УДК 517.983

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННО-ОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С БАЗИСОМ

В. Ф. Журавлев

Житомир. нац. агроэкол. ун-т
Украина, 10008, Житомир, бульвар Старый, 7
e-mail: vfz2008@ukr.net

The paper considers the linear value problems for the operator equations with generally inverses operator in Banach space with have basis. When using the apparatus of generally inverses operator for generally inverses ones in Banach space one can get the solvability conditions and formulae for presenting the solutions of linear boundary-value problems for linear equations of the kind. The paper also highlights such specific cases of the above boundary-value problems fs the so-called n- and d- normally solvable boundary value problems, as well as normally solvable boundary-value problems for Noetherian operator equations.

Розглянуто лінійні крайові задачі для операторних рівнянь з узагальнено-оборотними операторами у банахових просторах, які мають базиси. За допомогою апарату узагальнено-обернених операторів, зостосованого до узагальнено-оборотних у банахових просторах, отримано умови розв'язності та формули для зображення розв'язків лінійних крайових задач для таких операторних рівнянь. Розглянуто частинні випадки цих крайових задач — так звані n- та d- нормально розв'язні крайові задачі, а також нормально розв'язні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь.

Постановка задачи. Пусть L — линейный ограниченный обобщенно-обратимый оператор, действующий из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$, причем пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ имеют базисы. Пространство $\mathbf{B}_1$ состоит из функций $z(t)$, определенных на конечном или бесконечном промежутке $\mathcal{I}$ со значениями в некотором банаховом пространстве числовых последовательностей $\mathbf{B}_1^s$, $z(t) \in \mathbf{B}_1$, $z(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1^s$, а $\mathbf{B}_2$ — банахово пространство функций $\varphi(t)$, определенных на том же промежутке $\mathcal{I}$ со значениями в некотором банаховом пространстве числовых последовательностей $\mathbf{B}_2^s$, $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2, \varphi(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbf{B}_2^s$.

Пусть $\ell = \operatorname{col}(l_1, l_2, l_3, \ldots,)$ — линейный ограниченный вектор-функционал, действующий из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство числовых последовательностей $\mathbf{B}^s$.

Из обобщенной обратимости оператора L следует [1], что оператор L нормально разрешим ($R(L)$ — замкнут), нуль-пространство $N(L)$ и образ $R(L)$ дополняемы в банаховых пространствах $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ соответственно. Это означает [2, 3], что существуют линейные ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ и $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$, разбивающие банаховы пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ на взаимно дополняемые подпространства

$$\mathbf{B}_1 = N(L) \oplus X_L, \quad \mathbf{B}_2 = Y_L \oplus R(L),$$

где Y_L — подпространство, изоморфное нуль-пространству $N(L^*)$ сопряженного к L оператора L^*.

Множество обобщенно обратимых операторов $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ в дальнейшем будем обозначать через $GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$.

Поскольку банаховы пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ имеют базисы, нуль-пространства $N(L)$ и $N(L^*)$ также имеют базисы.

Обозначим через $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset N(L)$, $f_i = \mathrm{col}(f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, f_i^{(3)}, \ldots)$, и $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty} \subset N(L^*)$, $\varphi_s(\cdot) = \mathrm{col}(\varphi_s^{(1)}(\cdot), \varphi_s^{(2)}(\cdot), \varphi_s^{(3)}(\cdot), \ldots)$, базисы нуль-пространств $N(L)$ и $N(L^*)$ соответственно. Для элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и функционалов $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ существуют сопряженно биортогональные [4] тотальная система функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N^*(L) \subset \mathbf{B}_1^*$, $\gamma_j(\cdot) = \mathrm{col}\,(\gamma_j^{(1)}(\cdot), \gamma_j^{(2)}(\cdot), \gamma_j^{(3)}(\cdot), \ldots)$, и полная система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{B}_2$, $\psi_k = \mathrm{col}\,(\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \psi_k^{(3)}, \ldots)$. По теореме Хана – Банаха каждый из функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$, определенный на подпространстве $N(L) \subset \mathbf{B}_1$, может быть продолжен, с сохранением нормы, на все пространство $\mathbf{B}_1$, а каждый из функционалов $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ — на все пространство $\mathbf{B}_2$.

Далее, пусть $X = (f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots)$, $\varGamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \ldots, \gamma_j(\cdot), \ldots)^T$, $\varPhi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_s(\cdot), \ldots)^T$, $\varPsi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k, \ldots)$ — мерные матрицы-операторы, где $\varGamma(X) = E_\infty$, $\varPhi(\varPsi) = E_\infty$, E_∞ — единичная матрица.

Тогда проекторы $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$ можно записать аналитически с помощью формул [5, с. 168, 172]

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{N(L)} z)(t) &= X(t)(\varGamma z)(\cdot) \quad \forall z \in \mathbf{B}_1, \\ (\mathcal{P}_{Y_L} y)(t) &= \varPsi(t)(\varPhi y)(\cdot) \quad \forall y \in \mathbf{B}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Ставится задача об условиях разрешимости и представлении решений операторного уравнения

$$(Lz)(t) = \varphi(t), \tag{2}$$

которые удовлетворяют условиям

$$(\ell z)(\cdot) = \alpha, \tag{3}$$

где $\alpha \in \mathbf{B}_s$.

Определение 1. *Систему линейных операторных уравнений (1), (2) будем называть линейной неоднородной краевой задачей для уравнения (1), а уравнения* $(\ell z)(\cdot) = \mathrm{col}\,((l_1 z)(\cdot), (l_2 z)(\cdot), (l_3 z)(\cdot), \ldots, (l_i z)(\cdot), \ldots) = \mathrm{col}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_i, \ldots)$ *— краевыми условиями этой задачи.*

Промежуточный результат. Рассмотрим задачу об условиях разрешимости и общем виде решений операторного уравнения

$$(Lz)(t) = \varphi(t), \tag{4}$$

удовлетворяющих начальному условию

$$z(t_0) = z_0, \tag{5}$$

где $t_0 \in \mathcal{I}$, $z_0 \in \mathbf{B}_1^s$.

Определение 2. *Задачу (4), (5) будем называть задачей Коши для неоднородного операторного уравнения (4).*

Известно [6], что операторное уравнение (4) разрешимо для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$, которые удовлетворяют условию

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = \Psi(t)(\Phi\varphi)(\cdot) = 0. \tag{6}$$

При выполнении условия (6) общее решение уравнения (4) представимо в виде [6]

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + (L^{-}\varphi)(t), \tag{7}$$

где $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{B}_1$, L^{-} — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору L, построение которого для различных типов операторов L изложено в [5–8].

Используя представление проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ (1), для каждого $\tilde{z}(t) \in N(L)$ получаем

$$(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) = X(t)(\Gamma\hat{z})(\cdot) = X(t)\hat{z}_0, \tag{8}$$

где $\hat{z}_0 = \operatorname{col}((\gamma_1\hat{z})(\cdot), (\gamma_2\hat{z})(\cdot), \ldots, (\gamma_j\hat{z})(\cdot), \ldots)$ — произвольный вектор-столбец констант. В [9, с. 129] показано, что линейное пространство, элементы которого — числовые последовательности $\hat{z}_0$ такие, что имеет место равенство (8), при соответствующем выборе нормы является банаховым пространством. В дальнейшем это банахово пространство будем обозначать через $\mathbf{B}_\mu^s$, μ — размерность (конечная или бесконечная) ядра оператора L.

Подставив (8) в (7), получим общее решение операторного уравнения (4)

$$z(t) = X(t)\hat{z}_0 + (L^{-}\varphi)(t). \tag{9}$$

Из (8) следует, что любой элемент $z(t)$ нуль-пространства $N(L)$ представим в виде

$$z(t) = X(t)\hat{z}_0.$$

Это соотношение справедливо для любого $t \in \mathcal{I}$, в том числе и для $t = t_0$, следовательно, для любого $z_0 = z(t_0)$ существует элемент $\hat{z}_0 \in \mathbf{B}_\mu^s$ такой, что выполняется равенство

$$z_0 = X(t_0)\hat{z}_0,$$

где $X(t_0) : \mathbf{B}_\mu^s \to \mathbf{B}_1^s$ — линейный ограниченный оператор.

Существование для любого $z_0 = z(t_0)$ элемента $\hat{z}_0$ означает, что матричное уравнение

$$X(t_0)\hat{z}_0 = z_0 \tag{10}$$

всюду разрешимо, т. е. 1) нуль-пространство $N(X^*(t_0)) = \{0\}$ и, как следствие, проектор на подпространство $Y_{X(t_0)} \subseteq \mathbf{B}_1^s$ равен нулю, $\mathcal{P}_{Y_{X(t_0)}} \equiv 0 \; \forall t_0 \in \mathcal{I}$; 2) существует правый обратный оператор $X_r^{-1}(t_0)$. Следовательно, матричный оператор $X(t_0)$ d-нормальный $(d=0)$, если $\dim\ker X(t_0)=\infty$, или нетеров,если $\dim\ker X(t_0)<\infty$ и $X(t_0)$ обобщенно-обратим, т. е. $X(t_0)\in GI(\mathbf{B}_\mu^s,\mathbf{B}_1^s)$.

Таким образом, матричное операторное уравнение

$$X(t_0)\hat{z}_0 = z_0 - (L^-\varphi)(t_0),$$

которое получается из уравнения (9) при $t=t_0$, всюду разрешимо, и его общее решение имеет вид [5, с. 175]

$$\hat{z}_0 = \mathcal{P}_{N(X(t_0))}z_\mu + X_r^{-1}(t_0)[z_0 - (L^-\varphi)(t_0)], \tag{11}$$

где $\mathcal{P}_{N(X(t_0))}$ — проектор банахова пространства $\mathbf{B}_\mu^s$ на нуль-пространство $N(X(t_0))$ оператора $X(t_0)$, z_μ — произвольный элемент банахова пространства последовательностей $\mathbf{B}_\mu^s$, $X_r^{-1}(t_0)$ — правый обратный матричный оператор к матричному оператору $X(t_0)$.

Подставив (11) в (9), получим общее решение задачи Коши (4), (5)

$$\begin{aligned} z(t) &= X(t)\{\mathcal{P}_{N(X(t_0))}z_\mu + X_r^{-1}(t_0)[z_0 - (L^-\varphi)(t_0)]\} + (L^-\varphi)(t) = \\ &= X_0(t)z_\mu + G_0(t) + X(t)X_r^{-1}(t_0)z_0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $X_0(t) = X(t)\mathcal{P}_{N(X(t_0))}$ — разрешающий оператор [3] однородной задачи $(\varphi(t) = 0, z_0 = 0)$, z_μ — произвольный вектор из банахова пространства $\mathbf{B}_\mu^s$,

$$G_0(t) = (L^-\varphi)(t) - X(t)X_r^{-1}(t_0)(L^-\varphi)(t_0). \tag{13}$$

Определение 3. *Оператор (13) будем называть оператором Грина полуоднородной* $(z_0=0)$ *задачи Коши (4), (5).*

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $L\in GI(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2)$, *причем пространства* $\mathbf{B}_1$ *и* $\mathbf{B}_2$ *имеют базисы. Задача Коши (3), (4) разрешима для тех и только тех* $\varphi(t)\in\mathbf{B}_2$, *которые удовлетворяют условию (6), любых* $z_0=z(t_0)$, $t_0\in\mathcal{I}$ *и ее общее решение представимо в виде*

$$z(t) = X_0(t)z_\mu + G_0(t) + X(t)X_r^{-1}(t_0)z_0.$$

Замечание 1. Если операторное уравнение (2) является всюду разрешимым, то $\mathcal{P}_{Y_L}\equiv 0$. В этом случае оператор L будет иметь ограниченный правый обратный оператор L_r^{-1} [5]. Если, кроме того, матрица-оператор $X(t)$ обратима для любого $t\in\mathcal{I}$, то $\mathcal{P}_{N(X(t_0))}=0$, задача Коши (4), (5) всюду и однозначно разрешима и при этом имеет решения вида

$$z(t) = X(t)X^{-1}(t_0)z_0 + (L_r^{-1}\varphi)(t) - X(t)X^{-1}(t_0)(L_r^{-1}\varphi)(t_0). \tag{14}$$

Замечание 2. Если L — дифференциальный оператор $(Lz)(t) = z'(t) - A(t)z(t)$, действующий в банаховом пространстве $C([a;b], \mathbf{B}^s)$ непрерывных на $[a;b]$ функций, то правый обратный оператор L_r^{-1} является интегральным и формула (14) принимает вид [3, с. 148]

$$z(t) = U(t, t_0)z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

где $U(t,\tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$ — эволюционый (разрешающий) оператор.

Основной результат. ***1. Бесконечномерные нормально разрешимые краевые задачи.*** Рассмотрим линейную неоднородную краевую задачу (2), (3).

Как было показано выше, уравнение (2) разрешимо при выполнении условия (6). При этом его общее решение записывается в виде (9).

Подставив (9) в краевое условие (3), получим матричное операторное уравнение относительно элемента $\hat{z}_0 \in \mathbf{B}^s_\mu$:

$$Q\hat{z}_0 = \alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot), \tag{15}$$

где $Q = \ell X(\cdot) : \mathbf{B}^s_\mu \to \mathbf{B}^s$ — матричный оператор, который получен подстановкой в краевое условие матричного оператора $X(t)$. Матричный оператор Q будет ограниченным как суперпозиция ограниченных операторов ℓ и $X(t)$.

Пусть оператор Q обобщенно-обратим, т. е. $Q \in GI(\mathbf{B}^s_\mu, \mathbf{B}^s)$. Вследствие нормальной разрешимости оператора Q уравнение (14) разрешимо для тех и только тех α и $\varphi(t)$, которые удовлетворяют условию

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\{\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)\} = 0, \tag{16}$$

где $\mathcal{P}_{Y_Q}$ — проектор на подпространство $Y \subset \mathbf{B}^s$, изоморфне нуль-пространству оператора Q^*, сопряженного к оператору Q. При выполнении условия (16) операторное уравнение (15) имеет решение

$$\hat{z}_0 = \mathcal{P}_{N(Q)}z_\mu + Q^-\{\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)\}, \tag{17}$$

где z_μ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}^s_\mu$, Q^- — обобщенно-обратный оператор к оператору Q.

Подставляя (17) в (9), получаем общее решение краевой задачи (2), (3) в банаховом пространстве с базисом

$$\begin{aligned} z(t) &= X(t)\{(\mathcal{P}_{N(Q)}z_\mu)(t) + Q^-[\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)]\} + (L^-\varphi)(t) = \\ &= X_\mu(t)z_\mu + (G\varphi)(t) + X(t)Q^-\alpha, \end{aligned} \tag{18}$$

где $X_\mu(t) = X(t)\mathcal{P}_{N(Q)}$ — разрешающий оператор однородной $(\varphi(t), \alpha = 0)$ краевой задачи (2), (3).

Определение 4. *Оператор* $(G\varphi)(t) = (L^-\varphi)(t) - X(t)Q^-\ell(L^-\varphi)(\cdot)$ *будем называть обобщенным оператором Грина полуоднородной* $(\alpha = 0)$ *краевой задачи (2), (3).*

Таким образом, для краевой задачи справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть банаховы пространства* $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ *имеют базисы и* $L \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, $Q \in GI(\mathbf{B}_\mu^s, \mathbf{B}^s)$. *Тогда однородная* $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевая задача (2), (3) имеет линейно независимые решения вида*

$$z(t) = X(t)\mathcal{P}_{N(Q)} z_\mu = X_\mu(t) z_\mu,$$

где $X_\mu(t)$ — *разрешающий оператор однородной* $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевой задачи,* z_μ — *произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{B}_\mu^s$.

Неоднородная краевая задача (2), (3) разрешима для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}^s$, *которые удовлетворяют условиям*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = \Psi(t)(\Phi\varphi)(\cdot) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\{\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)\} = 0,$$

и при этом ее общее решение имеет вид

$$z(t) = X_\mu(t) z_\mu + (G\varphi)(t) + X(t)Q^-\alpha,$$

где $(G\varphi)(t)$ — *обобщенный оператор Грина.*

Замечание 3. В случае, когда $Lz(t) = z'(t) - A(t)z(t)$ — дифференциальный оператор, который является всюду разрешимым, краевые задачи вида (2), (3) рассматривались в [10], [11].

Замечание 4. Сравнивая теорему 1 о существовании решений задачи Коши и теорему 2 о существовании решений краевой задачи, заключаем, что задача Коши для не всюду разрешимого операторного уравнения является специфической краевой задачей.

2. n-, d- нормально разрешимые краевые задачи. Далее рассмотрим два частных случая краевых задач (2), (3).

2.1. Пусть обобщенно обратимый оператор L — n-нормальный $(\dim N(L) = \mu < \infty)$ и действует из бесконечномерного банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в бесконечномерное банахово пространство $\mathbf{B}_2$, а линейный ограниченный вектор-функционал ℓ действует из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}^s$. Тогда матричный оператор Q будет также n-нормальным, т. е. размерность ядра $N(Q)$ будет конечной, а размерность ядра $N(Q)^*$ сопряженного матричного оператора Q^* — бесконечна.

Теорема 3. *Пусть банаховы пространства* $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ *имеют базисы и оператор* $L \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ *n-нормальный,* $Q \in GI(\mathbf{B}_1^s, \mathbf{B}^s)$, $\operatorname{rank} Q \leq \mu$. *Тогда однородная* $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевая задача (2), (3) имеет* $r = \mu - \operatorname{rank} Q$ — *параметрическое семейство линейно независимых решений вида*

$$z(t) = X_r(t) c_r, \quad c_r \in R^r,$$

где $X_r(t) = X(t)\mathcal{P}_{N_r(Q)}$ — *разрешающий оператор соответствующей (2), (3) однородной* $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевой задачи,* $\mathcal{P}_{N_r(Q)}$ — *оператор, составленный из* r *линейно* *независимых столбцов матрицы-проектора* $\mathcal{P}_{N(Q)}$, c_r *— произвольный постоянный вектор из евклидова пространства* R^r.

Неоднородная краевая задача (2), (3) разрешима для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}^s$, *которые удовлетворяют бесконечному числу линейно независимых условий*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = \Psi(t)(\Phi\varphi)(\cdot) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\{\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)\} = 0$$

и при этом она имеет r *— параметрическое семейство линейно независимых решений вида*

$$z(t) = X_r(t)c_r + (G\varphi)(t) + X(t)Q^-\alpha,$$

где $(G\varphi)(t)$ *— обобщенный оператор Грина полуоднородной* $(\alpha = 0)$ *краевой задачи (2), (3).*

2.2. Пусть обобщенно-обратимый оператор L действует из бесконечномерного банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в бесконечномерное банахово пространство $\mathbf{B}_2$, а линейный ограниченный вектор-функционал ℓ — из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в евклидово пространство R^m. Тогда матричный оператор Q будет d-нормальным, т. е. размерность его ядра $N(Q)$ бесконечна, а размерность ядра $N(Q^*)$ сопряженного матричного оператора Q^* конечна и равна $d \leq m$.

Теорема 4. *Пусть банаховы пространства* $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ *имеют базисы,* $L \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, $Q \in GI(\mathbf{B}_1^s, R^m)$ *и* $\operatorname{rank} Q \leq m$. *Тогда однородная* $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевая задача (2), (3) имеет бесконечномерное семейство линейно независимых решений вида*

$$z(t) = X_\mu(t)z_\mu,$$

где $X_\mu(t) = X(t)\mathcal{P}_{N(Q)}$ *— разрешающий оператор соответствующей (2), (3) однородной* $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевой задачи,* z_μ *— произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{B}_\mu^s$.

Неоднородная краевая задача (2), (3) разрешима для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$ *и* $\alpha \in \mathbf{B}^s$, *которые удовлетворяют бесконечному числу линейно независимых условий*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = \Psi(t)(\Phi\varphi)(\cdot) = 0$$

и $d = m - \operatorname{rank} Q$ *линейно независимым условиям*

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)\} = 0,$$

и при этом она имеет бесконечномерное семейство линейно независимых решений вида

$$z(t) = X_\mu(t)z_\mu + (G\varphi)(t) + X(t)Q^-\alpha,$$

где $\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}$ *—* $(d \times m)$*-мерная матрица-оператор, составленная из полной системы* d *линейно независимых строк матрицы* $\mathcal{P}_{Y_Q}$, $(G\varphi)(t)$ *— обобщенный оператор Грина полуоднородной* $(\alpha = 0)$ *краевой задачи (2), (3).*

Следуя [11], краевые задачи, описываемые теоремами 3 и 4, будем называть n- и d-нормально разрешимыми.

Замечание 5. Для случая счетномерных краевых задач для дифференциальных систем уравнений в банаховых пространствах $((Lz)(t) \equiv z'(t) - A(t)z(t))$ подобные задачи рассмотрены в [11]. В этом случае обобщенно-обратный оператор L^- имеет интегральное представление, а обобщенный оператор Грина имеет вид

$$(G\varphi)(t) = \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds - X(t)Q^-\ell \int_a^b K(\cdot,s)\varphi(s)ds.$$

Замечание 6. Если функционал ℓ удовлетворяет условию [12, с. 15]

$$\ell \int_a^b K(\cdot,s)\varphi(s)ds = \int_a^b \ell K(\cdot,s)\varphi(s)\,ds,$$

то обобщенный оператор Грина имеет представление

$$(G\varphi)(t) = \int_a^b G(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

ядро которого

$$G(t,s) = K(t,s) - X(t)Q^-\ell K(\cdot,s)$$

называется *обобщенной матрицей Грина*.

3. Нормально разрешимые краевые задачи для нетеровых операторных уравнений. Рассмотрим краевую задачу (2), (3) в предположении, что L — линейный ограниченный нетеров $(\dim\ker L = \mu < \infty, \dim\ker L^* = \nu < \infty)$ оператор, действующий из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$, $\ell : \mathbf{B}_1 \to R^m$ — линейный ограниченный вектор-функционал, $\alpha \in R^m$.

Рассмотрим задачу о необходимых и достаточных условиях разрешимости и структуре множества решений $z(t) \in \mathbf{B}_1$ линейной неоднородной краевой задачи (2), (3).

Поскольку нуль-пространства $N(L)$ и $N(L^*)$ операторов L и ему сопряженного L^* конечномерны, они дополняемы в банаховых пространствах $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ соответственно, и имеют конечномерные базисы. Следуя [5, с. 168, 172], построим проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_{Y_L}$.

Нетерово нормально разрешимое операторное уравнение (2) разрешимо для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$, которые удовлетворяют условию

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = \Psi(t)(\Phi\varphi)(\cdot) = 0, \tag{19}$$

состоящему из ν линейно независимых условий.

При выполнении условия (19) общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$z(t) = X_\mu(t)c_\mu + (L^-\varphi)(t), \tag{20}$$

где $X_\mu(t)$ — $(\infty \times \mu)$-мерная матрица-оператор, составленная из μ линейно независимых базисных векторов нуль-пространства $N(L)$ оператора L, $c_\mu \in R^\mu$ — произвольный постоянный вектор, $L^- : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$ — ограниченный обобщенно обратный оператор к нетеровому оператору L [8, с. 53].

Для того чтобы решение (20) неоднородного операторного уравнения (19) было решением краевой задачи (2), (3), необходимо и достаточно, чтобы вектор $c_\mu \in R^\mu$ удовлетворял алгебраической системе

$$\ell X_\mu(\cdot)c_\mu + \ell(L^-\varphi)(\cdot) = \alpha,$$

полученной после подстановки решения (20) в краевое условие (3).

Пусть $Q = lX(\cdot)$ — $(m\times\mu)$-мерная постоянная матрица, $\mathcal{P}_{N(Q)} : R^\mu \to N(Q)$ — $(\mu\times\mu)$-мерная матрица-проектор; $\mathcal{P}_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$ — $(m \times m)$-мерная матрица-проектор; Q^- — $(\mu \times m)$-мерная матрица, обобщенно-обратная к матрице Q.

Из алгебраического уравнения

$$Qc_\mu = \alpha - l(L^-\varphi) \tag{21}$$

определим константу $c_\mu \in R^\mu$, при которой решение (20) уравнения (2), существующее при условия (19), будет решением краевой задачи (2), (3). Из теоремы 3.9 [8, с. 92] следует, что уравнение (21) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mathcal{P}_{Y_{dQ}}\{\alpha - \ell(L^-)(\cdot)\} = 0 \quad d = m - \operatorname{rank} Q,$$

и при этом имеет r-параметрическое $(r = \mu - \operatorname{rank} Q)$ семейство решений вида

$$c = \mathcal{P}_{N_r(Q)}c_r + Q^-\{\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)\}, \tag{22}$$

где $\mathcal{P}_{Y_{dQ}}$ — $(d \times m)$-мерная матрица, составленная из полной системы d линейно независимых строк матрицы-проектора $\mathcal{P}_{Y_Q}$, $\mathcal{P}_{N_r(Q)}$ — $(\mu \times r)$-мерная матрица, составленная из полной системы r линейно независимых столбцов матрицы-проектора $\mathcal{P}_{N(Q)}$.

Подставляя (22) в (20), получаем общее решение краевой задачи (2), (3)

$$z(t) = X_r(t)c_r + (G\varphi)(t) + X(t)Q^-\alpha.$$

Здесь $X_r(t) = X(t)\mathcal{P}_{N_r(Q)}$ — матрица-оператор, столбцами которой является полная система r-линейно независимых решений однородной $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ краевой задачи (2), (3), $G : \mathbf{B}_2 \to \ker \ell \subset \mathbf{B}_1$ $(G\varphi)(t) = (L^-\varphi)(t) - X(t)Q^+l(L^-\varphi)(\cdot)$ — обобщенный оператор Грина полуоднородной $(\alpha = 0)$ краевой задачи (2), (3).

Таким образом, для краевой задачи (19), (20) справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Если* $\operatorname{rank} Q \le \min(m,\mu)$, *то соответствующая (2), (3) однородная* $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевая задача имеет* r *и только* $r = \mu - \operatorname{rank} Q$ *линейно независимых решений*

$$z(t) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in R^r.$$

Неоднородная краевая задача (2), (3) с нетеровым оператором $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ разрешима для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$ и $\alpha \in R^m$, которые удовлетворяют $\nu + d$ линейно независимым условиям

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = 0$$
$$\mathcal{P}_{Y_{dQ}}\{\alpha - \ell(L^{-}\varphi)(\cdot)\} = 0, \quad d = m - \operatorname{rank} Q), \tag{23}$$

и при этом имеет r-параметрическое семейство линейно независимых решений

$$z(t) = X_r(t)c_r + (G\varphi)(t) + X(t)Q^{+}\alpha. \tag{24}$$

Рассмотрим далее краевую задачу (2), (3) в предположении, что операторное уравнение (2) везде разрешимо. Это означает, что $R(L) = \mathbf{B}_2$ и, следовательно, $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$. По следствию 2 из теоремы 2.3 [8, с. 55] операторное уравнение $(Lz)(t) = \varphi(t)$ разрешимо при любом $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$ и имеет решение

$$z(t) = X_{\mu}(t)c_{\mu} + (L_r^{-1}\varphi)(t), \quad c_{\mu} \in R^{\mu}, \tag{25}$$

где L_r^{-1} — линейный ограниченный правый обратный оператор.

Вследствие всюду разрешимости уравнения $(Lz)(t) = \varphi(t)$ теорема 5 упрощается и формулируется следующим образом.

Теорема 6. *Если $\operatorname{rank} Q \le \min(m, \mu)$, то однородная $(\varphi(t) = 0, \alpha = 0)$ краевая задача (2), (3) имеет r и только r $(r = \mu - \operatorname{rank} Q)$ линейно независимых решений*

$$z(t) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in R^r.$$

Неоднородная краевая задача (2), (3) для всюду разрешимого операторного уравнения $Lz = \varphi$ разрешима при тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$ и $\alpha \in R^m$, которые удовлетворяют d линейно независимым условиям

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell(L_r^{-1}\varphi)(\cdot)\} = 0, \quad d = m - \operatorname{rank} Q$$

и при этом имеет r-параметрическое семейство решений

$$z(t) = X_r(t)c_r + (G\varphi)(t) + X(t)Q^{-}\alpha,$$

где $(G\varphi)(t) = (L_r^{-1}\varphi)(t) - X(t)Q^{-}\ell(L_r^{-1}\varphi)(\cdot)$ — обобщенный оператор Грина.

Замечание 7. Если $\mu = m$ и $\operatorname{rank} Q = \mu$, то $\det Q \ne 0$ $(P_{Y_Q} \equiv 0, P_{N(Q)} \equiv 0)$ и $Q^{-} = Q^{-1}$. В этом случае краевая задача (2), (3) не только везде, но и однозначно разрешима и обобщенный оператор Грина переходит в оператор Грина

$$(G\varphi)(t) = (L_r^{-1}\varphi)(t) - X(t)Q^{-1}\ell(L_r^{-1}\varphi)(\cdot).$$

1. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.
2. *Кадец М. И., Митягин Б. С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. — 1973. — **28**, вып. 6. — С. 77 – 94.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
4. *Гринблюм М. М.* Биортогональные системы в пространстве Банаха // Докл. АН СССР. — 1945. — **47**, № 2. — С. 79 – 82.
5. *Журавлев В. Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных n- d- нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. — **62**, № 2. — С. 167 – 182.
6. *Журавлев В. Ф.* Решение нормально разрешимых операторных уравнений в банаховых пространствах с базисом // Докл. РАН. — 1997. — **352**, № 3. — С. 304 – 306.
7. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
8. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
9. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.:Высш. шк.,1982. — 271 с.
10. *Журавлев В. Ф.* Линейные краевые задачи для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах // Міжнар. наук. конф. „Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування"з нагоди 70-ти річчя академіка А. М. Самойленка: Тез. доп. (18 – 21 червня 2008 р.). — Мелітополь, 2008. — С. 50.
11. *Бойчук А. А., Панасенко Є. В.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 16 – 19.
12. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. — Киев: Наук. думка, 1978. — 218 с.

Получено 03.03.10