УДК 539.3

І.Г. Грабар
д.т.н.
Житомирський національний агроекологічний університет
О.І. Грабар
к.т.н.
Житомирський державний технологічний університет
О.І. Грабар
студент
Харківський національний університет ім. Я. Мудрого
Рецензент – член редколегії «Вісник ЖНАЕУ», д.т.н. Л.В. Лось

КІЛЬКІСНА ОЦІНКА ВИСОТИ ХАОСУ ДИВНИХ АТТРАКТОРІВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Показано, що рівень хаотизації аттракторів в задачах динаміки нелінійних систем має свою висоту хаосу. Запропоновано алгоритм його кількісного виміру. На прикладі розробленої авторами моделі хаотизації аттрактора Фейгенбаума для задач нелінійної динаміки обчислено висоту хаосу даного аттрактора $\Lambda_{\min}(J)\lim = 0{,}100562734297571...$ *Показана можливість застосування даного алгоритму до виміру висоти хаосу багатомірних масивів.*

Вступ

Детермінований хаос [1–3] – одне із найцікавіших досягнень динаміки нелінійних систем останньої чверті 20-го століття. Особливої уваги заслуговують результати М. Фейгенбаума в моделюванні кінетики каскаду біфуркацій на відображеннях Пуанкаре невеликої розмірності, і науковий інтерес до експериментальних робіт, де виявлена скейлінгова кінетика (росту втомних тріщин, характеристик короткочасної, втомної і тривалої міцності від часу і температури, динаміки нелінійних генераторів, гідродинамічних систем і багато інших [4–8]) тільки зростає.

Постановка задачі

Для дослідження сценарію хаотизації аттрактора Фейгенбаума одномірного відображення Пуанкаре [5]

$$x_{i+1} = \alpha - x_i^{\,2}, \qquad (1)$$

після j-ої біфуркації пронумеруємо гілки біфуркаційної діаграми (притягуючі точки аттрактора) знизу вверх (рис. 1).

Як видно з рис. 1, для $j = 0$ маємо одну гілку, для $j = 1-2$ гілки, для $j = 2-4$ гілки, після j біфуркації 2^j гілок. Дослідимо закономірності руху притягуючої траєкторії по аттрактору Фейгенбаума та кількісно виміряємо відносну висоту хаосу цього руху.

© І.Г. Грабар, О.І. Грабар, О.І. Грабар

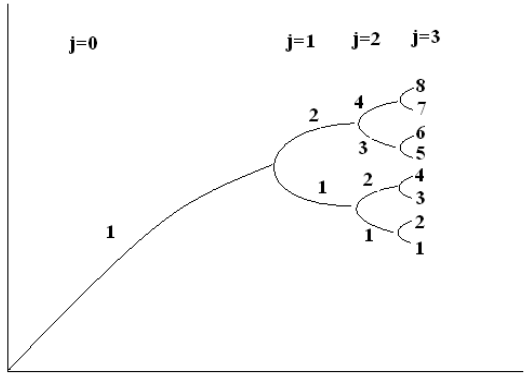

Рис. 1. **Біфуркаційна діаграма Фейгенбаума**

Моделювання процесу хаотизації аттрактора фейгенбаума.

На рис. 2 схематично зображено порядок відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми для перших чотирьох біфуркацій.

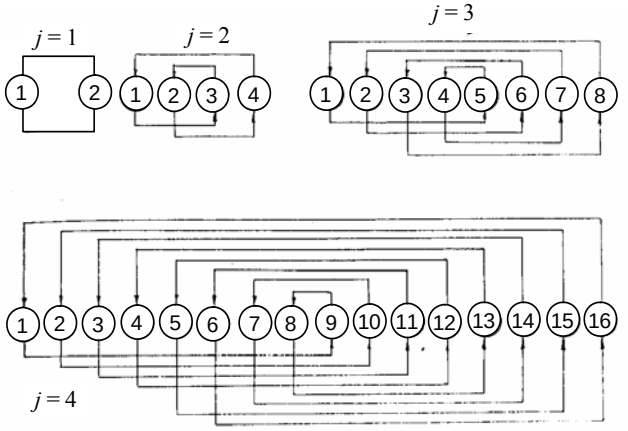

Рис. 2. **Порядок відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми після j-ої біфуркації (Циклічні групи $\mathbf{R_J}$ / $N_{2^{n-2}}\ \ N_{2^{n-3}}$ … $R_2\ N_2(N_2R_2)$, або циклічні групи сценарію Фейгенбаума)**

Як було показано раніше [5], для аналізу сценаріїв рис. 4 доцільно ввести *N*- та *R*-операції (рис. 5).

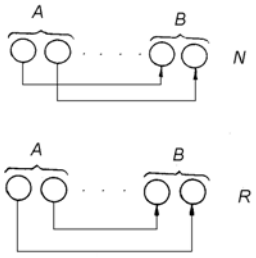

Рис. 3. **N- та R-операції**

Легко побачити, що на рис. 2 всі траєкторії повернення (верхні лінії) є *R*-операціями, а траєкторії віддалення можна подати у вигляді таблиці:

Таблиця 1. **До загальної формули циклічних груп Фейгенбаума**

$J=2$	:	N_2
$J=3$	:	N_2R_2
$J=4$	:	$N_4R_2N_2$
$J=5$	:	$N_8R_4N_2R_2$
……		
$J=n$	:	$N_{2^{n-2}}\ N_{2^{n-3}}\ldots R_2\ N_2(N_2R_2)$

ОБЧИСЛЕННЯ ВИСОТИ ХАОСУ (МІРИ БЕЗПОРЯДКУ) В АТТРАКТОРІ ФЕЙГЕНБАУМА МЕТОДОМ ГРОНИ

Використовуючи ітераційний алгоритм Грони [9] для оцінки висоти хаосу **λ** в одномірних стохастичних масивах:

$$\lambda(n+1) = n * \lambda(n) + (n-i), \qquad (2)$$

показано, що кожна із перестановок групи із $\{n\}$ елементів має своє, тільки їй притаманне значення **λ**, що знаходиться в діапазоні $[0...n!-1]$**.** Таким чином, нами вперше показано, що масив перестановок $n!$ можна строго ранжувати за скалярною мірою – показником висоти хаосу (ВХ) **λ.** Наприклад, група із $n=4$ елементів має $4!=24$ перестановки. За величиною ВХ**,** обчисленою за ітераційною формулою (2), їх можна розмістити по ранжиру в порядку зростання **λ (таблиця 2)**:

Таблиця 2. **Результати обчислення висоти хаосу в повній групі перестановок 4!**

Перестановка	λ	Перестановка	λ	Перестановка	λ
1234	0	**3124**	8	**2314**	16
1243	1	3142	9	2341	17
1423	2	3412	10	2431	18
4123	3	4312	11	4231	19
1324	4	**2134**	12	**3214**	20
1342	5	2143	13	3241	21
1432	6	2413	14	3421	22
4132	7	4213	15	4321	23

Легко побачити, що перенормування

$$\Lambda = \frac{\lambda}{n!}, \qquad (3)$$

дозволяє отримати відносну висоту хаосу (ВВХ) в перестановці, що буде змінюватись в діапазоні [1…0].

Використовуючи ітераційну формулу Грони (2), а також послідовність відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми Фейгенбаума після J-ої біфуркації (рис. 1 та рис. 2), нами обчислено характеристики висоти хаосу для кожного з цих випадків (таблиця 3).

Таблиця 3. **Визначення висоти хаосу в аттракторі Фейгенбаума**

	Перестановки (рис.1)	**Висота хаосу λ**	**Відносна висота хаосу, Λ**
J=1	1 2	0	0
J=2	1 3 2 4	4	0,16666
J=3	1 5 4 7 2 6 3 8	4448	0,110317460…
J=4	1 9 8 13 4 12 5 15 2 10 7 14 3 11 6 16	2104116955072	0,1005657929…
J=5	1 17 16 25 8 24 9 29 4 20 13 28 5 21 12 31 2 18 15 26 7 23 10 30 3 19 14 27 6 22 11 32	26461156440061215694704511145162624	0,100562734297574…
J=6	1 33 32 49 16 48 17 57 8 40 25 56 9 41 24 61 4 36 29 52 13 45 20 60 5 37 28 53 12 44 21 63 2 34 31 50 15 47 18 58 7 39 26 55 10 42 23 62 3 35 30 51 14 46 19 59 6 38 27 54 11 43 22 64	127600968472429443990856968719072525489984145420191266970962650502824853387768340914501 12	0.100562734297571…

Як видно з таблиці 3 $\Lambda_{\min}$ асимптотично наближається до граничного мінімального значення $\Lambda_{\min}(J)\lim = 0{,}100562734297571...$ Автори пропонують

гіпотезу, що дане значення $\Lambda_{\min}(J)\lim$ є новою, невідомою раніше, самостійною математичною константою.

В таблиці 4 наведені сценарії хаотизації аттракторів циклічних груп класу R(J)/N1R(J-1), дуже схожих за структурою на циклічні групи Фейгенбаума, а також результати дослідження висоти хаосу та відносної висоти хаосу даних циклічних груп. На рис. 4 показано, що в даних циклічних групах відносна висота хаосу Λlim=> 0.281718171540955…

В таблиці 5 наведені сценарії хаотизації аттракторів циклічних груп класу R(J)/N2R(J-2), а також результати дослідження висоти хаосу та відносної висоти хаосу даних циклічних груп, а на рис. 5 – відповідний графік відносної висоти хаосу.

Таблиця 4. **Висота хаосу в циклічних групах R(J)/N1R(J-1)**

	K	Λ	Перестановки
R2/N1R1	2	0.166666666666667	1 3 2 4
R3/N1R2	3	0.258333333333333	1 4 3 5 2 6
R4/N1R3	4	0.27797619047619	1 5 4 6 3 7 2 8
R5/N1R4	5	0.281203152557319	1 6 5 7 4 8 3 9 2 10
R6/N1R5	6	0.281655668791085	1 7 6 8 5 9 4 10 3 11 2 12
R7/N1R6	7	0.281711389016077	1 8 7 9 6 10 5 11 4 12 3 13 2 14
R8/N1R7	8	0.281717506250761	1 9 8 10 7 11 6 12 5 13 4 14 3 15 2 16
R9/N1R8	9	0.281718112022464	1 10 9 11 8 12 7 13 6 14 5 15 4 16 3 17 2 18
R10/N1R9	10	0.281718166647785	1 11 10 12 9 13 8 14 7 15 6 16 5 17 4 18 3 19 2 20
R11/N1R10	11	0.28171817116889	1 12 11 13 10 14 9 15 8 16 7 17 6 18 5 19 4 20 3 21 2 22
…	…	…	…
R17/N1R16	17	0.281718171540955	1 18 17 19 16 20 15 21 14 22 13 23 12 24 11 25 10 26 9 27 8 28 7 29 6 30 5 31 4 32 3 33 2 34

Рис. 4.

Таблиця 5. **Висота хаосу в циклічних групах R(J)/N2R(J-2)**

	K	Λ	Перестановки
R2/N2		0.166666666666667	1 3 2 4
R4/N2R2		0.11031746031746	1 5 4 7 2 6 3 8
R6/N2R4		0.098278068382235	1 7 6 9 4 11 2 8 5 10 3 12
R8/N2R6		0.0977881546669576	1 9 8 11 6 13 4 15 2 10 7 12 5 14 3 16
R10/N2R8		0.0977785642305703	1 11 10 13 8 15 6 17 4 19 2 12 9 14 7 16 5 18 3 20

Рис. 5

Обчислення висоти хаосу в двомірних масивах методом грони

Вікова задача – ранжування (впорядкованості) на векторних чи тензорних масивах, коли одночасно кожен елемент групи має кілька ознак (координат), до сьогоднішнього дня вирішується тільки в дуже вузьких межах, в найпростіших випадках (коли вектори колінеарні або належать автомодельному підпростору, де існує будь-яка функціональна залежність між координатами [5]). В усіх інших випадках ранжування багатомірних величин взагалі не можливе, але саме такі задачі мають найбільший інтерес у сучасних дослідженнях багатовимірних величин, коли потрібно порівнювати (ранжувати) елементи багатовимірних масивів – механічні напруги в задачах міцності, ознаки деталей машин в автоматизованих зборочних виробництвах, порівняння будь-яких елементів множин за двома чи більше ознаками одночасно, в тому числі – в сучасних комп'ютеризованих експертних системах, наприклад – встановлення авторства в творах літератури та мистецтва.

Нами проведено повне статистичне моделювання виміру висоти перестановок для груп невеликої потужності ($n \le 5$) для розмірностей m є (1; 2; 3). Показана принципова можливість застосування комбінованого методу Грони для впорядкованості багатовимірних векторних чи тензорних масивів. Ідея комбінованого методу Грони полягає в розділеному вимірі висоти хаосу по кожному з індексів λ_{ij} багатовимірної змінної з подальшим їх додаванням:

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{m} \lambda_{ij} \qquad (15)$$

Наприклад, для n=4, m=2 побудовано λ_{Σ} для всіх $(4!)\cdot(4!) = 576$ перестановок і встановлено, що із 24 сценаріїв можливих комбінацій індексів елементів є вісім пар „близнюків", а це – 2/3 від загальної кількості. Кожна із можливих комбінацій перестановок 4-х двовимірних елементів має висоту хаосу в діапазоні $[0...46]$.

Проведені дослідження дозволяють запропонувати, крім методології ранжування багатовимірних масивів, нові підходи до розробки психологічних тестів, генерування задач на встановлення закономірностей, а також загальну методологію приведення багатовимірних величин до скалярної міри – висоти хаосу.

Таблиця 5. **Можливі групи перестановок для двомірних масивів при N=4**

Номер групи перестановок, S	Група	Кількість дискретних рівнів ВХ, **λΣ**
1	(11) (22) (33) (44)	24
2	(11) (22) (43) (34)	10
3	(11) (32) (43) (24)	16
4	(11) (32) (23) (44)	12
5	(11) (42) (23) (34)	16
6	(11) (42) (33) (24)	12
7	(21) (12) (33) (44)	12
8	(21) (12) (34) (43)	5
9	(21) (32) (13) (44)	16
10	(21) (32) (43) (14)	14
11	(21) (42) (14) (33)	12
12	(21) (42) (13) (34)	10
13	(31) (12) (23) (44)	16
14	(31) (12) (24) (43)	10
15	(31) (22) (43) (14)	14
16	(31) (22) (13) (44)	12
17	(31) (42) (13) (24)	7
18	(31) (42) (14) (23)	10
19	(41) (12) (23) (34)	14
20	(41) (12) (24) (33)	12
21	(41) (22) (14) (33)	8
22	(41) (22) (13) (34)	14
23	(41) (32) (13) (24)	10
24	(41) (32) (23) (14)	7

Таблиця 6. **Сумарна висота хаосу в двомірних перестановках для N=4**

S \ Висота хаосу λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
2		2					2					4					2					2	
3			1			2		2			1		1			2					1	2	
4					2		2		2		2										2		2
5			1			2		2			1		1			2					1	2	
6				2			2			2							2	2		2			
7													**2**		**2**		**2**		**2**		**2**		**2**
8														**4**					**4**				
9									1		1		1		1		2		2		2		2
10				1			1							2	1			2		3			2
11					1			1								3		2	3			2	
12									2						2			2		4			2
13									1		1		1		1		2		2		2		2
14										2					2			2		4			2
15								1			1		1			3		2			2	2	
16													**2**		**2**		**2**		**2**		**2**		**2**
17												2		4							2		
18									1			4			1							4	2
19				1			1							2	1			2		3			2
20					1			1								3		2	3			2	
21						2								2			4			4			
22								1			1		1			3		2			2	2	
23									1			4			1							4	2
24										4			2								2		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Продовження таблиці 6

S	Висота хаосу **λ**	**23**	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
1			1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
2				2					3					4					2					2	
3				2	1					2			1		1			2		2			1		
4			2		2										2		2		2		2				
5				2	1					2			1		1			2		2			1		
6						2		2	2							2			2			2			
7		**2**		**2**		**2**		**2**		**2**		**2**													
8	**8**						**4**					**4**													
9		2		2		2		2		1		1		1		1									
10		2			3		2			1	2							1			1				
11			2			3	2		3								1			1				
12		2			4		2			2						2									
13		2		2		2		2		1		1		1		1									
14		2			4		2			2						2									
15			2	2			2		3			1		1			1								
16		**2**		**2**		**2**		**2**		**2**		**2**													
17	8			2							4		2												
18		2	4							2			4			1									
19		2			3		2			1	2							1			1				
20			2			3	2		3								1			1				
21					4			4			2								2						
22			2	2			2		3				1		1			1							
23		2	4							1			4			1									
24	8			2									2			4									
	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Таблиця 7. **Групи-«близнюки» за сумарною висотою хаосу**

Номер групи	Група	Кількість дискретних рівнів ВХ
3	(11) (32) (43) (24)	16
5	(11) (42) (23) (34)	16
10	(21) (32) (43) (14)	14
19	(41) (12) (23) (34)	14
11	(21) (42) (14) (33)	12
20	41) (12) (24) (33)	12
15	(31) (22) (43) (14)	14
22	(41) (22) (13) (34)	14
9	(21) (32) (13) (44)	16
13	(31) (12) (23) (44)	16
18	(31) (42) (14) (23)	10
23	(21) (42) (13) (34)	10
12	(21) (42) (13) (34)	10
14	(31) (12) (24) (43)	10
7	(21) (12) (33) (44)	12
16	(31) (22) (13) (44)	12

Висновки:

1. Запропоновано загальну модель кінетики процесу хаотизації аттрактора Фейгенбаума та досліджено кількісні характеристики висоти хаосу після j-ої біфуркації.

2. Для аттрактора Фейгенбаума обчислена висота і відносна висота хаосу та показано, що після j-ої біфуркації при $j \to \infty$, Λ прямує до граничного значення відносної висоти хаосу $\Lambda_{lim} = 0{,}100562734297571\ldots$

3. Отримано граничне значення висоти хаосу в інших типах циклічних груп, зокрема, для груп R(J)/N1R(J-1) встановлено, що $\Lambda \to 0.281718171540955$.

4. Показана можливість застосування висоти хаосу для ранжування багатомірних масивів. Зокрема, побудовано повну групу подій висоти хаосу всіх можливих перестановок двомірних масивів невеликої розмірності (таблиця 6) та виявлені еквівалентні підгрупи (за сумарною висотою хаосу).

Література

1. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 411 с.

2. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем. – УФН, 1983, т. 141, № 2, с. 343–374.

3. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир, 1988. – 240 с.

4. *Шанявский А.А.* Самоорганизация кинетики усталостных трещин. – В кн.: Синергетика и усталостное разрушение металлов. – М.: Наука, 1989. – с. 57–76.

5. *Грабар І.Г.* Термоактиваційний аналіз та синергетика руйнування. – Житомир. – ЖІТІ. – 2002. – 312 с.

6. *Иванова В.С.* Разрушение металлов. – М.: Металлургия, 1979. – 167 с.

7. *Баланкин А.С.* Самоорганизующиеся и диссипативные структуры в деформируемом теле. – Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, № 19.

8. Уровни прочности и релаксационные явления в полимерах // *Цой Б., Каримов С.Н., Князев В.К. и др.* – ВМС, 1985, т. 27, № 3, с. 132 – 176.

9. *Грони В.* Основи математичної кібернетики. – Житомир: ЖДТУ. – 2004 – 428 с.