

**ОБОБЩЕНИЕ ЛЕММЫ ШМИДТА
НА СЛУЧАЙ n (d)-НОРМАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

В. Ф. Журавлев

*Житомир. нац. агроэкол. ун-т
Украина, 10008, Житомир, бульв. Старый, 7
e-mail: vfz2008@ukr.net*

We generalize the known Schmidt lemma to the case of a linear bounded normally solvable operator on an infinite dimensional Banach space that is n - or d -normal with the assumption that the kernel and the image of the operator have complements in the space.

Узагальнено відому лему Шмідта на випадок лінійних обмежених нормально розв'язних операторів у нескінченновимірних банахових просторах, які є n - або d -нормальними. Припускається, що ядро й образ оператора доповнювані в цих просторах.

Лемма Шмидта [1] наиболее полно изучена и широко применяется для обобщенного обращения линейных ограниченных нормально разрешимых операторов, являющихся фредгольмовыми (с ненулевыми ядрами), в виде так называемой конструкции Шмидта [2]. Ее аналог для нетеровых операторов в конечномерных банаховых и гильбертовых пространствах рассмотрен в [3].

Целью данной работы является доказательство утверждений, обобщающих лемму Шмидта на случай линейных ограниченных нормально разрешимых операторов, являющихся n - или d -нормальными и действующих в бесконечномерных банаховых пространствах.

Постановка задачи. Пусть L — линейный ограниченный нормально разрешимый оператор, действующий из банахового пространства B_1 в банахово пространство B_2 . Обозначим через $\dim N(L) = \mu$ и $\dim N(L^*) = \nu$ размерности нуль-пространств оператора L и ему сопряженного L^* соответственно. По классификации С. Г. Крейна [4] нормально разрешимый оператор L является n -нормальным, если μ конечно, а ν бесконечно, и d -нормальным, если, наоборот, μ бесконечно, а ν конечно.

Если $L : B_1 \rightarrow B_2$ — линейный ограниченный n -нормальный оператор, то будем предполагать, что его образ $R(L)$ дополняем [5] в пространстве B_2 , т. е.

$$B_2 = Y \oplus R(L), \quad (1)$$

а если $L : B_1 \rightarrow B_2$ — линейный ограниченный d -нормальный оператор, то его ядро $N(L)$ дополняемо в пространстве B_1 , т. е.

$$B_1 = N(L) \oplus X. \quad (2)$$

Основной результат. Проведем все рассуждения сначала для n -нормальных операторов. Подпространство $N(L)$ вследствие конечномерности ($\mu < \infty$) имеет полную систему базисных элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\mu} \subset N(L)$, $f_i = \text{col}(f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, f_i^{(3)}, \dots)$. Пусть пространство

\mathbf{B}_2 имеет базис. Известно [6, с. 131], что \mathbf{B}_2^* также имеет базис. Следовательно, подпространство $N^*(L) \subset \mathbf{B}_2^*$ имеет полную систему базисных элементов (функционалов) $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^\infty \subset N(L^*)$, $\varphi_s(\cdot) = \text{col}(\varphi_s^{(1)}(\cdot), \varphi_s^{(2)}(\cdot), \varphi_s^{(3)}(\cdot), \dots)$. Для элементов $\{f_i\}_{i=1}^\mu$ и функционалов $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^\infty$ существуют сопряженно биортогональные [7] система функционалов $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^\mu \subset \mathbf{B}_1^*$, $\gamma_j(\cdot) = \text{col}(\gamma_j^{(1)}(\cdot), \gamma_j^{(2)}(\cdot), \gamma_j^{(3)}(\cdot), \dots)$ и полная система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbf{B}_2$, $\psi_k = \text{col}(\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \psi_k^{(3)}, \dots)$. Заметим, что каждый из функционалов $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^\mu$, определенный на подпространстве $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ (по теореме Хана – Банаха), может быть продолжен, с сохранением нормы, на все пространство \mathbf{B}_1 .

Обозначим через

$$X = (f_1, f_2, \dots, f_\mu), \quad \Gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \dots, \gamma_\mu(\cdot))^T \quad (3)$$

$$\Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_k(\cdot), \dots)^T, \quad \Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots)$$

соответственно $(\infty \times \mu)$ -, $(\mu \times \infty)$ -, $(\infty \times \infty)$ - и $(\infty \times \infty)$ -мерные матрицы, причем $\Gamma(X) = E_\mu$, $\Phi(\Psi) = E_\infty$, E_μ , E_∞ — единичные матрицы.

Оператор проектирования $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ построим по формуле

$$\mathcal{P}_{N(L)}(\cdot) = X\Gamma(\cdot), \quad \mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1.$$

Для построения оператора проектирования $\mathcal{P}_Y : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2$ поступим следующим образом. Определим последовательность проекторов

$$\mathcal{P}_{Y_j}(\cdot) = \Psi_j \Phi_j(\cdot) \quad (4)$$

пространства \mathbf{B}_2 на подпространства $Y_j \subset Y$, натянутые на элементы $\{\psi_k\}_{k=1}^j$.

Лемма 1. Последовательность (4) проекторов \mathcal{P}_{Y_j} сильно (поточечно) сходится к проектору

$$\mathcal{P}_Y(\cdot) = \Psi\Phi(\cdot) = \lim_{j \rightarrow \infty} \Psi_j \Phi_j(\cdot), \quad \mathcal{P}_Y : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y.$$

где $Y \subset \mathbf{B}_2$ — бесконечномерное пространство, натянутое на полную систему элементов $\{\psi_s\}_{s=1}^\infty$.

Доказательство. Согласно определению сильной сходимости по норме пространства \mathbf{B}_2 , с учетом определения матриц Φ и Ψ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_Y y - \mathcal{P}_{Y_j} y\| &= \left\| \sum_{\xi=1}^{\infty} \varphi_\xi(y) \psi_\xi - \sum_{\xi=1}^j \varphi_\xi(y) \psi_\xi \right\| = \\ &= \left\| \sum_{\xi=j+1}^{\infty} \varphi_\xi(y) \psi_\xi \right\| \leq \sum_{\xi=j+1}^{\infty} \|\varphi_\xi(y) \psi_\xi\| \quad \forall y \in Y \subset \mathbf{B}_2. \end{aligned}$$

Величина $\sum_{\xi=j+1}^{\infty} \|\varphi_\xi(y) \psi_\xi\|$ стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$ как остаток сходящегося ряда $\sum_{\xi=1}^{\infty} \varphi_\xi(y) \psi_\xi$ разложения элемента $y \in Y$ по системе элементов $\{\psi_\xi\}_{\xi=1}^\infty$. А так как

функционалы $\{\varphi_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ продолжаемы с сохранением нормы на все пространство B_2 , то $\sum_{\xi=j+1}^{\infty} \|\varphi_{\xi}(y)\varepsilon_{\xi}\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ для любого $y \in B_2$.

Лемма доказана.

Покажем, что именно построенные проекторы разбивают пространства B_1 и B_2 на взаимно дополняющие подпространства по формулам (1), (2).

Лемма 2. *Операторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и \mathcal{P}_Y являются ограниченными проекторами в банаховых пространствах B_1 и B_2 и разбивают их в прямые суммы замкнутых подпространств по формулам (1), (2).*

Доказательство. Прежде всего докажем, что операторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и \mathcal{P}_Y являются проекторами, т. е. удовлетворяют условиям $\mathcal{P}_{N(L)}^2 = \mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_Y^2 = \mathcal{P}_Y$, определяющим проекторы

$$\mathcal{P}_{N(L)}^2(\cdot) = \mathcal{P}_{N(L)}(\mathcal{P}_{N(L)}(\cdot)) = X\Gamma(X\Gamma(\cdot)) = X\Gamma(X)\Gamma(\cdot) = X\Gamma(\cdot) = \mathcal{P}_{N(L)}(\cdot),$$

так как $\Gamma(X) = E_n$, и

$$\mathcal{P}_Y^2(\cdot) = \mathcal{P}_Y(\mathcal{P}_Y(\cdot)) = \Psi\Phi(\Psi\Phi(\cdot)) = \Psi\Phi(\Psi)\Phi(\cdot) = \Psi\Phi(y\cdot) = \mathcal{P}_Y(\cdot),$$

так как $\Phi\Psi = E_p$.

Таким образом, проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и \mathcal{P}_Y разбивают пространства B_1 и B_2 в прямые топологические суммы замкнутых подпространств:

$$B_1 = N(\mathcal{P}_{N(L)}) \oplus R(\mathcal{P}_{N(L)}), \quad B_2 = N(\mathcal{P}_Y) \oplus R(\mathcal{P}_Y).$$

Далее покажем, что

$$\begin{aligned} N(L) &= R(\mathcal{P}_{N(L)}), \quad R(L) = N(\mathcal{P}_Y), \\ Y &= R(\mathcal{P}_Y), \quad X = N(\mathcal{P}_{N(L)}). \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку $L\mathcal{P}_{N(L)}x = LX\Gamma(x) = 0$, $x \in B_1$ то $R(\mathcal{P}_{N(L)}) \subset N(L)$. Пусть $x \in N(L)$, тогда $x = Xc$. Применив к последнему равенству матрицу функционалов Γ , получим $c = \Gamma(x)$, т. е. $x = X\Gamma(x)$. Значит, $x = \mathcal{P}_{N(L)}x$ и $x \in R(\mathcal{P}_{N(L)})$. Таким образом, $N(L) \subset R(\mathcal{P}_{N(L)})$ и первое равенство из (5) доказано.

Поскольку $\mathcal{P}_Y Lz = \Psi\Phi(Lz) = \Psi(L^*\Phi)(z) = 0$ (φ_s — базисные векторы нуль-пространства оператора L^*), то $R(L) \subset N(\mathcal{P}_Y)$. С другой стороны, если $y \in N(\mathcal{P}_Y)$, то

$$\mathcal{P}_Y y = \Psi\Phi(y) = 0,$$

т. е. $\varphi_s(y) = 0$, $s = 1, 2, \dots, \infty$. А это в силу нормальной разрешимости оператора L означает, что $y \in R(L)$. Значит, $N(\mathcal{P}_Y) \subset R(L)$ и доказательство второго равенства из (5) завершено.

Третье и четвертое равенства из (5) доказываются аналогично.

Таким образом, проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и \mathcal{P}_Y разбивают банаховы пространства B_1 и B_2 в прямые суммы замкнутых подпространств по формулам (1), (2).

Ограниченность проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ следует из его конечномерности, а проектора \mathcal{P}_Y — из дополняемости образа $R(L)$ оператора L [8].

Лемма доказана.

Поскольку системы базисных элементов $\{\varphi(\cdot)_s\}_{s=1}^\nu \subset B_2^*$ нуль-пространства $N(L^*)$ и элементов $\{\psi_s\}_{s=1}^\nu \subset Y \subset B_2$ сопряженно биортогональны $\varphi_s(\psi_k) = \delta_{sk}$, между ними существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, подпространства $N(L^*)$ и Y изоморфны и имеют одинаковые размерности, $\dim N(L^*) = \dim Y$. Вследствие того, что μ конечно, а ν бесконечно, можно установить изоморфизм между $N(L)$ и некоторым подпространством $Y_1 \subset Y$.

Построим этот изоморфизм.

Обозначим через

$$\bar{\Phi}(\cdot) = (\bar{\varphi}_1(\cdot), \bar{\varphi}_2(\cdot), \dots, \bar{\varphi}_\mu(\cdot))^T \quad \text{и} \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_\mu) \quad (6)$$

соответственно $(\mu \times \infty)$ - и $(\infty \times \mu)$ -мерные матрицы, составленные из μ строк и столбцов матриц $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Psi}$ соответственно. Матрица $\bar{\Psi}$ составлена из системы элементов $\{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^\mu \subset \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, на которую натянуто подпространство Y_1 , а матрица $\bar{\Phi}$ — из функционалов $\{\bar{\varphi}_s\}_{s=1}^\mu \subset \{\varphi_s\}_{s=1}^\infty$, которые удовлетворяют соотношению $\bar{\Phi}(\bar{\Psi}) = E_\mu$. Линейный ограниченный обратимый оператор $J : N(L) \rightarrow Y_1 \subseteq Y$, осуществляющий изоморфизм $N(L)$ на Y_1 , и ему обратный $J^{-1} : Y_1 \rightarrow N(L)$ построим по формулам

$$J(\cdot) = \bar{\Psi} \Gamma(\cdot), \quad (\cdot) \in N(L),$$

$$J^{-1}(\cdot) = X \bar{\Phi}(\cdot), \quad (\cdot) \in Y_1.$$

По теореме Хана – Банаха каждый из линейных функционалов γ_i с сохранением нормы может быть продолжен на все пространство B_1 , а каждый из линейных функционалов $\bar{\varphi}_s$ — на все пространство B_2 . В связи с этим обозначим расширение оператора $J : N(L) \rightarrow Y$ на все пространство B_1 через $\bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$, а расширение ему обратного J^{-1} на пространство B_2 через $\bar{\mathcal{P}}_{N(L)}$, т. е.

$$\bar{\mathcal{P}}_{Y_1}(\cdot) = \bar{\Psi} \Gamma(\cdot), \quad (\cdot) \in B_1,$$

$$\bar{\mathcal{P}}_{N(L)}(\cdot) = X \bar{\Phi}(\cdot), \quad (\cdot) \in B_2.$$

Используя обозначения (6), проектирующий оператор $\mathcal{P}_{Y_1} : B_2 \rightarrow Y_1 \subset Y$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_{Y_1}(\cdot) = \bar{\Psi} \bar{\Phi}(\cdot).$$

Этот оператор разбивает подпространство Y в прямую топологическую сумму подпространств

$$Y = Y_1 \oplus Y_2, \quad (7)$$

где $Y_2 = \mathcal{P}_{Y_2} B_2 = (\mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_{Y_1}) B_2$ и является ограниченным.

Для класса нормально разрешимых операторов, являющихся n -нормальными, докажем утверждение, аналогичное лемме Шмидта.

Лемма 3. Пусть $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ — линейный ограниченный n -нормальный оператор, причем образ $R(L)$ дополняем в пространстве \mathbf{B}_2 . Тогда оператор $\bar{L} = L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ имеет ограниченный левый обратный

$$\bar{L}_{l_0}^{-1} = (L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1}.$$

Общий вид обратных слева операторов $\bar{L}_{l_0}^{-1}$ определяется формулой

$$\bar{L}_{l_0}^{-1} = \bar{L}_{l_0}^{-1} (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}).$$

Доказательство. Пусть L — n -нормальный оператор. Для обратимости слева оператора \bar{L} необходимо и достаточно, чтобы [9]:

а) $\ker \bar{L} = \{0\}$;

б) линейное многообразие $R(\bar{L})$ являлось подпространством, имеющим прямое дополнение в \mathbf{B}_2 .

Покажем, что $\ker \bar{L} = \{0\}$. Предположим, что существует $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbf{B}_1$, такое, что

$$L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} x_0 = L x_0 + \bar{\Psi} \Gamma(x_0) = 0.$$

Очевидно, что $L x_0 \in R(L)$, а из определения оператора $\bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ следует, что $\bar{\mathcal{P}}_{Y_1} x_0 \in Y_1 \subset \dots \perp Y$. Но подпространства $R(L)$ и Y взаимно дополняют друг друга до всего пространства \mathbf{B}_2 , следовательно, $R(L) \cap Y = \{0\}$, т. е. они имеют только один общий элемент — нулевой. Таким образом, $L x_0 = 0$ и $\bar{\mathcal{P}}_{Y_1} x_0 = 0$. Из этого следует, что $x_0 \in N(L)$ и $x_0 \in N(\bar{\mathcal{P}}_{Y_1}) \subset X$. Но подпространства $N(L)$ и X также взаимно дополняют друг друга до пространства \mathbf{B}_1 , следовательно, $N(L) \cap X = \{0\}$. Отсюда следует, что $x_0 = 0$.

Дополняемость образа $R(\bar{L})$ в пространстве \mathbf{B}_2 следует из (7) и дополняемости подпространства $R(L)$

$$\mathbf{B}_2 = R(L) \oplus Y_1 \oplus Y_2 = R(\bar{L}) \oplus Y_2. \quad (8)$$

Следовательно, оператор \bar{L} имеет левый обратный оператор. Оператор \bar{L} осуществляет взаимно однозначное соответствие банахова пространства \mathbf{B}_1 на подпространство $\mathbf{B}_2 \ominus Y_2$, тогда по теореме Банаха [10] оператор \bar{L}_l^{-1} ограничен. Известно [9, с. 61], что если оператор проектирования \mathcal{P} имеет свойство $R(\mathcal{P}) = R(\bar{L})$, то общий вид левых обратных операторов имеет представление $\bar{L}_{l_0}^{-1} \mathcal{P}$. Как следует из (8), такое свойство имеет оператор $I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}$, т. е. $R(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}) = R(\bar{L})$, значит, общее представление левых обратных операторов можно записать в виде

$$\bar{L}_{l_0}^{-1} = \bar{L}_{l_0}^{-1} (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}).$$

Лемма доказана.

Замечания. 1. Если $\dim \ker L < \dim \ker L^* < \infty$, т. е. L — нетеров оператор отрицательного индекса, то лемма 3 переходит в лемму 2.4 [3, с. 47].

2. Если $\dim \ker L = \dim \ker L^* = n < \infty$, т. е. L — фредгольмов оператор ненулевого индекса, то лемма 3 переходит в лемму Шмидта [2, с. 340].

Пусть теперь $L : B_1 \rightarrow B_2$ — линейный ограниченный d -нормальный оператор. В этом случае подпространство $N(L)$ бесконечномерно ($\mu = \infty$), а подпространство $N(L^*)$ конечномерно ($\nu < \infty$). Пусть пространство B_1 имеет базис. Следовательно, $N(L)$ также имеет базис. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset N(L)$ — полная система базисных элементов. Подпространство $N(L^*)$ имеет конечномерный базис $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu} \subset N(L^*)$. Для элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и функционалов $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu}$ существуют сопряженно биортогональные [7] система функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B_1^*$ и полная система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\nu} \subset B_2$. Каждый из функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu}$, определенный на подпространстве $N(L) \subset B_1$ и $Y \subset B_2$ (по теореме Хана – Банаха), может быть продолжен, с сохранением нормы, на пространства B_1 и B_2 соответственно.

Аналогично (3) обозначим через

$$X = (f_1, f_2, \dots, f_s, \dots), \quad \Gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \dots, \gamma_s(\cdot), \dots)^T,$$

$$\Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_{\nu}(\cdot))^T, \quad \Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{\nu}).$$

соответственно $(\infty \times \infty)$ -, $(\infty \times \infty)$ -, $(\nu \times \infty)$ - и $(\infty \times \nu)$ -мерные матрицы, причем $\Gamma(X) = E_{\infty}$, $\Phi(\Psi) = E_{\nu}$, E_{∞} , E_{ν} — единичные матрицы.

Для построения оператора проектирования $\mathcal{P}_{N(L)} : B_1 \rightarrow N(L)$ определим последовательность проекторов

$$\mathcal{P}_{N_i(L)}(\cdot) = X_i \Gamma_i(\cdot), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

пространства B_1 на подпространства $N_i(L)$ нуль-пространства $N(L)$.

Лемма 4. Последовательность (9) проекторов $\mathcal{P}_{N_i(L)}$ сильно (поточечно) сходится к проектору

$$\mathcal{P}_{N(L)}(\cdot) = X \Gamma(\cdot) = \lim_{i \rightarrow \infty} X_i \Gamma_i(\cdot), \quad \mathcal{P}_{N(L)} : B_1 \rightarrow N(L). \quad (10)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Оператор проектирования $\mathcal{P}_Y : B_2 \rightarrow Y$ пространства B_2 на подпространство Y определим по формуле

$$\mathcal{P}_Y(\cdot) = \Psi \Phi(\cdot) \quad (11)$$

Для операторов проектирования (10) и (11) справедливы утверждения леммы 2.

Поскольку μ бесконечно, а ν конечно, можно установить изоморфизм между $N_1(L) \subset N(L)$ и Y .

Построим этот изоморфизм. Обозначим через

$$\bar{X} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{\nu}), \quad \bar{\Gamma}(\cdot) = (\bar{\gamma}_1(\cdot), \bar{\gamma}_2(\cdot), \dots, \bar{\gamma}_{\nu}(\cdot))^T \quad (12)$$

соответственно $(\infty \times \nu)$ - и $(\nu \times \infty)$ -мерные матрицы. Тогда линейный ограниченный обратимый оператор $J : N_1(L) \rightarrow Y$, осуществляющий изоморфизм $N_1(L)$ на Y , и ему обратный $J^{-1} : Y \rightarrow N_1(L)$ построим по формулам

$$J(\cdot) = \Psi \bar{\Gamma}(\cdot), \quad (\cdot) \in N_1(L),$$

$$J^{-1}(\cdot) = \bar{X}\Phi(\cdot), \quad (\cdot) \in Y.$$

Матрица \bar{X} составлена из ν столбцов матрицы X , а матрица $\bar{\Gamma}(\cdot)$ — из функционалов матрицы $\Gamma(\cdot)$, которые удовлетворяют соотношению $\bar{\Gamma}(\bar{X}) = E_\nu$.

Обозначим расширение оператора $J : N(L) \rightarrow Y$ на все пространство B_1 через $\bar{\mathcal{P}}_Y$, а расширение ему обратного J^{-1} на пространство B_2 — через $\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$, т. е.

$$\bar{\mathcal{P}}_Y(\cdot) = \Psi\bar{\Gamma}(\cdot), \quad (\cdot) \in B_1,$$

$$\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}(\cdot) = \bar{X}\Phi(\cdot), \quad (\cdot) \in B_2.$$

По аналогии с (11) проектирующий оператор $\mathcal{P}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N_1(L) \subset N(L)$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_{N_1(L)}(\cdot) = \bar{X}\bar{\Gamma}(\cdot). \tag{13}$$

Этот оператор ограничен и разбивает подпространство $N(L)$ в прямую топологическую сумму подпространств

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L), \quad N_2(L) = \mathcal{P}_{N_2(L)}\mathbf{B}_1, \tag{14}$$

где $\mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_1(L)}$ — ограниченный проектор.

Для класса нормально разрешимых операторов, являющихся d -нормальными, докажем утверждение, аналогичное лемме Шмидта.

Лемма 5. Пусть $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ — линейный ограниченный d -нормальный оператор, причем ядро $N(L)$ дополняемо в пространстве \mathbf{B}_1 . Тогда оператор $\bar{L} = L + \bar{\mathcal{P}}_Y$ имеет ограниченный правый обратный

$$\bar{L}_r^{-1} = (L + \bar{\mathcal{P}}_Y)_r^{-1}.$$

Общий вид обратных справа операторов $\bar{L}_{r_0}^{-1}$ определяется формулой

$$\bar{L}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{N_2(L)})\bar{L}_r^{-1}.$$

Доказательство. Для обратимости справа оператора \bar{L} необходимо и достаточно, чтобы [9]:

а) $R(\bar{L}) = \mathbf{B}_2$;

б) подпространство $N(\bar{L})$ имело прямое дополнение в \mathbf{B}_1 .

Из второго равенства в (5) имеем $R(L) = N(\mathcal{P}_Y)$, т. е. условие $R(\bar{L}) = \mathbf{B}_2$ эквивалентно условию

$$\mathcal{P}_Y(\cdot) = \Psi\Phi(\cdot) = 0.$$

Поскольку система элементов $\{\psi_s\}_{s=1}^\nu$ линейно независима, то последнее соотношение будет иметь место тогда и только тогда, когда все $\{\varphi_s\}_{s=1}^\nu = 0$. А это, в свою очередь, означает, что нуль-пространство сопряженного оператора является нулевым, т. е. $N(L^*) = \{0\}$.

Покажем, что $N(\bar{L}^*) = \{0\}$. Пусть существует функционал φ_0 , $\varphi_0 \neq 0$, $\varphi \in \mathbf{B}_2^*$ такой, что $\bar{L}^* \varphi_0 = (L + \bar{P}_Y)^* \varphi_0 = 0$. С учетом определения оператора \bar{P}_Y имеем

$$L^* \varphi_0 = -\bar{P}_Y^* \varphi_0.$$

Применив функционалы $L^* \varphi_0 \in \mathbf{B}_1^*$ и \bar{P}_Y^* к матрице X , получим: с одной стороны,

$$(L^* \varphi_0)(X) = \varphi_0(LX) = 0,$$

так как $LX = 0$, а с другой —

$$\bar{P}_Y^* \varphi_0(X) = \varphi_0(\bar{P}_Y X) = \varphi_0(\Psi) \bar{\Gamma}(X) = \varphi_0(\Psi),$$

поскольку $\bar{\Gamma}(X) = \delta_{ij}$. Так как система элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^{\nu}$ линейно независима, равенство $\varphi_0(\Psi) = 0$ возможно только при $\varphi_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $N(\bar{L}^*) = \{0\}$, а это, в свою очередь, означает, что $R(\bar{L}) = \mathbf{B}_2$.

Дополняемость нуль-пространства $N(\bar{L})$ следует из определения проектора $\mathcal{P}_{N_1(L)}$ (13) и разбиения (14) нуль-пространства $N(L)$ оператора L .

Известно [9, с. 62], что если оператор проектирования \mathcal{P} имеет свойство $N(\mathcal{P}) = N(\bar{L})$, то общий вид правых обратных операторов имеет представление $\mathcal{P} \bar{L}_{r_0}^{-1}$. Как следует из (14), такое свойство имеет оператор $I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}$, т. е. $N(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}) = N(\bar{L})$, значит, общее представление ~~левых~~ ^{правых} обратных операторов можно записать в виде

$$\bar{L}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}) \bar{L}_r^{-1}.$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Если $\dim \ker L^* < \dim \ker L < \infty$, т. е. L — нетеров оператор положительного индекса, то лемма 5 переходит в лемму 2.4 [3, с. 47].

1. Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teil 3. Über die Auflösungen der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. — 1908. — № 65.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 527 с.
3. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
4. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
6. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.
7. Гринблум М. М. Биортогональные системы в пространстве Банаха // Докл. АН СССР. — 1945. — 47. № 2. — С. 79–82.
8. Кадец М. И., Митягин Б. С. Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. — 1973. — 28, вып. 6. — С. 77–94.
9. Гохберг И. Ц., Крупник П. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.
10. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 495 с.

Получено 06.04.09