Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 55–61.

Непримитивное 1-надсуперкритическое частично упорядоченное множество и min-эквивалентность

В. В. Бондаренко, М. В. Степочкина

Институт математики НАН Украины, Житомирский национальный агроэкологический университет

Аннотация. Введенное первым автором понятие минимаксной эквивалентности частично упорядоченных множеств позволило решить ряд задач, связанных как с самими частично упорядоченными множествами, так и с их квадратичными формами Титса. В этой статье мы с помощью этого метода продолжаем изучать 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества, которые являются естественными обобщениями критических множеств Клейнера и суперкритических множеств Назаровой.

The nonprimitive 1-oversupercritical partially ordered set and min-equivalence

V. Bondarenko, M. Styopochkina

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Zhytomyr National Agroecological University

Abstract. The notion of minimax equivalence of partially ordered sets introduced by the first author helps to solve a number of problems associated with both the partially ordered sets themselves and their quadratic forms Tits. In this article we use this method to continue study 1-oversupercritical partially ordered sets which are natural generalizations of the critical sets of Kleiner and supercritical sets of Nazarova.

Введение

Из основных результатов работ [**1**] и [**2**] следует, что ч. у. (частично упорядоченное) множество имеет конечный представленческий тип тогда и только тогда, когда его квадратичная форма Титса слабо положительна (т. е. положительна на множестве неотрицательных векторов), и критическими относительно слабой положительности формы Титса ч. у. множествами являются множества Клейнера $(1,1,1,1), (2,2,2)$, $(1,3,3), (1,2,5)$ и $(И,4)$ (впервые они возникли как критические относительно ч. у. множеств конечного типа). В работе [**3**] доказано, что ч. у. множество является P-критическим (критическим относительно положительности

E-mail: vitaliy.bondarenko@gmail.com, stmar@ukr.net

квадратичной формы Титса) тогда и только тогда, когда оно минимаксно эквивалентно критическому множеству Клейнера (минимаксная эквивалентность введена В. М. Бондаренком в работе [**4**]). Эта теорема позволяет описать все P-критические ч. у. множества (см. [**3**]).

Аналогичная ситуация имеет место и для ручных ч. у. множеств. В этом случае вместо критических множеств Клейнера нужно взять суперкритичкие множества Назаровой $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$ и (И, 5) [**5**], а вместо слабо-положительных и положительных квадратичных форм — слабо неотрицательные и неотрицательные формы. В работе [**6**] доказано, что ч. у. множество является критическим относительно неотрицательности квадратичной формы Титса тогда и только тогда, когда оно минимаксно эквивалентно суперкритическому множеству; все такие критические множества описаны в работе [**7**].

При решении различных комбинаторных задач вместо минимаксной эквивалентности (которая еще называется (min, max)-эквивалентностью) часто удобнее пользоваться равносильными ей min-эквивалентностью или max-эквивалентностью (эти взаимно двойственные эквивалентности также подробно изучены в [**3**]). Именно с помощью min-эквивалентности в работе [**8**] изучались 1-надсуперкритические ч. у. множества (это ч. у. множества, которые «отличаются», от суперкритических множеств в такой же степени, как последние «отличаются» от критических). В этой работе продолжается изучение таких ч. у. множеств.

1. Предварительные сведения

Пусть S — ч. у. множество и a — его минимальный элемент. Через $S_a^{\uparrow}$ обозначается ч. у. множество, совпадающее с S как обычное множество, с тем же отношеним порядка на $S \setminus \{a\}$, но при этом элемент a является уже максимальным, причем a сравнимо с x в $S_a^{\uparrow}$ тогда и только тогда, когда a несравнимо с x в S. Будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо «отличаются» $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xyz}^{\uparrow\uparrow\uparrow}$ вместо $((S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow})_z^{\uparrow}$ и т. д.

Ч. у. множество T называется min-*эквивалентным* ч. у. множеству S, если оно имеет вид $T = S_{x_1x_2\ldots x_p}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}$ $(p \geq 0)$; если $p = 0$, то $T = S$. Заметим, что среди элементов $x_1, x_2, \ldots, x_p$ могут быть и одинаковые.

Понятие min-эквивалентности можно естественным образом продолжить до понятия min-изоморфизма, считая, что ч. у. множества S и S' min-*изоморфны*, если существует ч. у. множество T, min-эквивалентное S и изоморфное S'.

Конечная последовательность $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ элементов из S называется min-*допустимой*, если выражение $\overline{S} = S_{x_1x_2\ldots x_p}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}$ имеет смысл (случай $p = 0$ не исключается). В этом случае будем также писать $\overline{S} = S_{\alpha}^{\uparrow}$.

Множество всех min-допустимых последовательностей обозначаем $\mathcal{P}(S)$, а множество всех min-допустимых последовательностей без повторений — $\mathcal{P}_1(S)$. Для $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}_1(S)$ положим $[\alpha]_S = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ (т. е. $[\alpha]_S$ — множество, состоящее из всех элементов x_i).

Под ч. у. подмножествами (которые мы называем просто подмножествами) всегда подразумеваются полные относительно отношения частичного порядка подмножества. Подмножество X называется *нижним*, если $x \in X$ всякий раз, когда $x < y$ и $y \in X$ (пустое подмножество являются нижними).

Из следствий 5 и 9 работы **[3]** имеем, что если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$ и $[\alpha]_S = [\beta]_S$, то $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\beta}$; кроме того, если X — подмножество в S, то в $\mathcal{P}_1(S)$ существует последовательность α, такая, что $[\alpha]_S = X$, тогда и только тогда, когда подмножество X нижнее. Следовательно для нижнего подмножества X можно определить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$, полагая $S^{\uparrow}_X = S^{\uparrow}_{\alpha}$, где $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ — любая из последовательностей таких, что $[\alpha]_S = X$. В силу предложения 6 **[3]** $a < b$ в $\overline{S} = S^{\uparrow}_X$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

a) $a < b$ в S и либо $a, b \in X$, либо $a, b \notin X$;

b) a и b несравнимы в S и $b \in X, a \notin X$.

В заключение этого параграфа заметим, что если S имеет тривиальную группу автоморфизмов и самодвойственное (а именно такое ч. у. множеств нами будет рассматриваться ниже), то существует единственное биективное отображение $d : S \to S$ такое, что $d(x) < d(y)$ в том и только в том случае, когда $x > y$. Тогда для любого нижнего подмножества X в S обозначим через $\overline{X}$ нижнее подмножество $d(S \setminus X) \cong (S \setminus X)^{\mathrm{op}}$; очевидно, что $\overline{\overline{X}} = X$. Тогда из леммы 17 **[3]** имеем, что $S^{\uparrow}_{\overline{X}} \cong (S^{\uparrow}_X)^{\mathrm{op}}$. Нижние подмножества X и $\overline{X}$ будем называть *родственными*.

2. Формулировка основного результата

Согласно определению работы **[8]** 1-надсуперкритические множества — это следующие самодвойственные ч. у. множества:

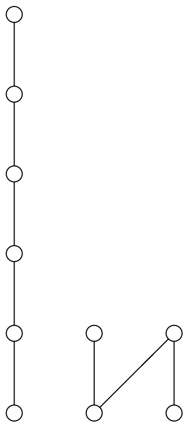
1) $(1,1,1,1,1,1)$, 2) $(1,1,1,1,2)$, 3) $(1,1,2,2)$, 4) $(1,1,1,3)$, 5) $(2,3,3)$,

6) $(2,2,4)$, 7) $(1,4,4)$, 8) $(1,3,5)$, 9) $(1,2,7)$, 10) $(6,\text{И})$.

Здесь цифра i обозначает цепь длины i, а (i_1, i_2, i_3) — прямую сумму цепей i_1, i_2, i_3 и т. д. (такие множества называются примитивными); аналогично для $(6,\text{И})$.

В этой статье мы описываем ч. у. множества T вида $S_X^{\uparrow}$ в случае, когда S — непримитивное 1-надсуперкритическое ч. у. множество (оно единственное и указано выше под номером 10):

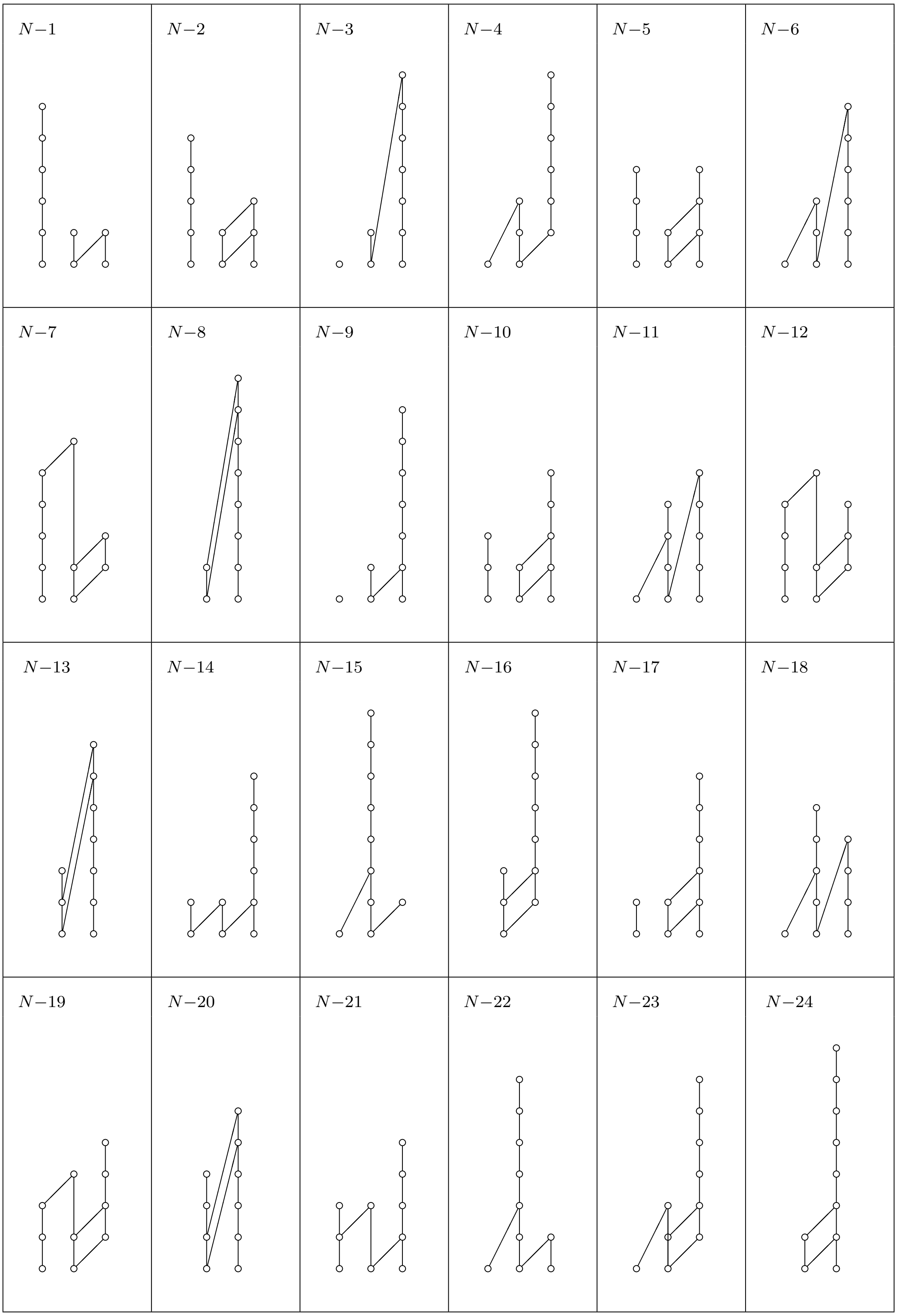
$S = \{1, 2, \ldots, 10 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 7 \prec 8, 9 \prec 10, 7 \prec 10\}$:

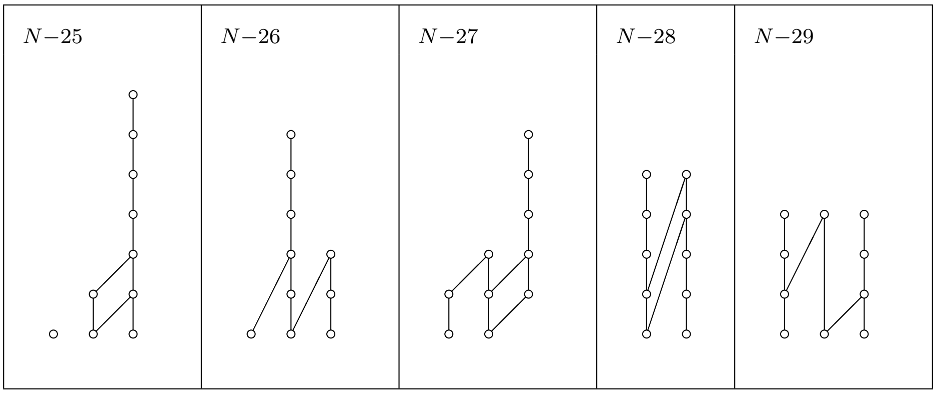


Теорема 1. *Пусть S — непримитивное 1-надсуперкритическое множество. Тогда для любого его нижнего собственного подмножества X ч. у. множество $S_X^{\uparrow}$ не является самодвойственным.*

Теорема 2. *Пусть S — непримитивное 1-надсуперкритическое множество. Число всех, с точностью до изоморфизма, ч. у. множеств вида $S_X^{\uparrow}$ равно 57, а с точностью до изоморфизма и двойственности — 29. Эти 29 множеств указаны в нижеследующей таблице.*

Таблица (для 1-надсуперкритического непримитивного множества)





3. Доказательство теорем 1 и 2

Докажем сначала теорему 2.

Выпишем сначала все, с точностью до родственных, нижние подмножества ч. у. множества S (само множества S в качестве нижнего множества не рассматриваем, поскольку $S_X^{\uparrow} = S_{\varnothing}^{\uparrow} = S$). Имеем 29 таких нижних подмножеств: $S_1 = \varnothing$, $S_2 = \{1\}$, $S_3 = \{7\}$, $S_4 = \{9\}$, $S_5 = \{1,2\}$, $S_6 = \{1,7\}$, $S_7 = \{1,9\}$, $S_8 = \{7,8\}$, $S_9 = \{7,9\}$, $S_{10} = \{1,2,3\}$, $S_{11} = \{1,2,7\}$, $S_{12} = \{1,2,9\}$, $S_{13} = \{1,7,8\}$, $S_{14} = \{1,7,9\}$, $S_{15} = \{7,8,9\}$, $S_{16} = \{7,9,10\}$, $S_{17} = \{1,2,3,4\}$, $S_{18} = \{1,2,3,7\}$, $S_{19} = \{1,2,3,9\}$, $S_{20} = \{1,2,7,8\}$, $S_{21} = \{1,2,7,9\}$, $S_{22} = \{1,7,8,9\}$, $S_{23} = \{1,7,9,10\}$, $S_{24} = \{7,8,9,10\}$, $S_{25} = \{1,2,3,4,5\}$, $S_{26} = \{1,2,3,4,7\}$, $S_{27} = \{1,2,3,4,9\}$, $S_{28} = \{1,2,3,7,8\}$, $S_{29} = \{1,2,3,7,9\}$.

Через $\mathcal{S}_i$ будем обозначать ч. у. множество $S_X^{\uparrow}$ при $X = S_i$, а через $\mathcal{S}_{\bar{i}}$ — ч. у. множество $S_X^{\uparrow}$ при $X = \overline{S_i}$.

В таблице помещено 29 ч. у. множеств, занумерованных символами N–1, N–2, …, N–29. Каждое из этих множеств имеет вид $S_X^{\uparrow}$, где $X = S_i$ или $X = \overline{S_i}$, причем, естественно, в каждом случае мы берем одно и только одно из указанных X (поскольку $S_X^{\uparrow}$ для $X = S_i$ и $X = \overline{S_i}$ являются взаимно двойственными). Заметим, что можно было бы во всех случаях положить $X = S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 29)$, однако мы хотим, чтобы полученные 29 ч. у. множеств удовлетворяли некоторым дополнительным свойствам, которые связаны с их разбиением на цепи (согласно теореме Дилуорса).

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что N–1 $\cong \mathcal{S}_1 = S$, N–2 $\cong \mathcal{S}_2$, N–3 $\cong \mathcal{S}_3$, N–4 $\cong \mathcal{S}_4^{op}$, N–5 $\cong \mathcal{S}_5$, N–6 $\cong \mathcal{S}_6$, N–7 $\cong \mathcal{S}_7$, N–8 $\cong \mathcal{S}_8$, N–9 $\cong \mathcal{S}_9^{op}$, N–10 $\cong \mathcal{S}_{10}$, N–11 $\cong \mathcal{S}_{11}$, N–12 $\cong \mathcal{S}_{12}$, N–13 $\cong \mathcal{S}_{13}$, N–14 $\cong \mathcal{S}_{14}^{op}$, N–15 $\cong \mathcal{S}_{15}^{op}$, N–16 $\cong \mathcal{S}_{16}^{op}$, N–17 $\cong \mathcal{S}_{17}$, N–18 $\cong \mathcal{S}_{18}$, N–19 $\cong \mathcal{S}_{19}$, N–20 $\cong \mathcal{S}_{20}$, N–21 $\cong \mathcal{S}_{21}^{op}$, N–22 $\cong \mathcal{S}_{22}^{op}$, N–23 $\cong \mathcal{S}_{23}^{op}$, N–24 $\cong \mathcal{S}_{24}^{op}$, N–25 $\cong \mathcal{S}_{25}$, N–26 $\cong \mathcal{S}_{26}$, N–27 $\cong \mathcal{S}_{27}$, N–28 $\cong \mathcal{S}_{28}$, N–29 $\cong \mathcal{S}_{29}$.

Из таблицы видно, что все указанные в ней 29 ч. у. множеств попарно неизоморфны. Более того, все эти ч. у. множества и двойственные к ним также попарно неизоморфны в совокупности, кроме N–1 и (N–1)$^{\mathrm{op}}$. Таким образом, мы имеем 57 попарно неизоморфных ч. у. множества вида $S_X^{\uparrow}$ (29 указаны в таблице и 28 двойственные к ним). Теорема 2 доказана.

Теорема 1 вытекает непосредственно из доказательства теоремы 2.

Из доказательства теоремы 2 вытекает также следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть S — непримитивное 1-надсуперкритическое множество. Если $X, Y \neq S$ – различные нижние подмножества S, то $S_X^{\uparrow}$ и $S_Y^{\uparrow}$ неизоморфны.*

Действительно, поскольку число нижних подмножеств, с точностью до родственных, равно 29 (исключая, напоминаем, само множество S), то число всех нижних подмножеств не больше 57-и, так как к каждому из 28-и нижних подмножеств (исключаем пустое подмножество) добавляется родственное к нему подмножество. На самом деле их ровно 57, в чем легко убедиться непосредственно, причем это достаточно проверить для подмножеств, состоящих из 5 точек (это также следует из той части теоремы 2, в которой говорится о 57-и ч. у. множествах). Поскольку число всех нижних подмножеств равно числу ч. у. множеств вида $S_X^{\uparrow}$, то $S_X^{\uparrow}$ и $S_Y^{\uparrow}$ неизоморфны при $X \neq Y$ ($X, Y \neq S$ — нижние подмножества S).

Список литературы

[1] *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — 28. — С. 32–41.

[2] *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. — 1974. — 8. — С. 3–42.

[3] *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — 2, №3. — С. 18–58.

[4] *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). — 2005. — № 1. — C. 24–25.

[5] *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1975. — 39, № 5. — С. 963-–991.

[6] *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса // Укр. мат. журнал. — 2008. — 60, № 9. — С. 1157–1167.

[7] *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса // Укр. мат. журнал. — 2009. — 61, №5. — С. 734-–746.

[8] *Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В.* 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. I // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2011. — 22, № 2. — С. 17–25.