УДК 621.372.061

Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецька К.В.

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ВЕЛИКИХ ЧАСОВИХ ІНТЕРВАЛАХ

Запропоновано метод моделювання нестаціонарних фізичних процесів на великих часових інтервалах. Метод оснований на використанні декількох систем зміщених диференціальних спектрів, що описують фізичні процеси в області диференціальних перетворень.

Постановка проблеми

Моделювання фізичних процесів пов'язане з розв'язанням диференціальних рівнянь із частинними похідними з початковими і граничними умовами. Відомо, що чисельні методи розв'язання крайових задач потребують виконання значного обсягу обчислень на ЕОМ [1-3]. У випадку використання математичних моделей фізичних процесів з метою управління об'єктами з розподіленими параметрами виникає необхідність моделювання в реальному і прискореному часі для контролю за динамікою зміни фізичного процесу. Для швидкоплинних фізичних процесів вимога моделювання в реальному часі може бути виконана шляхом зменшення обсягу обчислень методами аналітичного і чисельно-аналітичного моделювання на ЕОМ. Сьогодні ці методи розв'язання нелінійних крайових задач недостатньо розвинені і вимагають подальших досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1-9] показав, що аналітичні й чисельно-аналітичні методи розв'язування крайових задач ґрунтуються на інтегральних та диференціальних перетвореннях математичних моделей фізичних процесів. Застосування різних методів інтегральних перетворень обмежується в основному дослідженням лінійних математичних моделей [9]. Моделювання нелінійних фізичних процесів може бути виконано в аналітичному або чисельно-аналітичному вигляді на основі використання одновимірних диференціальних перетворень [4-8]. Недолік цих методів полягає в залежності складності аналітичного опису фізичного процесу в області зображень від похибки моделювання фізичного процесу в області оригіналів. Математична модель фізичного процесу в області диференціальних перетворень має вигляд диференціального спектра, від кількості дискрет якого безпосередньо залежить похибка його моделювання в області оригіналів [4-8]. Складність аналітичного опису дискрет диференціального спектра зростає зі збільшенням номера дискрети, тому моделювання фізичних процесів в аналітичному вигляді виконують з використанням декількох початкових дискрет диференціального спектра, а це обмежує точність моделювання нелінійних фізичних процесів в області оригіналів. У зв'язку з цим виникає проблема моделювання нестаціонарних фізичних полів на великих часових інтервалах з малою кількістю дискрет із заданою похибкою моделювання.

Мета статті полягає в розробці методу чисельно-аналітичного моделювання нестаціонарних фізичних полів на основі систем зміщених диференціальних спектрів з обмеженою кількістю дискрет в областях великого розміру.

Розглянемо нестаціонарні фізичні процеси, задані функцією $u(x,t)$ двох незалежних змінних в області:

$$0 \le |x| \le H_x\,,\ 0 \le t \le H\,, \qquad (1)$$

де H_x, H_t – задані додатні сталі.

Обмежимося класом фізичних процесів, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними в одній із форм:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f_1\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f_2\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad (3)$$

де f_1, f_2 – задані неперервні функції.

До вигляду (2) – (3) зводяться лінійні й квазілійні рівняння з частинними похідними. Рівняння (2) описують хвильові процеси в середовищах різної фізичної природи. Прикладом рівняння (3) може бути рівняння теплопровідності.

Математична модель фізичних процесів крім опису в одній із форм (2) – (3) містить початкові та граничні умови, які дозволяють виділити серед множини розв'язків рівнянь з частинними похідними єдиний, що відповідає математичному опису фізичного процесу.

Початкові умови для рівнянь (2) і (3) задають у вигляді:

$$u(x,0) = U_0(x), \quad (4)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Q(x), \quad (5)$$

де $U_0(x)$, $Q(x)$ – задані функції.

Граничні умови для всіх рівнянь (2) – (3) при моделюванні фізичних процесів і полів задаються у вигляді:

$$\left. u(x,t)\right|_{x\in\Gamma} = a(t) \text{ – умови Діріхлє;} \quad (6)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\right|_{x\in\Gamma} = b(t) \text{ – умови Неймана;} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial N} + g\, u(x,t)\Big|_{x\in\Gamma} = m(t) \text{ – змішані умови,} \quad (8)$$

де a, b, m – задані неперервні функції, визначені на граничній поверхні Г;

g – задані сталі величини;

$\frac{\partial u}{\partial N}$ – похідна в точці поверхні Г в напрямку внутрішньої (чи зовнішньої) нормалі N до неї.

Метод моделювання фізичних процесів, який описується математичними моделями (1) – (3), побудуємо на основі зміщених одновимірних диференціальних перетворень [4].

Метод чисельно-аналітичного моделювання нестаціонарних фізичних процесів на великих часових інтервалах заснований на системах зміщених диференціальних спектрів. Фіксовані точки t_n зміщених диференціальних спектрів побудуємо таким чином.

Великий часовий інтервал $[0, H]$ покриємо сіткою з кроками H_n, де $n = \overline{1, n}$. Кожен з інтервалів $[t_n, t_n + H_n]$ поділимо на два рівних інтервали $[t_n, t_n + h_n]$ і $\left[t_n, t_n - \bar{h}_n\right]$, де

$h_n = \bar{h}_n = \frac{H_n}{2}$. На кожному інтервалі $[t_n, t_n + H_n]$ застосуємо три системи зміщених диференціальних перетворень:

$$U_n(x,k) = \frac{h_n^k}{k!}\left[\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right]_{t=t_n}, \quad u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_n}{h_n}\right)^k U_n(x,k), \tag{9}$$

$$\bar{U}_{n+1}(x,k) = \frac{\bar{h}_n^k}{k!}\left[\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right]_{t=t_{n+1}}, \quad u(x,k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_{n+1}}{\bar{h}_n}\right)^k \bar{U}_{n+1}(x,k), \tag{10}$$

$$U_{n\,c}(x,k) = \frac{h_n^k}{k!}\left[\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right]_{t=t_n+h_n}, \quad u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_n-h_n}{h_n}\right)^k U_{n\,c}(x,k), \tag{11}$$

де $U_n(x,k)$, $\bar{U}_{n+1}(x,k)$, $U_{n\,c}(x,k)$ – зміщені диференціальні зображення функції $u(x,t)$, які прийнято називати диференціальними спектрами, а їх значення при фіксованих значеннях цілочисельного аргумента $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$ – дискретами диференціальних спектрів.

Вирази (9) – (11) зліва переводять нестаціонарний процес $u(x,t)$ в область диференціальних зображень. Обернений перехід з області зображень в область оригіналів описують вирази (9) – (11) справа.

Переведемо диференціальні рівняння (2) і (3) в область зображень на основі зміщених диференціальних перетворень (9) – (11):

$$U_n(x,k+2) = \frac{h_n^2}{(k+1)(k+2)} F_1\left[x, T_n(k), U_n(x,k), \frac{dU_n(x,k)}{dx}, \frac{k+1}{h_n} U_n(x,k+1),\right.$$
$$\left.\frac{k+1}{h_n}\frac{dU_n(x,k+1)}{dx}, \frac{d^2U_n(x,k)}{dx^2}\right]; \tag{12}$$

$$\bar{U}_n(x,k+2) = \frac{\bar{h}_n^2}{(k+1)(k+2)} \bar{F}_1\left[x, \bar{T}_{n+1}(k), \bar{U}_{n+1}(x,k), \frac{d\bar{U}_{n+1}(x,k)}{dx}, \frac{k+1}{\bar{h}_n} \bar{U}_{n+1}(x,k+1),\right.$$
$$\left.\frac{k+1}{\bar{h}_n}\frac{d\bar{U}_{n+1}(x,k+1)}{dx}, \frac{d^2\bar{U}_{n+1}(x,k)}{dx^2}\right]; \tag{13}$$

$$U_{n\,c}(x,k+2) = \frac{h_n^2}{(k+1)(k+2)} F_1\left[x, T_{n\,c}(k), U_{n\,c}(x,k), \frac{dU_{n\,c}(x,k)}{dx}, \frac{k+1}{h_n} U_{n\,c}(x,k+1),\right.$$
$$\left.\frac{k+1}{h_n}\frac{dU_{n\,c}(x,k+1)}{dx}, \frac{d^2U_{n\,c}(x,k)}{dx^2}\right]; \tag{14}$$

$$U_n^*(x,k+1) = \frac{h_n}{k+1} F_2\left[x, T_n(k), U_n^*(x,k), \frac{dU_n^*(x,k)}{dx}, \frac{k+1}{h_n} U_n^*(x,k+1),\right.$$

$$\left.\frac{k+1}{h_n}\frac{dU_n^*(x,k+1)}{dx},\frac{d^2U_n^*(x,k)}{dx^2}\right]; \qquad (15)$$

$$\overline{U}^*_{n+1}(x,k+1)=\frac{\overline{h}_n}{k+1}\overline{F}_2\left[x,\overline{T}_{n+1}(k),\overline{U}^*_{n+1}(x,k),\frac{d\overline{U}^*_{n+1}(x,k)}{dx},\frac{k+1}{\overline{h}_n}\overline{U}^*_{n+1}(x,k+1),\right.$$

$$\left.\frac{k+1}{\overline{h}_n}\frac{d\overline{U}^*_{n+1}(x,k+1)}{dx},\frac{d^2\overline{U}^*_{n+1}(x,k)}{dx^2}\right]; \qquad (16)$$

$$U^*_{n\,c}(x,k+1)=\frac{h_n}{k+1}F_2\left[x,T_{n\,c}(k),U^*_{n\,c}(x,k),\frac{dU^*_{n\,c}(x,k)}{dx},\frac{k+1}{h_n}U^*_{n\,c}(x,k+1),\right.$$

$$\left.\frac{k+1}{h_n}\frac{dU^*_{n\,c}(x,k+1)}{dx},\frac{d^2U^*_{n\,c}(x,k)}{dx^2}\right]. \qquad (17)$$

Рекурентні вирази (12) – (17) дають змогу знайти диференціальні спектри $U_n(x,k)$, $\overline{U}_{n+1}(x,k)$, $U_{n\,c}(x,k)$, $U_n^*(x,k)$, $\overline{U}^*_{n+1}(x,k)$, $U^*_{n\,c}(x,k)$ послідовно надаючи цілочисельні значення аргументу $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty$. Початкові дискети диференціальних спектрів $U_n(x,k)$, $U_n^*(x,k)$, що необхідні для реалізації рекурентних обчислень (12), (15) знайдемо із початкових умов (4), (5):

$$\begin{aligned} &U_1(x,0)=U_0(x),\\ &U_1(x,1)=h_1Q(x),\\ &U_1^*(x,0)=U_0(x). \end{aligned} \qquad (18)$$

Початкові дискрети диференціальних спектрів $\overline{U}_{n+1}(x,k)$, $U_{n\,c}(x,k)$, $\overline{U}^*_{n+1}(x,k)$, $U^*_{n\,c}(x,k)$ невідомі і їх слід задавати у символьному вигляді як невідому функцію аргумента x, наприклад:

$$\begin{aligned} &\overline{U}_2(x,0)=f_1(x),\\ &\overline{U}_2(x,1)=\overline{h}_1y_1(x),\\ &U_{1c}(x,0)=f_{1c}(x),\\ &U_{1c}(x,1)=h_1y_{1c}(x),\\ &\overline{U}^*_2(x,0)=\overline{f}^*_1(x),\\ &U^*_{1c}(x,0)=f^*_{1c}(x). \end{aligned} \qquad (19)$$

Розглянемо моделювання фізичного процесу на першому часовому інтервалі $[t_1,t_1+H_1]$, де $t_1=t_0$, $h_1=\overline{h}_1=\dfrac{H_1}{2}$. За рекурентними виразами (12) – (17) при $n=1$ на основі початкових дискет (18), (19), послідовно надаючи цілочисельному аргументу k значення 0, 1, 2, 3, …, обчислюємо дискрети диференціальних спектрів $U_1(x,k)$, $\overline{U}_2(x,k)$, $U_{1c}(x,k)$, $U_1^*(x,k)$, $\overline{U}_2^*(x,k)$, $U_{1c}^*(x,k)$.

На основі умов спряження цих диференціальних спектрів отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок яких дозволяє знайти невідомі дискрети (19):

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k U_{1c}(x,k)=U_0(x),\\
\frac{1}{h_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (k+1)U_{1c}(x,k+1)=Q(x),\\
\sum_{k=0}^{\infty}U_{1c}(x,k)=f_1(x),\\
\frac{1}{h_1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)U_1(x,k+1)=\frac{1}{\overline{h}_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (k+1)\overline{U}_2(x,k+2),\\
\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k U_{1c}^*(x,k)=U_0(x),\\
\sum_{k=0}^{\infty}U_{1c}^*(x,k)=f_1^*(x).
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Перші чотири рівняння (20) дозволяють знайти невідомі функції $f_1(x)$, $y_1(x)$, $f_{1c}(x)$, $y_{1c}(x)$ шляхом розв’язання цієї системи звичайних диференціальних рівнянь. Останні два рівняння (20) дають систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $f_{1c}^*(x)$, $f_1^*(x)$. У випадку лінійної системи диференціальних рівнянь (20) загальний розв'язок визначається відомими методами [7].

Якщо система диференціальних рівнянь (20) нелінійна, то для її аналітичного розв’язання доцільно використовувати одномірні диференціальні перетворення і методи, що ґрунтуються на них й запропоновані академіком Г.Є. Пуховим [7,8].

Таким чином, на основі аналітичного розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь (21) отримуються невідомі функції $f_1(x,C)$, $y_1(x,C)$, $f_{1c}(x,C)$, $y_{1c}(x,C)$, $f_1^*(x,C)$, $f_{1c}^*(x,C)$, де C – вектор констант інтегрування, кількість констант якого дорівнює порядку системи (21).

Компоненти C_1, C_2, …, C_m вектора C констант інтегрування визначаються на основі граничних умов (6), (7), (8).

З виразу обернених диференціальних перетворень (11) на основі третього співвідношення (2) отримаємо:

$$
\begin{gathered}
u(x,t)\big|_{t=h_1}=U_{1C}(x,0)=f_{1C}(x,C),\\
u^*(x,t)\big|_{t=h_1}=U_{1C}^*(x,0)=f_{1C}^*(x,C).
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Граничні умови (6) – (8) з врахуванням (1) і (21) при $t_0=0$ набувають вигляду:

$$
\left.\begin{aligned}
u(x,t)\big|_{\substack{t=h_1\\ x=0}}&=f_{1C}(x,C)\big|_{x=0}=a(t)\big|_{t=h_1},\\
u(x,t)\big|_{\substack{t=h_1\\ x=H_x}}&=f_{1C}(x,C)\big|_{x=H_x}=a(t)\big|_{t=h_1},
\end{aligned}\right\}\ \text{умови Діріхлє}
\tag{22}
$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{\substack{t=h_1\\x=0}} = \left.\frac{\partial f_{1C}(x,C)}{\partial x}\right|_{x=0} = b(t)\big|_{t=h_1}, \\ &\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{\substack{t=h_1\\x=H_x}} = \left.\frac{\partial f_{1C}(x,C)}{\partial x}\right|_{x=H_x} = b(t)\big|_{t=h_1}, \end{aligned}\right\} \text{умови Неймана} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial f_{1C}(x,C)}{\partial x}\right|_{x=0} + g f_{1C}(x,C)\big|_{x=0} = m(t)\big|_{t=h_1}, \\ &\left.\frac{\partial f_{1C}(x,C)}{\partial x}\right|_{x=H_x} + g f_{1C}(x,C)\big|_{x=H_x} = m(t)\big|_{t=h_1}. \end{aligned}\right\} \text{змішані умови} \tag{24}$$

Розв'язок систем рівнянь (22) – (24) визначає компоненти вектора констант інтегрування.

Зі співвідношень (10), (19) при $t_0 = 0$ маємо:

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=H_1} &= \overline{U}_2(x,0) = f_1(x,C), \\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=H_1} &= \frac{1}{h_1}\overline{U}_2(x,1) = y_1(x,C), \\ u^*(x,t)\big|_{t=H_1} &= \overline{U}_2^*(x,0) = f_1^*(x,C). \end{aligned} \tag{25}$$

Перший крок обчислень $[0, H_1]$ завершено. Другий та всі наступні кроки обчислень виконуються методом стикування аналогічним чином. Наприклад, для другого кроку $t \in [H_1, H_1 + H_2]$ замість початкових умов (18) слід застосувати умови (25) в кінці першого кроку:

$$\begin{aligned} U_2(x,0) &= f_1(x,C), \\ U_2(x,1) &= h_2 y_1(x,C), \\ U_2^*(x,0) &= f_1^*(x,C), \end{aligned} \tag{26}$$

де $h_2 = \overline{h}_2 = \dfrac{\overline{H}_2}{2}$. Після виконання другого кроку обчислень отримаємо:

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=H_1+H_2} &= \overline{U}_3(x,0) = f_2(x,C), \\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=H_1+H_2} &= \frac{1}{\overline{h}_2}\overline{U}_3(x,1) = y_2(x,C), \\ u^*(x,t)\big|_{t=H_1+H_2} &= \overline{U}_3^*(x,0) = f_2^*(x,C). \end{aligned} \tag{27}$$

На третьому кроці обчислень $t \in [H_1 + H_2, H_1 + H_2 + H_3]$ замість початкових умов (26) застосуємо кінцеві умови другого кроку (27). Тому початкові умови на третьому кроці обчислень мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
U_3(x,0) &= f_2(x,C),\\
U_3(x,1) &= h_3 y_2(x,C),\\
U_3^*(x,0) &= f_2^*(x,C). \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Аналогічним чином виконуються всі інші кроки обчислень.

Рівняння (20) точні, але при їх обчисленні використовують скінченну кількість дискет диференціальних спектрів при значеннях цілочисельного аргумента $k = 0, 1, 2, \ldots, q$. Як показано в [10], верхня межа похибки при застосуванні q дискрет зміщених диференціальних спектрів оцінюється величиною $2^{-q}e$, де e − похибка, зумовлена врахуванням скінченного числа членів ряду Тейлора в обернених диференціальних перетвореннях (9) – (11). Похибка e, як відомо, оцінюється наближено за Коші і точно за формулами Лагранжа чи Ейлера-Лагранжа [11]. Тому запропонований метод, який застосовує три зміщених диференціальних спектри (9) – (11) зменшує похибку моделювання в 2^q разу у порівнянні із методом стикування, який ґрунтується на одному виді диференціальних перетворень (9), (10) чи (11) і дає на одному кроці обчислень похибку e при застосуванні скінченної кількості дискрет при $k = 0, 1, 2, \ldots, q$.

Висновки

Запропоновано метод моделювання нестаціонарних фізичних процесів на великих часових інтервалах. Метод застосовує на кожному кроці обчислень три зміщених одномірних диференціальних спектри. У порівнянні із методом стикування локальних рівнянь Г.Є. Пухова [7] запропонований метод зменшує оцінку верхньої межі похибки в 2^q рази, де q – номер останньої врахованої дискрети диференціального спектра.

Література

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.:БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.:Вильямс, 2001. – 720 с.
3. Поршнев С.В. Вычислительная математика. – Санкт-Петербург:БХВ Петербург, 2004. – 320 с.
4. Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М. Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач //Вісник ЖДТУ. – 2005. - № 4 (35). – С. 42-48.
5. Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М. Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач//Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – Вип. 3 (14). – К.: НАУ, 2005. – С.25-30.
6. Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М. Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач//Вісник ЖДТУ. – 2007. - №2 (41). – С. 59-65.
7. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
8. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наук. думка, 1986. – 158 с.
9. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
10. Баранов В.Л., Баранов Г.Л., Фролова О.Г. Порівняння методів моделювання динамічних процесів основними та зміщеними диференціальними перетвореннями//Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – Вип. 10. – К.:НАУ, 2004. – С. 72-77.
11. Трухаев Г.И. Методы инфлуентного анализа высоких порядков. – Ленинград: Наука, 1987. – 257 с.

Надійшла до редколегії 22.03.2010

Аннотация

Предложен метод моделирования нестационарных физических процессов на больших временных интервалах. Метод основан на использовании нескольких систем смещенных дифференциальных спектров, описывающих физические процессы в области дифференциальных преобразований.

Annotation

There was discussed modeling of unstationary physical processes on long-term distances. The method is based on using multiple systems offset differential spectra, which describe physical processes in the differential transformation.