}{sh1}\left[\frac{H^k}{k!}\cos^2\frac{\pi k}{2}\right]. \tag{49}$$

З виразу (49) при $k = 0$ маємо $U(0, x_2)\big|_{x_2 = 0} = \frac{193}{216} + \frac{1}{8}C_2 + C_4 = \frac{1}{sh1}$

(50)

Баланс дискрет диференціальних спектрів (49) для цілочисельного аргументу $k = 1$ виконується при нульових значеннях дискрет.

Якщо надати цілочисельному аргументу значення $k = 2$, то з (49) отримаємо:

$$\left.\frac{d^2 U(0, x_2)}{dx_2^2}\right|_{x_2 = 0} = \frac{193}{216} - C_2 = \frac{1}{sh1}. \tag{51}$$

Методом балансу диференціальних спектрів з одного рівняння (47) отримано два незалежні рівняння (50), (51), розв'язок яких визначає дві невідомі константи:

$$C_2 = \frac{193}{216} - \frac{1}{sh1}; \quad C_4 = -\frac{9}{8}\left(\frac{193}{216} - \frac{1}{sh1}\right). \tag{52}$$

Аналогічним чином з рівняння (48) методом балансу диференціальних спектрів знайдемо невідомі константи C_1 і C_3. Введемо позначення $v(0, x_2) = \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1}$.

Рівняння (48) з врахуванням позначення набуває вигляд:

$$v(0, x_2) = -\frac{193}{216}\left(1 + \frac{x_2^2}{2}\right) + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{x_2^2}{2}\right)C_1 + C_3 = -\frac{ch\, x_2}{sh1}. \tag{53}$$

Згідно виразу (16) переведемо рівняння (53) в область зображень:

$$V(0, k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{\partial^k v(0, x_2)}{\partial x_2^k}\right]_{x_2 = 0} = -\frac{1}{sh1}\left[\frac{H^k}{k!}\cos^2\frac{\pi k}{2}\right]. \tag{54}$$

Надаємо цілочисельному аргументу k в (54) значення 0,1,2. Рівняння (54) при $k = 0$ з врахуванням (53) набуває вигляду:

$$-\frac{193}{216} + \frac{\sqrt{2}}{4}C_1 + C_3 = -\frac{1}{sh1}. \tag{55}$$

Баланс дискрет диференціальних спектрів (54) при $k = 1$ виконується для нульових значень дискрет.

Рівняння (54) при $k=2$ з врахуванням (53) дає рівняння для визначення C_1:

$$-\frac{193}{216}-2\sqrt{2}C_1=-\frac{1}{sh1}. \qquad (56)$$

Розв'язок рівнянь (55) і (56) визначає константи інтегрування C_1 і C_3:

$$C_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{sh1}-\frac{193}{216}\right),\quad C_3=-\frac{9}{8}\left(\frac{1}{sh1}-\frac{193}{216}\right). \qquad (57)$$

Таким чином, методом балансу диференціальних спектрів система двох рівнянь (47) і (48) в області оригіналів перетворена в області зображень в систему чотирьох рівнянь (50),(51),(55),(56) відносно невідомих констант C_1, C_2, C_3, C_4. Розв'язок цієї системи (52),(57) визначає константи C_1, C_2, C_3, C_4 в розв'язку (45),(46) крайової задачі (30)-(32).

Виконаємо порівняння запропонованого методу із відомим [5], який використовує тільки один диференціальний спектр (38). Розв'язок відомим методом отримаємо на основі обернених диференціальних перетворень (14) і диференціального спектру (38) при $x_{2\nu}=0$, $H_2=H=l=1$:

$$u(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H}\right)^k U(x_1,k)=\varphi(x_1)+\frac{x_2^2}{2}\ddot{\varphi}(x_1). \qquad (58)$$

Підстановка (58) в граничну умову (32) при $t=x_1$, $x=x_2$ дає рівняння

$$\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=l=1}=\ddot{\varphi}(x_1)=e^{-x_1}. \qquad (59)$$

Інтегрування диференціального рівняння (59) визначає невідому функцію $\varphi(x_2)$:

$$\varphi(x_1)=e^{-x_1}+A_1x_1+A_2, \qquad (60)$$

де A_1, A_2 - константи інтегрування.

Розв'язок $u^*(x_1,x_2)$ крайової задачі (30)-(32) відомим методом визначається виразом (58) із врахуванням (60):

$$u^*(x_1,x_2)=\left(1+\frac{x_2^2}{2}\right)e^{-x_1}+A_1x_1+A_2. \qquad (61)$$

Підстановка розв'язку (61) в початкові умови (31) при $t=x_1=0$, $x=x_2$ визначає невідомі величини:

$$A_1=-A_2=-\frac{ch\,x_2}{sh1}+1+\frac{x_2^2}{2}. \qquad (62)$$

Розв'язок $u^*(x_1,x_2)$ крайової задачі (30)-(32) відомим методом із врахуванням виразів (61), (62) набуває вигляду:

$$u^*(x_1,x_2)=\left(1+\frac{x_2^2}{2}\right)e^{-x_1}+\left(\frac{ch\,x_2}{sh1}-1-\frac{x_2^2}{2}\right)(1-x_1). \qquad (63)$$

Порівняємо похибки розв'язку (63) з похибками розв'язку (46) із врахуванням виразів (52),(57) при $x_1=0{,}5;\ x_2=1$. Точний розв'язок u_m (33) при $t=x_1=0{,}5;\ x=x_2=1$ дає значення $u_m=0{,}796396$. Наближений розв'язок (63) $u^*(x_1,x_2)$ при $x_1=0{,}5;\ x_2=1$ дає рішення крайової задачі (30)-(32) з абсолютною похибкою $\varepsilon_1=0{,}02$. Розв'язок крайової задачі (30)-(32) запропонованим методом (46) при $x_1=0{,}5;\ x_2=1$ має похибку $\varepsilon_2=0{,}0033$ в шість разів меншу.

Висновки. Визначено, що моделювання фізичних полів і процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів із значною кількістю дискрет потребує вирішення некоректної задачі. Запропоновано метод вирішення некоректної задачі на основі балансу диференціальних спектрів початкових і крайових умов.

Предметом подальших досліджень є застосування запропонованого методу для моделювання нелінійних фізичних процесів, що описуються нелінійними крайовими задачами.

Література

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.:БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование MATLAB. – М.:Вильямс, 2001. – 720 с.
3. *Поршнев С.В.* Вычислительная математика. – Санкт-Петербург:БХВ Петербург, 2004. – 320 с.
4. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач //Вісник ЖДТУ. – 2005. - № 4 (35). – С. 42-48.
5. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач//Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – Вип. 3 (14). – К.: НАУ, 2005. – С.25-30.
6. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач//Вісник ЖДТУ. – 2007. - №2 (41). – С. 59-65.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
8. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наук. думка, 1986. – 158 с.
9. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
10. *Баранов В.Л., Баранов Г.Л., Фролова О.Г.* Порівняння методів моделювання динамічних процесів основними та зміщеними диференціальними перетвореннями//Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – Вип. 10. – К.:НАУ, 2004. – С. 72-77.
11. *Трухаев Г.И.* Методы инфлуентного анализа высоких порядков. – Ленинград: Наука, 1987. – 257 с.
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

УДК 621.372.061

Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецкая К.В. Особенности моделирования физических полей и процессов на основе прямых и обратных дифференциальных спектров со значительным количеством дискрет

Рассмотрены особенности моделоирования физических полей и процессов на системе прямых и обратных дифференциальных спектров со значительным количеством дискрет. Использование системы дифференциальных спектров, описывающих физические поля и процессы в области дифференциальных преобразований, позволяет уменьшить погрешность моделирования в области оригиналов, но требует решения некорректной задачи. Приведен пример моделирования.

Ключевые слова: моделирование физических полей, дифференциальные спектры, погрешность моделирования.

UDC 621.372.061

Baranov V., Kostuchenko R., Molodetska K. The characteristic of physical fields and processes modeling on the basic of direct and reverse differential spectra with significant amount of discrets

There was discussed the physical fields and processes modeling in the system of direct and reverse differential spectra with significant amount of discrets. The use of system of differential spectra, which describe physical fields and processes in the sphere of differential transformation, allow to decrese modeling error in the originals sphere, but needs solving incorrect problem. The modeling example is given.

Key words: physical field modeling, differencial spectors, simulation error.