УДК 517.983

©2010 р. В.П. Журавльов

Житомирський національний агроекологічний університет

ЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕТЕРОВИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглянуто лінійні крайові задачі для операторних рівнянь з нетеровим оператором, який діє в банаховому просторі. Побудовано розв'язки неоднорідної задачі Коші для таких операторних рівнянь. Отримано умови існування та формули для представлення розв'язків таких крайових задач. Побудовано узагальнений оператор Гріна, досліджено його властивості та зв'язок з узагальнено-оберненим оператором лінійної крайової задачі.

The paper deals with linear boundary value problems for the operator equations with Noeter's operator with functions in Banach space. The authors construct the solutions of the homogeneous and heterogeneous Cauchy problem for the operator equations of the kind. The authors also get the solvability conditions and formulae for presenting the solutions of such boundary value problem. The authors have construct a generalized Green operator, investigated its characters and links generally inverses operator of the linear boundary value problem.

Побудова розв'язків лінійних крайових задач

$$(Lx)(t) = f(t), \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

де $L-$ лінійний обмежений функціонально-диференціальний оператор, $\ell-$ лінійний обмежений функціонал, залежить від розв'язності операторного рівняння (1). Для звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, диференціальних рівнянь з імпульсною дією рівняння (1) крайової задачі (1), (2) є всюди розв'язним [1]. Для таких крайових задач отримані умови розв'язності і формули для представлення їх розв'язків [2], [3], [4].

У роботі поставлені наступні задачі: дослідити розв'язність задачі Коші для нетерового операторного рівняння (1), отримати критерії розв'язності та формули для представлення розв'язків крайової задачі (1), (2) у випадку, коли оператор L вихідного рівняння є нетеровим.

1. Задача Коші для нетерового операторного рівняння. Нехай $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2-$ банахові простори вектор-функцій $z : [a, b] \to \mathbf{R}^n$; $f : [a, b] \to \mathbf{R}^{n_1}$, $-\infty < a \le t \le b < +\infty$; $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2-$ лінійний обмежений нетерів оператор, $\mu = \dim N(L) < \infty$, $\nu = \dim N(L^* = \dim Y_L < \infty)$; $\mu \ne \nu$, де $N(L)-$ нуль-простір оператора L, $N(L^*)-$ нуль-простір оператора L^*, що є спряженим до оператора L; $\ell : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{R}^m-$ лінійний обмежений вектор-функціонал.

Позначимо через $\{f_i\}_{i=1}^{\mu} \subset N(L)$ і $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\nu} \subset N(L^*)-$ базиси нуль-просторів $N(L)$ і $N(L^*)$, відповідно. Для елементів $\{f_i\}_{i=1}^{\mu}$ і функціоналів $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu}$ існують спряжено біортогональні система функціоналів $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\mu} \subset N^*(L) \subset \mathbf{B}_1^*$ і повна система елементів $\{\psi_k\}_{k=1}^{\nu} \subset Y_L \subset \mathbf{B}_2$. За теоремою Хана-Банаха кожен із функціоналів $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\mu}$, який визначений на підпросторі $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ може бути продовженим, із збереженням норми, на весь простір $\mathbf{B}_1$, а кожен з функціоналів $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu}-$ на весь простір $\mathbf{B}_2$.

Далі позначимо матриці:

$$X(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_\mu(t)),$$

$$\Gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \dots \gamma_\mu(\cdot))^T,$$

$$\Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_\nu(\cdot))^T,$$

$$\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_\nu(t)),$$

де $(\Gamma X)(\cdot) = E_\mu$, $(\Phi\Psi)(\cdot) = E_\nu$, E_μ, $E_\nu-$ одиничні матриці.

Тоді проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$ можна записати аналітично за допомогою наступних формул:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = X(t)(\Gamma z)(\cdot), \quad \forall z \in \mathbf{B}_1, \\
&(\mathcal{P}_{Y_L}y)(t) = \Psi(t)(\Phi y)(\cdot), \qquad \forall y \in \mathbf{B}_2.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Розглянемо задачу про умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків нетерового операторного рівняння

$$(Lz)(t) = f(t), \tag{4}$$

що задовольняють початкову умову

$$z(t_0) = z_0,\ t_0 \in [a,b],\ z_0 \in \mathbf{R}^n. \tag{5}$$

Означення 1. *Задачу (4), (5) називатимемо задачею Коші для неоднорідного операторного рівняння (4).*

Відомо [4], [5], що нетерове операторне рівняння (4), внаслідок його нормальної розв'язності, має розв'язки для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = 0.$$

З формули (3) для проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$ маємо, що внаслідок лінійної незалежності векторів матриці-оператора $\Psi(t)$ ця умова еквівалентна умові

$$(\Phi f)(\cdot) = 0, \tag{6}$$

яка складається з $\nu = \dim N(L^*)$ лінійно незалежних умов.

Відповідно до [6], при виконанні умови (6) загальний розв'язок рівняння (4) можна записати у вигляді

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + (L^- f)(t), \tag{7}$$

де $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)-$ проектор (3), $\hat{z}(t)-$ довільний елемент простору $\mathbf{B}_1$, $L^- -$ обмежений узагальнено обернений оператор до нетерового оператора L, побудова якого викладена в [4].

Використовуючи представлення (3) проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$, отримаємо

$$(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) = X(t)(\Gamma \hat{z})(\cdot) = X(t)c, \tag{8}$$

де $X(t)-$ $(n \times \mu)$-вимірна матриця, $c = \mathrm{col}(\gamma_1\hat{z})(\cdot), (\gamma_2\hat{z})(\cdot), ..,)-$ довільний вектор-стовпець із сталими компонентами, $c \in \mathbf{R}^\mu$.

Підставивши вираз (8) в рівняння (7), отримаємо загальний розв'язок нетерового операторного рівняння (4)

$$z(t) = X(t)c + (L^- f)(t). \tag{9}$$

З представлення (9) маємо, що будь-який елемент $z(t)$ нуль-простору $N(L)$ можна представити у вигляді

$$z(t) = X(t)c.$$

Це співвідношення справедливе для будь-якого $t \in [a,b]$, включаючи і $t = t_0$. Отже, для будь-якого $z_0 = z(t_0)$ існує елемент $c \in \mathbf{R}^\mu$ такий, що виконується рівність

$$z_0 = X(t_0)c,$$

де $X(t_0) : \mathbf{R}^\mu \to \mathbf{R}^n -$ $(n \times \mu)$-вимірна матриця зі сталими компонентами.

Існування для будь-якого $z_0 = z(t_0)$ елементу c означає, що алгебраїчне рівняння

$$X(t_0)c = z_0$$

всюди розв'язне. Це означає, що нуль-простір $N(X^*(t_0)) = \{0\}$, проектор на підпростір $Y_{X(t_0)} \subset \mathbf{R}^n$ дорівнюватиме нулеві, $\mathcal{P}_{Y_{X(t_0)}} \equiv 0$, $\forall t_0 \in [a,b]$. Звідси маємо, що алгебраїчне рівняння

$$X(t_0)c = z_0 - (L^- f)(t_0),$$

яке отримане з рівняння (9) при $t = t_0$ всюди розв'язне і [7, с. 175] його загальний розв'язок має наступний вигляд

$$c = \mathcal{P}_{N(X(t_0))}\hat{c} + X^-(t_0)[z_0 - (L^- f)(t_0)], \tag{10}$$

де $\mathcal{P}_{N(X(t_0))}-$ проектор банахового простору $\mathbf{R}^\mu$ на нуль-простір $N(X(t_0))$ матриці $X(t_0)$, $\hat{c}-$ довільний вектор простору $\mathbf{R}^\mu$, $X^-(t_0)-$ узагальнено-обернена матриця до матриці $X(t_0)$. Оскільки проектор $\mathcal{P}_{Y_{X(t_0)}} \equiv 0$, то з формули (22)[7, с. 174] маємо, що узагальнено-обернена матриця $X^-(t_0)$ буде правою оберненою матрицею $X_r^{-1}(t_0)$, $X^-(t_0) \equiv X_r^{-1}(t_0)$.

Підставивши вираз (10) в рівняння (9), отримаємо загальний розв'язок задачі Коші

(4), (5)

$$z(t) = X(t)\{\mathcal{P}_{N(X(t_0))}\hat{c} +$$

$$X_r^{-1}(t_0)[z_0 - (L^- f)(t_0)]\} + (L^- f)(t) =$$

$$X_0(t)\hat{c} + (G_0 f)(t) + X(t)X_r^{-1}(t_0)z_0,$$

де $X_0(t) = X(t)\mathcal{P}_{N(X(t_0))}$, $\hat{c}-$ довільний вектор з простору $\mathbf{R}^\mu$

$$(G_0 f)(t) = (L^- f)(t) - X(t)X_r^{-1}(t_0)(L^- f)(t_0),$$

де G_0- оператор Гріна напіводнорідної ($z_0 = 0$) задачі Коші (4), (5).

Таким чином, доведено наступну теорему:

Теорема 1. *Нехай $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2-$ нетерів оператор. Тоді задача Коші (4), (5) має розв'язок для будь-яких $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ і тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову (6), і її загальний розв'язок можна представити у вигляді*

$$z(t) = X_0(t)\hat{c} + X(t)X_r^{-1}(t_0)z_0 + (G_0 f)(t).$$

Зауваження 1. *Якщо операторне рівняння (4) є всюди розв'язним, то $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$. В цьому випадку оператор L матиме обмежений правий обернений оператор L_r^{-1} [7]. Якщо, крім того, матриця $X(t)$ має обернену для будь-якого $t \in [a, b]$, то $\mathcal{P}_{N(X(t_0))} = 0$ і задача Коші (4), (5) буде всюди і однозначно розв'язною. При цьому її розв'язок має наступний вигляд*

$$z(t) = X(t)X^{-1}(t_0)z_0 + (L_r^{-1} f)(t) -$$

$$-X(t)X^{-1}(t_0)(L_r^{-1} f)(t_0).$$

2. Лінійні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь. Розглянемо задачі про необхідні і достатні умови розв'язності та представлення розв'язків нетерового операторного рівняння

$$(Lz)(t) = f(t), \qquad (11)$$

які задовольняють умови

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \qquad (12)$$

де $\ell = \operatorname{col}(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_m)-$ лінійний обмежений вектор-функціонал, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ в евклідів простір $\mathbf{R}^m$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Означення 2. *Систему лінійних операторних рівнянь (11), (12) називатимемо лінійною неоднорідною крайовою задачею для нетерового рівняння (11), а рівняння $(\ell z)(\cdot) = \operatorname{col}(l_1 z(\cdot), l_2 z(\cdot), l_3 z(\cdot), \ldots, l_m z(\cdot)) = \operatorname{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m)-$ крайовими умовами цієї задачі.*

Використовуючи підхід, запропонований у [8], крайову задачу (3), (4) будемо розглядати як операторне рівняння

$$(\Lambda z)(t) = \left(\begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z\right)(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \alpha \end{bmatrix} = g(t)$$

з лінійним обмеженим нормально розв'язним оператором $\Lambda = \operatorname{col}[L, l]$, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у прямий добуток $\mathbf{B}_2 \times \mathbf{R}^m$ функціонального банахового простору $\mathbf{B}_2$ та евклідового простору $\mathbf{R}^m$, $\Lambda : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2 \times \mathbf{R}^m$.

Оператор Λ буде обмеженим, якщо норму в просторі $\mathbf{B}_2 \times \mathbf{R}^m$ визначити наступним чином:

$$\|(f, \alpha)\|_{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{R}^m} = \|f\|_{\mathbf{B}_2} + \|\alpha\|_{\mathbf{R}^m},$$

де $f \in \mathbf{B}_2$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Вище було сказано, що нетерове нормально розв'язне операторне рівняння (11) розв'язне для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову (6). При виконанні цих ν умов загальний розв'язок рівняння (11) матиме вигляд (9).

Для того, щоб розв'язок (9) неоднорідного операторного рівняння (11) був розв'язком крайової задачі (11), (12) необхідно і достатньо, щоб вектор $c \in \mathbf{R}^\mu$ задовольняв алгебраїчну систему

$$\ell X(\cdot)c + \ell(L^- f)(\cdot) = \alpha,$$

яку отримано після підстановки розв'язку (9) в крайову умову (12).

Позначимо через $Q = \ell X(\cdot)$ $(m \times \mu)$-вимірну матрицю зі сталими компонентами; $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{R}^\mu \to N(Q)-$ $(\mu \times \mu)$-вимірну матрицю-проектор; $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{R}^m \to Y_Q-$ $(m \times$

m)-вимірну матрицю-проектор; $Q^{-}-$ ($\mu \times m$)-вимірну матрицю узагальнено-обернену до матриці Q.

З алгебраїчного рівняння

$$Qc = \alpha - \ell(L^{-}f) \tag{13}$$

знайдемо константу $c \in \mathbf{R}^{\mu}$, при якій розв'язок (9) рівняння (11), існуючий при виконанні умови (6), буде розв'язком крайової задачі (11), (12). З теореми 3.9 [4, с. 92] маємо, що рівняння (13) розв'язне тоді і тільки тоді, коли виконано умову

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell L^{-})(\cdot)\} = 0, \quad (d = m - \operatorname{rank} Q)$$

і при цьому має ρ-параметричну ($\rho = \mu - \operatorname{rank} Q$) сім'ю розв'язків у вигляді

$$c = \mathcal{P}_{N_\rho(Q)}c_\rho + Q^{-}\{\alpha - \ell L^{-}f)(\cdot)\} \tag{14}$$

де $\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}-$ ($d \times m$)-вимірна матриця, яка складена з повної системи d лінійно незалежних рядків матриці-проектора $\mathcal{P}_{Y_Q}$, $\mathcal{P}_{N_\rho(Q)}-$ ($\mu \times \rho$)-вимірна матриця, яка складена з повної системи ρ ($\rho = \mu - \operatorname{rank} Q$) лінійно незалежних стовпців матриці-проектора $\mathcal{P}_{N(Q)}$.

Підставляючи знайдений вектор констант c (14) в вираз (9), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (11), (12):

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho + (Gf)(t) + X(t)Q^{-}\alpha.$$

Тут $X_\rho(t) = X(t)\mathcal{P}_{N_\rho(Q)}-$ ($n \times \rho$)-вимірна матриця, стовпці якої є повною системою $\rho-$ лінійно незалежних розв'язків однорідної ($f(t) = 0, \alpha = 0$) крайової задачі (11), (12); $c_\rho \in \mathbf{R}^\rho$; $G : \mathbf{B}_2 \to \ker \ell \subset \mathbf{B}_1$,

$$(Gf)(t) = (L^{-}f)(t) - X(t)Q^{-}\ell(L^{-}f)(\cdot)- \tag{15}$$

узагальнений оператор Гріна напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі (11), (12).

Таким чином, для крайової задачі (11), (12) справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2-$ нетерів оператор. Тоді, якщо* $\operatorname{rank}\ Q \leq \min(m, \mu)$, *то однорідна ($f(t) = 0, \alpha = 0$) крайова задача, відповідна (11), (12), має $\rho = \mu - \operatorname{rank}\ Q$ і тільки ρ лінійно незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho.$$

Неоднорідна крайова задача (11), (12) має розв'язок для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$, які задовольняють $\nu + d$ ($d = m - \operatorname{rank}\ Q$) лінійно незалежні умови

$$\begin{cases} (\mathcal{P}_{Y_L}f)(\cdot) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell L^{-}f)(\cdot)\} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

і при цьому має ρ-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$z(t, c_\rho) = X_\rho(t)c_\rho + (Gf)(t) + X(t)Q^{-}\alpha. \tag{17}$$

Наслідок 1. *Якщо* $\operatorname{rank}\ Q = \mu$, *то $\mu \leq m$. В цьому випадку однорідна ($f(t) = 0, \alpha = 0$) крайова задача, відповідна (11), (12), не має розв'язку, окрім тривіального.*

Неоднорідна крайова задача (11), (12) з нетеровим оператором $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ має розв'язок для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$, які задовольняють $\nu + d$ ($d = m - \mu$) лінійно незалежні умови

$$\begin{cases} (\mathcal{P}_{Y_L}f)(\cdot) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell L^{-}f)(\cdot)\} = 0, \end{cases}$$

і при цьому має єдиний розв'язок

$$z(t) = (Gf)(t) + X(t)Q^{-}\alpha.$$

Дійсно, якщо $\operatorname{rank}\ Q = \mu$, то $\mathcal{P}_{N(Q)} \equiv 0$ і $X_\rho(t) = 0$.

Наслідок 2. *Якщо* $\operatorname{rank}\ Q = m$, *то $m \leq \mu$. В цьому випадку однорідна ($f(t) = 0, \alpha = 0$) крайова задача, відповідна (11), (12), має ρ і тільки $\rho = \mu - m$ лінійно незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho.$$

Неоднорідна крайова задача (11), (12) з нетеровим оператором $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ має розв'язок для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють ν лінійно незалежні умови

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(\cdot) = 0$$

і при цьому має ρ-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$z(t, c_\rho) = X_\rho(t)c_\rho + (Gf)(t) + X(t)Q^{-}\alpha.$$

Дійсно, якщо $\operatorname{rank} Q = m$, то $\mathcal{P}_{Y_Q} \equiv 0$ і $\mathcal{P}_{Y_{Q_d}} = 0$.

Далі розглянемо крайову задачу (11), (12) в припущенні, що операторне рівняння (11) – всюди розв'язне. Це означає, що $R(L) = \mathbf{B}_2$ і отже $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$. З наслідку 2 теореми 2.3 [4, с. 55] операторне рівняння$(Lz)(t) = f(t)$ розв'язне при будь-кому $f(t) \in \mathbf{B}_2$ і має розв'язок

$$z(t) = X(t)c + (L_r^{-1}f)(t),\ c_\mu \in \mathbf{R}^\mu,$$

де L_r^{-1}– лінійний обмежений правий обернений оператор до оператора L.

Завдяки всюди розв'язності рівняння $(Lx)(t) = f(t)$ теорема 2 спрощується і формулюється наступним чином.

Теорема 3. *Нехай $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$– нетерів оператор і $N(L^*) = \{0\}$. Тоді, якщо $\operatorname{rank} Q \leq \min(m, \mu)$, то однорідна ($f(t) = 0, \alpha = 0$) крайова задача, відповідна (11), (12), має ρ і тільки ρ ($\rho = \mu - \operatorname{rank} Q$) лінійно незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho.$$

Неоднорідна крайова задача (11), (12) розв'язна для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$, які задовольняють d, $d = m - \operatorname{rank} Q$, лінійно незалежні умови

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell(L_r^{-1}f)(\cdot)\} = 0,$$

і при цьому має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho + (Gf)(t) + X(t)Q^-\alpha,$$

де $(Gf)(t) = (L_r^{-1}f)(t) - X(t)Q^-\ell(L_r^{-1}f)(\cdot)$– узагальнений оператор Гріна.

Зауваження 2. *Теорема 3 описує клас нетерових крайових задач для всюди розв'язних операторних рівнянь (4). Такі задачі детально розглянуті у випадках, коли $(Lz)(t) = \dot{z}(t) - A(t)z(t)$– звичайний диференціальний оператор, $L : C^1[a,b] \to C[a,b]$ [2], [5], диференціальний оператор із зосередженим відхиленням аргументу $(Lz)(t) = \dot{z}(t) - A(t)(S_h)z(t)$, $L : D_p[a,b] \to L_p[a,b]$ [3], [4]. У цих випадках правий обернений оператор L_r^{-1} має інтегральне представлення*

$$(L_r^{-1}f)(t) = \int_a^b K(t,s)g(s)ds,$$

де $K(t,s)$– матриця Коші.

Узагальнений оператор Гріна має вигляд:

$$(Gf)(t) = \textstyle\int_a^b K(t,s)f(s)ds -$$

$$-X(t)Q^-\ell \textstyle\int_a^b K(\cdot,s)f(s)ds.$$

Зауваження 3. *Якщо функціонал ℓ задовольняє умову [9, с. 15]*

$$\ell \int_a^b K(\cdot,s)f(s)ds = \int_a^b \ell K(\cdot,s)f(s)\,ds,$$

то узагальнений оператор Гріна має представлення

$$(Gf)(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds,$$

ядро якого

$$G(t,s) = K(t,s) - X(t)Q^-\ell K(\cdot,s)$$

називається узагальненою матрицею Гріна.

3. Узагальнений оператор Гріна та його властивості. Побудований узагальнений оператор Гріна (15) $G : \mathbf{B}_2 \to \ker \ell \subset \mathbf{B}_1$ грає важливу роль при аналізі лінійних і слабко нелінійних крайових задач для операторних рівнянь. З його допомогою при виконанні відповідних умов розв'язності будується загальний розв'язок напіводнорідної ($\alpha \equiv 0$) крайової задачі (3), (4).

Розглянемо деякі властивості узагальненого оператора Гріна

$$(Gf)(t) = (L^-f)(t) - X(t)Q^-\ell(L^-f)(\cdot). \quad (18)$$

Для спрощення записів формул при розгляді властивостей узагальненого оператора Гріна надалі будемо опускати дужки і змінні.

Лема 1. *Узагальнений оператор Гріна G задовольняє співвідношеня*

$$\Lambda G = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Доведення. Дійсно, підставивши в (19) замість G його вираз (18), отримаємо:

$$\Lambda G = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} [L^- - XQ^-\ell L^-] =$$

$$= \begin{bmatrix} L(L^- - XQ^-\ell L^-) \\ \ell(L^- - XQ^-\ell L^-) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} LL^- - LXQ^-\ell L^- \\ \ell L^- - \ell XQ^-\ell L^- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} LL^- \\ (I_{\mathbf{R}^m} - QQ^-)\ell L^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L}) \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- \end{bmatrix},$$

оскільки

$$LX = 0,\ I_{\mathbf{R}^m} - QQ^- = \mathcal{P}_{Y_Q}.$$

Зауваження 4. *У випадку, коли рівняння $Lz = f$ всюди розв'язне, властивість (19) набере вигляду:*

$$\Lambda G = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\ell L_r^{-1} \end{bmatrix},$$

оскільки $R(L) = \mathbf{B}_2$, $L^- = L_r^{-1}$, а $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$.

Як показано вище, при виконанні умов (16) крайова задача

$$\Lambda z = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix}$$

має розв'язок, який має вигляд (17).

Для обмеженого узагальнено-оберненого оператора

$$\begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix}^- : \mathbf{B}_2 \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{B}_1$$

маємо представлення

$$\begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix}^- \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix} = Gf + XQ^-\alpha,$$

де $Gf = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix}^- \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$ – розв'язок крайової задачі

$$Lz = f,$$
$$\ell z = 0;$$

$XQ^-\alpha = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix}^- \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ – розв'язок крайової задачі

$$Lz = 0,$$
$$\ell z = \alpha.$$

Теорема 4. *Оператор*

$$\Lambda^- = [G \quad XQ^-]$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до лінійного обмеженого оператора $\Lambda = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix}$.

Доведення. Для доведення теореми необхідно і достатньо показати, що оператор Λ^- задовольняє властивості

$$1.\ \Lambda^-\Lambda\Lambda^- = \Lambda^-;\quad 2.\ \Lambda\Lambda^-\Lambda = \Lambda,$$

що визначають узагальнено-обернений оператор. Як показано в [10] друга з властивостей є наслідком першої. Тому покажемо що оператор Λ^- задовольняє властивості $\Lambda^-\Lambda\Lambda^- = \Lambda^-$. Оскільки $LX \equiv 0$, $\ell X = Q$, то:

$$\Lambda\Lambda^- = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} [G \quad XQ^-] = \begin{bmatrix} LG & LXQ^- \\ \ell G & \ell XQ^- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- & QQ^- \end{bmatrix}.$$

Із співвідношень $L^-\mathcal{P}_{Y_L} = 0$, $Q^-\mathcal{P}_{Y_Q} = 0$, $G\mathcal{P}_{Y_L} = 0$ маємо, що

$$\Lambda^-\Lambda\Lambda^- = [G \quad XQ^-] \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- & QQ^- \end{bmatrix} =$$

$$= [G(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L}) + XQ^-\mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- \quad XQ^-QQ^-] =$$

$$= [G - G\mathcal{P}_{Y_L} + XQ^-\mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- \quad XQ^-] = [G\ XQ^-].$$

Обмеженість оператора Λ^- є наслідком обмеженості операторів L^-, G та XQ^-. Таким чином, оператор $\Lambda^- : \mathbf{B}_2 \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{B}_1$ є обмеженим узагальнено-оберненим до оператора Λ вихідної крайової задачі.

Використовуючи формулу $\Lambda\Lambda^- = I_{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{R}^m} - \mathcal{P}_{Y_\Lambda}$ [4], що зв'язує узагальнено-обернений оператор Λ^- і проектор $\mathcal{P}_{Y_\Lambda}$, а також властивість (19) узагальненого оператора Гріна, знайдемо проектор $\mathcal{P}_{Y_\Lambda}$, який має блокову структуру:

$$\mathcal{P}_{Y_\Lambda} = I_{\mathbf{B}_2\times\mathbf{R}^m} - \Lambda\Lambda^- =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} & 0 \\ 0 & I_{\mathbf{R}^m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} [G \quad XQ^-] =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} & 0 \\ 0 & I_{\mathbf{R}^m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ \mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- & QQ^- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- & I_{\mathbf{R}^m} - QQ^- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- & \mathcal{P}_{Y_Q} \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{P}_{Y_\Lambda}$ дійсно є проектором, оскільки задовольняє властивості $\mathcal{P}^2_{Y_\Lambda} = \mathcal{P}_{Y_\Lambda}$:

$$\mathcal{P}^2_{Y_\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- & \mathcal{P}_{Y_Q} \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}^2_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^-\mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}^2_{Y_Q}\ell L^- & \mathcal{P}^2_{Y_Q} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_Q}\ell L^- & \mathcal{P}_{Y_Q} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_\Lambda}.$$

Очевидно, що умова $\mathcal{P}_{Y_\Lambda}\begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix} = 0$ еквівалентна умовам розв'язності (16) крайової задачі (11), (12).

Зауваження 5. *Якщо операторне рівняння (11) в крайовій задачі (11), (12) є всюди розв'язним, то проектор $\mathcal{P}_{Y_\Lambda}$ має вигляд:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_Q}\ell L_r^{-1} & \mathcal{P}_{Y_Q} \end{bmatrix},$$

оскільки в цьому випадку $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$, а $L^- = L_r^{-1}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.

2. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.

3. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф.* Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 3–6.

4. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.

5. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. - 317 p.

6. *Журавлев В.Ф.* Решение нормально разрешимых операторных уравнений в банаховых пространствах с базисом // Доклады академии наук. Российская Академия наук. — 1997. – **352**, №3. – С. 304 - 306.

7. *Журавлев В.Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных $n-$ $(d-)$ нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве // УМЖ. – 2010. – **62**, №2. – С. 167 - 182.

8. *Wexler D.* On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems // Ann. di Mat. pura et Appl. – 1968. – V. 80. – P. 123–136.

9. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – К.: Наук. думка, 1978. – 218 с.

10. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.