Application of direct and inverse differential spectra to simulate the temperature field

Katerina Molodetska

Automated control systems Department,
Zhytomir Military Institute National
Aviation University, UKRAINE,
Zhytomir, Prospect Mury 22,
E-mail: katerina_mk@ukr.net

Simulation of physical processes and fields is related to solution of differential equations with partial derivatives with initial and boundary conditions. It is known that numerical methods of solution of boundary value problems require fulfilment of a large number of computerized calculating operations.

At present, analytic and numerical analytic methods of solution of nonlinear boundary value problems are underdeveloped and require further research.

Analysis of recent researches and publications showed that analytic and numerical analytic methods of solution of boundary value problems are based on integral and differential transformations of mathematical models of physical processes and fields. Use of different methods of integral transformations is principally limited by the study of linear mathematical models.

It is offered to increase the accuracy of simulation of physical processes and fields by using a system of direct and inverse differential spectra with a limited number of increments.

The purpose of the research is to use a system of direct and inverse differential spectra for simulation of the thermal field of a rod with *d* diameter and reduction of simulation error as compared to the accurate solution of the problem.

The work examines the problem of simulation of the thermal field of a rod, which reduces to a boundary value problem with initial and boundary conditions. Simulation method is based on the use of a system of direct and inverse differential spectra. To solve the ill-conditioned problem arising in the solution process, it is suggested to transfer initial and boundary conditions into the range of differential representations.

The paper describes the example of simulation of the thermal field of a rod based on the systems of direct and inverse differential spectra. Analytic solution of the boundary value ill-conditioned p

Застосування системи прямих і зворотних диференціальних спектрів для моделювання теплового поля

Катерина Молодецька

Кафедра автоматизованих систем управління,
Житомирський військовий інститут імені С. П. Корольова
Національного авіаційного університету,
УКРАЇНА, м. Житомир, Проспект Миру, 22,
E-mail: katerina_mk@ukr.net

Наведено приклад моделювання теплового поля стержня на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів. Виконано оцінку величини похибки моделювання.

Ключові слова – Диференціальні перетворення, моделювання, прямі і зворотні диференціальні спектри, початкові і граничні умови, похибка моделювання.

I. Постановка проблеми

Моделювання фізичних процесів і полів пов'язане з розв'язанням диференціальних рівнянь з частинними похідними з початковими і граничними умовами. Відомо, що чисельні методи розв'язання крайових задач потребують виконання значного об'єму обчислень на ЕОМ [1-2].

У випадку використання математичних моделей фізичних процесів і полів з метою управління об'єктами з розподіленими параметрами виникає необхідність моделювання в реальному або прискореному часі для контролю за динамікою зміни фізичного процесу. Для швидкоплинних фізичних процесів вимога моделювання в реальному часі може бути виконана шляхом зниження об'єму обчислень методами аналітичного або чисельно-аналітичного моделювання на ЕОМ.

Сьогодні аналітичні і чисельно-аналітичні методи розв'язання нелінійних крайових задач недостатньо розвинені і вимагають подальших досліджень.

II. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1–4] показав, що аналітичні і чисельно-аналітичні методи розв'язання крайових задач ґрунтуються на інтегральних або диференціальних перетвореннях математичних моделей фізичних процесів і полів.

Застосування різних методів інтегральних перетворень обмежується в основному дослідженням лінійних математичних моделей. Моделювання нелінійних фізичних процесів може бути виконано в аналітичному або чисельно-аналітичному вигляді на основі використання одномірних диференціальних перетворень [4]. Недолік цих методів полягає в залежності складності аналітичного опису фізичного процесу в області зображень від похибки моделювання фізичного процесу в області оригіналів.

Математична модель фізичного процесу в області диференціальних перетворень має вигляд диференціального спектру, від кількості дискрет якого безпосередньо залежить похибка моделювання фізичного процесу в області оригіналів [6].

Складність аналітичного опису дискрет диференціального спектру зростає із збільшенням номера дискрети. Тому моделювання фізичних процесів в аналітичному вигляді виконують з використанням декількох початкових дискрет диференціального спектру, а це обмежує точність моделювання нелінійних фізичних процесів в області оригіналів.

В зв'язку з цим виникає проблема зниження похибки моделювання фізичних процесів і полів у випадку використання обмеженої кількості дискрет диференціального спектру. Пропонується підвищити точність моделювання фізичних процесів і полів шляхом використання системи прямих і зворотних диференціальних спектрів із обмеженою кількістю дискрет [4].

III. Основна частина

Мета досліджень полягає в застосуванні системи прямих і зворотних диференціальних спектрів для моделювання теплового поля стержня діаметром d з метою зниження похибки моделювання та порівнянні із точним ров'язком задачі.

Розглянуто задачу моделювання теплового поля стержня діаметром d [6]. Вона зводиться до розв'язку крайової задачі:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0 \le x \le d \qquad (1)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності; u – температура стержня; при початкових:

$$u(x,0) = 0 \qquad (2)$$

і граничних умовах:

$$u(d,t) = u_0, \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

Відомий точний аналітичний розв'язок цієї задачі:

$$u(x,t) = u_0 + \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\exp\left(-a^2\lambda_2^n t\right)\cos\lambda_n x \text{ де} \qquad 4)$$

$$\lambda_n = (2n-1)\pi(2d)^{-1}$$

Пропонується виконати моделювання рівняння (1) згідно диференціальних перетворень (5), (6) [4]:

$$U(q,t) = \frac{H_x^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,t)}{\partial t^q}\right]_{x=0},$$

$$u(x,t) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H_x}\right)^q U(q,t) \text{ при } x \in \left[0;\frac{d}{2}\right], \qquad (5)$$

$$\overline{U}(q,t) = \frac{\overline{H}_x^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,t)}{\partial t^q}\right]_{x=\overline{H}_x=d},$$

$$\overline{u}(x,t) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\overline{H}_x}\right)^q \overline{U}(q,t) \text{ при } \overline{x} \in \left[\frac{d}{2};d\right], \qquad (6)$$

де q – цілочисельний аргумент, що приймає значення $0, 1, 2, \ldots, \infty$; $H_x = \overline{H}_x$ – довільна додатна стала; $U(q,t)$, $\overline{U}(q,t)$ – диференціальні зображення функції.

Отже, отримано аналітичний опис теплового процесу у формі

$$u(x,t) = u_0 + C_1 e^{p_1 t}\cos\frac{\sqrt{|p_1|}}{a}x + C_2 e^{p_2 t}\cos\frac{\sqrt{|p_2|}}{a}x, \qquad (7)$$

$$x \in \left[0;\frac{d}{2}\right]$$

В отриманому розв'язку (7) залишалося визначити невідомі константи інтегрування C_1 і C_2. Це некоректна задача. Для її розв'язання виконували моделювання за (5) не самого рівняння, а початкових умов (2).

Розв'язок в області $\overline{x} \in \left[\frac{d}{2};d\right]$:

$$\overline{u}(\overline{x},t) = u_0 - Ce^{pt}\left(\overline{x} - \frac{\overline{x}^3}{3d^2}\right). \qquad (8)$$

Отже, отримано розвязок крайової задачі (1) в аналітичному вигляді (7), (8) і при цьому похибка моделювання не перевищує 1 %, порівняно з відомим точним розв'язком.

Висновок

Наведено приклад моделювання теплового поля стержня на основі систем прямих і зворотних диференціальних спектрів. Отримано аналітичний розв'язок задачі та виконано аналіз похибки моделювання у порівнянні з відомим розв'язком.

Література

[1] Бахвалов Н. С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.

[2] Поршнев С.В. Вычислительная математика / С.В. Поршнев. – Санкт-Петербург: БХВ Петербург, 2004. – 320 с.

[3] Баранов В.Л. Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач / В.Л. Баранов, С.В. Водоп'ян, Р.М. Костюченко // Вісник ЖДТУ. – 2007. – №2 (41). – С. 59 – 65.

[4] Баранов В. Л. Метод моделювання фізичних полів і процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів / В.Л. Баранов, Р.М. Костюченко, К.В. Молодецька // Вісник ЖДТУ. Серія : технічні науки. – 2009. – № 2 (49). – С. 59 – 68.

[5] Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели / Г.Е. Пухов. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.

[6] Рвачев В.Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко. – К.: Наук. думка, 1976. – 288 с.