УДК 517.983

©2011 р. В.П. Журавльов

Житомирський національний агроекологічний університет

# ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД $n-$ НОРМАЛЬНИХ ТА $d-$ НОРМАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Доведено теореми про загальний вигляд нормально розв'язних операторів у банаховому просторі, які є $n-$ нормальними та $d-$ нормальними. Ці теореми є узагальненням теореми Ф. В. Аткінсона про загальний вигляд нетерових операторів.

The paper presents on the general viev of normally solvable operators in the Banach space which are $n-$ normal and $d-$ normal. The above theorems are a generalization of F. V. Atkinson's theorem on the general view of the Noether operators.

Відома теорема С. М. Нікольського [1] про загальний вигляд фредгольмових операторів у функціональних просторах тісно пов'язана з конструкцією Е. Шмідта [2], яка дозволяє знаходити узагальнено-обернений оператор до фредгольмового. Використовуючи теорему Ф. В. Аткінсона [3] про загальний вигляд нетерових операторів у банахових просторах, у [4] запропоновано конструкцію для узагальненого обернення нетерових операторів. У цій роботі доведено теореми, які узагальнюють теорему Ф. В. Аткінсона на випадок нормально розв'язних операторів у банахових просторах, що є $n-$ та $d-$ нормальними.

**Постановка задачі.** Нехай $L$ лінійний обмежений нормально розв'язний $n-$ або $d-$ нормальний оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$. Позначимо через $\dim N(L) = \mu$ та $\dim N(L^*) = \nu$ розмірності нуль-просторів операторів $L$ та спряженого до нього $L^*$, відповідно. За класифікацією С. Г. Крейна [5] нормально розв'язний оператор $L-$ $n-$нормальний, якщо $\mu = n$ скінченне, а $\nu$ — нескінченне та $d-$нормальний, якщо, навпаки, $\mu$ — нескінченне а $\nu = d$ скінченне.

Якщо $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2-$ лінійний обмежений $n-$ нормальний оператор, то його ядро $N(L)-$ скінченновимірне і, внаслідок цього, доповнювальне [6] у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, а відносно образу $R(L)$ припускатимемо що він доповнювальний у просторі $\mathbf{B}_2$, причому простір $\mathbf{B}_2$ має базис.

Якщо $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2-$ лінійний обмежений $d-$ нормальний оператор, то ядро $N(L^*)-$ скінченновимірне і, внаслідок цього, підпростір $Y_L \subset \mathbf{B}_2$, який є ізоморфним нуль-простору $N(L^*)$, буде доповнювальним у банаховому просторі $\mathbf{B}_2$, а відносно ядра $N(L)$ припускатимемо, що воно доповнювальне у просторі $\mathbf{B}_1$, причому простір $\mathbf{B}_1$ має базис. Таким чином, в обох випадках виконуються рівності

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= N(L) \oplus X_L, \\ \mathbf{B}_2 &= Y_L \oplus R(L). \end{aligned} \tag{1}$$

З доповнювальності ядра $N(L)$ та образу $R(L)$ випливає [7, с. 139], що оператор $L$ є узагальнено оборотним і існують обмежені проектори [8, 9] $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$, які індукують розбиття банахових просторів $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ у прямі топологічні суми (1), замкнених підпросторів $N(L)$ та $X_L$ і $Y_L$ та $R(L)$, відповідно; $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$. Очевидно, що узагальнено оборотний оператор є нормально роз'язним.

Відомо [8, с. 73], що, якщо підпростір $X_1$ доповнювальний підпростором $X_2$ до банахового простору $\mathbf{B}$, то він має нескінченну кількість різних доповнень $\widetilde{X}_2$. З кожною парою взаємно доповнювальних підпросторів пов'язаний обмежений проектор $\mathcal{P}_{X_1}$. Норма проектора може служити оцінкою "якості" доповнення. Чим більше $\|\mathcal{P}_{X_1}\|$, тим "гірше"доповнення. Загальний вигляд усіх проекторів банахового простору $\mathbf{B}$ на підпростір $X_1$ наводиться у лемі А. Собчика [8].

Надалі простір лінійних обмежених узагальнено оборотних операторів, які діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$ будемо позначати $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$.

У цій роботі поставлено наступні задачі: довести теореми про загальний вигляд операторів $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, які є $n-$ та $d-$ нормальними.

**Основний результат.** Спочатку розглянемо випадок, коли $L-$ $n-$нормальний оператор. Позначимо через $\{f_i\}_{i=1}^n \subset N(L)$ і $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^\infty \subset N(L^*)-$ базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$, відповідно. Для елементів $\{f_i\}_{i=1}^n$ і функціоналів $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^\infty$ існують, відповідно, спряжено біортогональні [10] система функціоналів $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^n \subset N^*(L) \subset \mathbf{B}_1^*$ та повна система елементів $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbf{B}_2$. За теоремою Гана-Банаха кожен з функціоналів $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^n$, який визначений на підпросторі $N(L) \subset \mathbf{B}_1$, може бути продовжений, із збереженням норми, на весь простір $\mathbf{B}_1$, а кожен з функціоналів $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^\infty-$ на весь простір $\mathbf{B}_2$.

Далі позначимо матриці:

$$\begin{aligned} X &= (f_1, f_2, \ldots, f_n), \\ \Gamma(\cdot) &= (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \ldots, \gamma_n(\cdot))^T, \\ \Phi(\cdot) &= (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_k(\cdot), \ldots)^T, \\ \Psi &= (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k, \ldots) \end{aligned} \qquad (2)$$

де $\Gamma(X) = E_n$, $\Phi(\Psi) = E_\infty$, $E_n, E_\infty-$ одиничні матриці.

Визначимо оператор $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$

$$\mathcal{P}_{N(L)}\, x = X\, \Gamma(x), \ \forall x \in \mathbf{B}_1.$$

Оператор $\mathcal{P}_{N(L)}$ породжує розклад простору $\mathbf{B}_1$ у пряму суму підпросторів

$$\mathbf{B}_1 = N(\mathcal{P}_{N(L)}) \oplus R(\mathcal{P}_{N(L)}).$$

Визначимо оператор $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$. Для цього розглянемо послідовність операторів

$$\mathcal{P}_{Y_L^{(j)}}\, y = \Psi_j \Phi_j(y) \ j = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

де $\Psi_j-$ матриця, яка складена з $j$ елементів матриці $\Psi$, а $\Phi_j-$ матриця, яка складена з $j$ елементів матриці $\Phi$ таких, що $\Phi_j(\Psi_j) = E_j$, де $E_j$ — одинична матриця.

Оператори $\mathcal{P}_{Y_L^{(j)}}$ переводять простір $\mathbf{B}_2$ в підпростори $Y_L^{(j)} \subset Y_L$, котрі натягнуті на елементи $\{\psi_k\}_{k=1}^j$, з яких складена матриця $\Psi_j$. Послідовність (3) операторів $\mathcal{P}_{Y_L^{(j)}}$ збігається на кожному елементі $y \in \mathbf{B}_2$, як послідовність наближень розвинення елемента $y$ за базисом $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$. Тоді за наслідком з теореми Банаха-Штейнгауза [6, с. 21] рівністю

$$\mathcal{P}_{Y_L}\, y = \lim_{j\to\infty} \mathcal{P}_{Y_L^{(j)}}\, y =$$

$$\lim_{j\to\infty} \Psi_j \Phi_j(y) = \Psi\Phi(y)$$

визначається лінійний неперервний, а отже обмежений оператор $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$, де $Y_L-$ підпростір, який натягнутий на елементи $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$. Оператор $\mathcal{P}_{Y_L}$ породжує розклад простору $\mathbf{B}_2$ у пряму суму підпросторів

$$\mathbf{B}_2 = N(\mathcal{P}_{Y_L}) \oplus R(\mathcal{P}_{Y_L}).$$

**Лема 1.** *Оператори $\mathcal{P}_{N(L)}$ і $\mathcal{P}_{Y_L}$ є обмеженими проекторами у банахових просторах $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ і розбивають їх у прямі суми замкнутих підпросторів за формулами (1).*

*Доведення.* Безпосередньо перевіряючи, легко встановити, що оператори $\mathcal{P}_{N(L)}$ і $\mathcal{P}_{Y_L}$ є проекторами, тобто задовольняють умовам $\mathcal{P}^2_{N(L)} = \mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}^2_{Y_L} = \mathcal{P}_{Y_L}$.

Обмеженість проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ випливає з доповнювальності [8] нуль-простору $N(L)$, внаслідок його скінченновимірості, а обмеженість проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$ з доповнювальності образу $R(L)$ оператора $L$ за припущенням.

Далі покажемо, що:

$$\begin{aligned} &1) \quad N(L) = R(\mathcal{P}_{N(L)}), \\ &2) \quad R(L) = N(\mathcal{P}_{Y_L}), \\ &3) \quad Y = R(\mathcal{P}_{Y_L}), \\ &4) \quad X = N(\mathcal{P}_{N(L)}). \end{aligned} \qquad (4)$$

Оскільки $L\mathcal{P}_{N(L)}x = LX\Gamma(x) = 0, x \in \mathbf{B}_1$, то $R(\mathcal{P}_{N(L)}) \subset N(L)$. Нехай $x \in N(L)$ тоді $x = Xc$, $c \in R^n$. Застосувавши до останньої рівності матрицю функціоналів $\Gamma$, отримаємо $c = \Gamma(x)$, тобто $x = X\Gamma(x)$. Це означає, що $x = \mathcal{P}_{N(L)}x$ і $x \in R(\mathcal{P}_{N(L)})$. Таким чином, $N(L) \subset R(\mathcal{P}_{N(L)})$ і рівність 1) із (4) доведено.

Оскільки $\mathcal{P}_{Y_L}Lx = \Psi\Phi(Lx) = 0$ ($\varphi_s$ — базисні вектори нуль-простору оператора $L^*$), то $R(L) \subset N(\mathcal{P}_{Y_L})$. З іншого боку, якщо $y \in N(\mathcal{P}_{Y_L})$, то $y \in \mathbf{B}_2$ задовольняє рівності:

$$\mathcal{P}_{Y_L}y = \Psi\Phi(y) = 0,$$

яка еквівалентна співвідношенням $\varphi_s(y) = 0$, $s = 1, .., \nu$, оскільки елементи матриці $\Psi$− лінійно-незалежні. А це, завдяки нормальній розв'язності оператора $L$, означає, що $y \in R(L)$. Виходить, що $N(\mathcal{P}_{Y_L}) \subset R(L)$ і доведення рівності 2) завершено.

Рівності 3) та 4) доводяться аналогічно.

Таким чином, із співвідношень (4) випливає, що проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$ і $\mathcal{P}_{Y_L}$ розбивають банахові простори $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ у прямі суми замкнених підпросторів за формулами (1).

Лему доведено.

Позначивши матриці

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(\cdot) &= (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot))^T, \\ \overline{\Psi} &= (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \end{aligned}$$

розглянемо лінійний обмежений оборотний оператор $J : N(L) \to Y_1 \subset Y_L$, який здійснює ізоморфізм $N(L)$ на $Y_1$ та йому обернений $J^{-1} : Y_1 \to N(L)$ :

$$Jx = \overline{\Psi}\,\Gamma(x), \; x \in N(L),$$

$$J^{-1}y = X\,\overline{\Phi}(y), \; y \in Y_1.$$

Матриця $\overline{\Psi}$ складається з системи елементів $\{\psi_k\}_{k=1}^n \subset \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, на яку натягнутий підпростір $Y_1$, а матриця $\overline{\Phi}$ — з функціоналів $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^n \subset \{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^\infty$, які задовольняють співвідношенню $\varphi_s(\psi_k) = \delta_{sk}$, $s, k = 1, 2, 3, \dots n$; $\overline{\Phi}(\overline{\Psi}) = E_n$, де $E_n$− одинична матриця.

За теоремою Гана-Банаха кожен із лінійних функціоналів $\gamma_i(\cdot)$ із збереженням норми може бути продовжений на весь простір $\mathbf{B}_1$, а кожен з лінійних функціоналів $\varphi_s(\cdot)$− на весь простір $\mathbf{B}_2$. Використовуючи це, позначимо розширення оператора $J : N(L) \to Y_L$ на весь простір $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, а розширення оберненого оператора $J^{-1}$ на простір $\mathbf{B}_2$ – через $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$, тобто

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x = \overline{\Psi}\Gamma(x), \; \forall x \in \mathbf{B}_1, \\ &\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}y = X\overline{\Phi}(y), \; \forall y \in \mathbf{B}_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Використовуючи матриці $\overline{\Psi}$ і $\overline{\Phi}$, проектор $\mathcal{P}_{Y_1} : \mathbf{B}_2 \to Y_1 \subset Y_L$ визначимо формулою:

$$\mathcal{P}_{Y_1}y = \overline{\Psi}\,\overline{\Phi}(y).$$

Цей скінченновимірний, а отже, обмежений проектор розбиває підпростір $Y_L$ в пряму топологічну суму підпросторів

$$Y_L = Y_1 \oplus Y_2 \tag{6}$$

де $Y_2 = (\mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}_{Y_1})\mathbf{B}_2$− нескінченновимірний простір.

Розглянемо оператор $\overline{L} = L + \mathcal{P}_{Y_1}$. Покажемо, що нуль-простір цього оператора нульовий. Припустимо, що існує $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbf{B_1}$, таке, що

$$(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})\,x_0 = Lx_0 + \overline{\Psi}\,\Gamma(x_0) = 0.$$

Очевидно, що $Lx_0 \in R(L)$, а з визначення оператора $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ маємо, що $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 \in Y_1 \subset Y_L$. Але підпростори $R(L)$ і $Y_L$ взаємно доповнюють один одного до всього простору $\mathbf{B_2}$, отже $R(L) \bigcap Y_L = \{0\}$. Це означає, що вони мають тільки один спільний елемент – нульовий, тобто $Lx_0 = 0$ і $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 = 0$. З останніх рівностей маємо, що $x_0 \in N(L)$ і $x_0 \in N(\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) \subset X_L$. Але підпростори $N(L)$ і $X_L$ також взаємно доповнюють один одного до простору $\mathbf{B_1}$, отже $N(L) \bigcap X_L = \{0\}$. Звідки маємо $x_0 = 0$, що протирічить припущенню. Таким чином, $\ker \overline{L} = \{0\}$.

Крім того, образ оператора $\overline{L}$ доповнювальний у просторі $\mathbf{B_2}$. Це випливає із співвідношення (6) і доповнювальності образу $R(\overline{L})$ у просторі $\mathbf{B_2}$

$$\mathbf{B_2} = R(L) \oplus Y_1 \oplus Y_2 = R(\overline{L}) \oplus Y_2.$$

З $\ker \overline{L} = \{0\}$ і доповнювальності $R(\overline{L})$ у просторі $\mathbf{B}_2$ маємо, що для оператора $\overline{L}$ існує лівий обернений $\overline{L}_l^{-1}$ [7]. А, оскільки оператор $\overline{L}$ здійснює взаємно-однозначну відповідність банахового простору $\mathbf{B_1}$ на підпростір $\mathbf{B_2} \ominus Y_2$, то за теоремою Банаха

[11] оператор $\overline{L}_l^{-1}$ буде обмеженим на підпросторі $\mathbf{B_2} \ominus Y_2$.

Таким чином, справедливе наступне твердження.

**Лема 2.** *Нехай оператор* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)-$ $n-$*нормальний. Тоді на підпросторі* $\mathbf{B_2} \ominus Y_2$ *оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ *має обмежений лівий обернений*

$$\overline{L}_l^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1}.$$

Далі, використовуючи лему 2, доведемо теорему про загальний вигляд $n-$ нормальних операторів у банахових просторах.

**Теорема 1.** *Нехай* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)-$ *лінійний обмежений оператор. Для того, щоб оператор* $L \ : \ \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ *був* $n$-*нормальним, необхідно і достатньо, щоб існували обмежений оператор* $U : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$, $n-$*вимірний проектор* $K_1 : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_1}$, *нескінченновимірний обмежений проектор* $K_2 : \mathbf{B_2} \to \mathbf{B_2}$ *такі, що*

$$UL = I_{\mathbf{B}_1} - K_1, \tag{7}$$

$$LU = I_{\mathbf{B}_2} - K_2 \tag{8}$$

*Доведення необхідності.* Нехай оператор $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)-$ $n-$ нормальний. Покажемо, що за оператор $U$ можна взяти лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{-1}$, за $K_1$ – оператор $\mathcal{P}_{N(L)}$, а за $K_2$ – оператор $\mathcal{P}_{Y_L}$.

Згідно леми 2 лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{-1}$ існує, отже [7]

$$\overline{L}_l^{-1}\overline{L} = I_{\mathbf{B}_1}, \tag{9}$$

$$\overline{L}\,\overline{L}_l^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}. \tag{10}$$

Для доведення рівностей (7), (8) спочатку доведемо співвідношення

$$\overline{L}_l^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N(L)}, \tag{11}$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\overline{L}_l^{-1} = \mathcal{P}_{Y_1}. \tag{12}$$

Оскільки $L\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = 0$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ та $\mathcal{P}_{Y_2}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = 0$, то, застосувавши зліва до обох частин рівності (11) оператор $\overline{L}$, отримаємо тотожність

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} - \mathcal{P}_{Y_2}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} =$$
$$(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2})\,\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{L}\,\overline{L}_l^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv$$
$$\overline{L}\mathcal{P}_{N(L)} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})\mathcal{P}_{N(L)} =$$
$$= L\mathcal{P}_{N(L)} + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1},$$

яка доводить співвідношення (11).

Оскільки $\mathcal{P}_{Y_1}L = 0$, $\mathcal{P}_{Y_1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, то застосувавши справа до обох частин рівності (12) оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, отримаємо тотожність

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}I_{\mathbf{B}_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\overline{L}_l^{-1}\overline{L} \equiv$$
$$\equiv \mathcal{P}_{Y_1}\overline{L} = \mathcal{P}_{Y_1}(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) =$$
$$= \mathcal{P}_{Y_1}L + \mathcal{P}_{Y_1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{Y_1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1},$$

яка доводить співвідношення (12).

Далі доведемо співвідношення (7). Із співвідношення (9) з урахуванням (11) отримаємо рівність

$$\overline{L}_l^{-1}\overline{L} = \overline{L}_l^{-1}(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \overline{L}_l^{-1}L +$$
$$+\overline{L}_l^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{L}_l^{-1}L + \mathcal{P}_{N(L)} = I_{\mathbf{B}_1},$$

з якої випливає співвідношення (7).

Тепер доведемо співвідношення (8). Із співвідношення (10) з урахуванням (12) отримаєио рівність

$$\overline{L}\,\overline{L}_l^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})\,\overline{L}_l^{-1} =$$
$$= L\overline{L}_l^{-1} + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\,\overline{L}_{l_0}^{-1} =$$
$$= L\overline{L}_l^{-1} + \mathcal{P}_{Y_1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2},$$

з якої з урахуванням (1), (6) маємо співвідношення (8).

*Доведення достатності.* Нехай існують оператор $U$ і проектори $K_1$ і $K_2$, для яких виконуються умови (7) та (8). Нехай, як і раніше, $U = \overline{L}_l^{-1}-$ лінійний обмежений оператор, $K_1 = \mathcal{P}_{N(L)}-$ лінійний $n-$вимірний проектор $K_2 = \mathcal{P}_{Y_L}-$ нескінченновимірний лінійний обмежений проектор.

Розглянемо рівняння $Lx = 0$. Застосувавши до нього оператор $U$ зліва, враховуючи (7), отримаємо:

$$ULx = \overline{L}_l^{-1}Lx = (I_{\mathbf{B}_1} - K_1)x = 0,$$

тобто $x = K_1 x$.

Оскільки $K_1-$ $n$-вимірний проектор, то за $K_1$ можна взяти проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$. У цьому випадку рівняння $L\tilde{x} = 0$ має розв'язок $\tilde{x} = \mathcal{P}_{N(L)}x$, де $\tilde{x} \in N(L)$, $x \in \mathbf{B}_1$. З побудови проектора $\mathcal{P}_{N(L)}x = X\,\varGamma(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,c_i$, де $c_i = \gamma_i(x)$, маємо, що $\dim\, N(L) = n < \infty$.

Далі розглянемо неоднорідне рівняння $Lx = y$. Нехай $x = Uz$. Тоді з рівності (8) маємо:

$$Lx = LUz = L\overline{L}_l^{-1}z = (I_{\mathbf{B}_2} - K_2)z = y. \quad (13)$$

За умовою теореми $K_2-$ нескінченновимірний обмежений проектор у просторі з базисом $\mathbf{B}_2$. За $K_2$ можна взяти проектор $\mathcal{P}_{Y_L}z = \varPsi\varPhi(z)$. Звідси маємо, що $\dim\, N(L^*) = \infty$, а це означає, що оператор $L$ є $n-$ нормальним. Тоді

$$(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})z = y. \quad (14)$$

Застосувавши до обох частин рівності (14) проектор $\mathcal{P}_{Y_L}$ ($\mathcal{P}_{Y_L}^2 = \mathcal{P}_{Y_L}$), отримаємо необхідну і достатню умову розв'язності рівняння (13)

$$\mathcal{P}_{Y_L}y = 0.$$

Якщо ця умова виконується, то знайдеться $z_0$ таке, що $y = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})z_0$ і неоднорідне рівняння $Lx = y$ буде мати розв'язок $x = \overline{L}_l^{-1}z_0$. Теорему доведено.

Нехай тепер $L\ :\ \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2-$ лінійний обмежений $d-$ нормальний оператор. За припущенням простір $\mathbf{B}_1$ має базис, отже і $N(L)$ також має базис. Позначимо $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset N(L)-$ повну систему базисних елементів. Підпростір $N(L^*)$ має скінченновимірний базис $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{d} \subset N(L^*)$. Для елементів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ і функціоналів $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{d}$ існують спряжено біортогональні [9] повна система функціоналів $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \subset N^*(L) \subset \mathbf{B}_1^*$ та система елементів $\{\psi_k\}_{k=1}^{d} \subset \mathbf{B}_2$. Функціонали $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ і $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{d}$, які визначені на підпросторі $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ і $Y_L \subset \mathbf{B}_2$ (за теоремою Гана-Банаха) можуть бути продовжені, із збереженням норм, на простори $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно.

Аналогічно (2) позначимо матриці

$$\begin{aligned} X &= (f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots), \\ \varGamma(\cdot) &= (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \ldots, \gamma_i(\cdot), \ldots)^T, \\ \varPhi(\cdot) &= (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_d(\cdot))^T, \\ \varPsi &= (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_d), \end{aligned}$$

де $\varGamma(X) = E_\infty$, $\varPhi(\varPsi) = E_d$, $E_\infty$, $E_d-$ одиничні матриці.

Для побудови оператора проектування $\mathcal{P}_{N(L)} : B_1 \to N(L)$ визначимо послідовність операторів

$$\mathcal{P}_{N^{(i)}(L)}x = X_i\varGamma_i(x),\ i = 1, 2, 3, \ldots \quad (15)$$

де $X_i$ – матриця, яка складена з перших $i$ елементів матриці $X$, а $\varGamma_i(\cdot)$ – матриця-оператор, складена з $i$ рядків матриці $\varGamma(\cdot)$, які задовольняють умову $\varGamma_i(X_i) = E_i$, де $E_i-$ одинична матриця. Оператори $\mathcal{P}_{N^{(i)}(L)}$ проектують простір $\mathbf{B}_1$ на підпростори $N_i(L)$ нуль-простору $N(L)$.

Послідовність (15) збігається на кожному елементі $x \in \mathbf{B}_1$, як послідовність наближень розвинення елемента $x$ за базисом $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тоді за наслідком з теореми Банаха-Штейнгауза [6, с. 21] рівністю

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{N(L)}\,x &= \lim_{i\to\infty} \mathcal{P}_{N(i)}\,x = \\ &= \lim_{i\to\infty} X_i\varGamma_i(x) = X\varGamma(x) \end{aligned} \quad (16)$$

визначається лінійний неперервний проектор $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$.

Оператор проектування $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$ простору $\mathbf{B}_2$ на підпростір $Y_L$ визначимо формулою

$$\mathcal{P}_{Y_L}y = \varPsi\varPhi(y). \quad (17)$$

Для операторів (16) та (17) справедливі твердження леми 1.

Розглянемо матриці:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= (f_1, f_2, \ldots, f_d), \\ \overline{\varGamma}(\cdot) &= (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \ldots, \gamma_d(\cdot))^T. \end{aligned} \quad (18)$$

Матриця $\overline{X}$ складена з векторів $\{f_i\}_{i=1}^{d} \subset \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, що становлять базис підпростору $N_1(L) \subset N(L)$, а матриця $\overline{\varGamma}(\cdot)-$ з функціоналів матриці $\varGamma(\cdot)$, які задовольняють співвідношенню $\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}$, $\overline{\varGamma}(\overline{X}) = E_d$, де $E_d-$ одинична матриця.

Аналогічно (5) розглянемо оператори

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}x = \Psi\ \overline{\Gamma}(x), \ \ x \in \mathbf{B}_1,$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}y = \overline{X}\ \Phi(y), \ \ y \in \mathbf{B}_2.$$

Оператор $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_1 \to Y_L$ є розширенням на весь простір $\mathbf{B}_1$ оператора, який здійснює ізоморфізм $N(L) \to Y_L$, а оператор $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \to N_1(L)$ є розширенням йому оберненого на весь простір $\mathbf{B}_2$.

Використовуючи (18), скінченновимірний проектор $\mathcal{P}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_1 \to N_1(L) \subset N(L)$ визначимо формулою

$$\mathcal{P}_{N_1(L)}x = \overline{X}\ \overline{\Gamma}(x).$$

Цей оператор обмежений і розбиває підпростір $N(L)$ в пряму топологічну суму підпросторів

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L), \qquad N_2(L) = \mathcal{P}_{N_2(L)}\mathbf{B}_1, \tag{19}$$

де $\mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_1(L)}-$ обмежений нескінченновимірний проектор.

Для $d-$ нормальних операторів справедливе твердження

**Лема 3.** *Нехай оператор $L \in$ $\mathbf{GI}(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})-$ $d$-нормальний. Тоді на просторі $\mathbf{B}_2$ оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ має обмежений правий обернений*

$$\overline{L}_r^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1}.$$

*Доведення* цієї леми аналогічне доведенню леми 2.

Далі доведемо теорему про загальний вигляд $d-$ нормальних операторів.

**Теорема 2.** *Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})-$ лінійний обмежений оператор. Для того, щоб оператор $L : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ був $d-$ нормальним необхідно і достатньо, щоб існували обмежений оператор $U : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$, нескінченновимірний обмежений проектор $K_1 : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_1}$, $d$-вимірний проектор $K_2 :$ $\mathbf{B_2} \to \mathbf{B_2}$ такі, що*

$$UL = I_{\mathbf{B}_1} - K_1, \tag{20}$$

$$LU = I_{\mathbf{B}_2} - K_2 \tag{21}$$

*Доведення необхідності.* Нехай оператор $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})-$ $d-$нормальний. Покажемо, що за оператор $U$ можна взяти правий обернений оператор $\overline{L}_r^{-1}$, за $K_1$ – оператор $\mathcal{P}_{N(L)}$, а за $K_2$ – оператор $\mathcal{P}_{Y_L}$.

Згідно леми 3 правий обернений оператор $\overline{L}_r^{-1}$ існує, отже [7]

$$\overline{L}_r^{-1}\overline{L} = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}, \tag{22}$$

$$\overline{L}\,\overline{L}_r^{-1} = I_{\mathbf{B}_2}. \tag{23}$$

Для доведення рівностей (20), (21) спочатку доведемо співвідношення

$$\overline{L}_r^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \mathcal{P}_{N_1(L)}, \tag{24}$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\overline{L}_r^{-1} = \mathcal{P}_{Y_L}. \tag{25}$$

Оскільки $L\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = 0$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\mathcal{P}_{N_1(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$, то, застосувавши зліва до обох частин рівності (24) оператор $\overline{L}$, отримаємо тотожність

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = I_{\mathbf{B_2}}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \overline{L}\,\overline{L}_r^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} \equiv$$

$$\equiv \overline{L}\mathcal{P}_{N_1(L)} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})\mathcal{P}_{N_1(L)} =$$

$$= L\mathcal{P}_{N_1(L)} + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\mathcal{P}_{N_1(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_L},$$

яка доводить співвідношення (24).

Оскільки $\mathcal{P}_{Y_L}L = 0, \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\mathcal{P}_{N_2(L)} = 0$ і $\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$, то, застосувавши справа до обох частин рівності (25) оператор $\overline{L} = L +$ $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, отримаємо тотожність

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}) = \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\overline{L}_r^{-1}\overline{L} \equiv$$

$$\equiv \mathcal{P}_{Y_L}\overline{L} = \mathcal{P}_{Y_L}(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}) =$$

$$= \mathcal{P}_{Y_L}L + \mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_L},$$

яка доводить співвідношення (25).

Далі доведемо співвідношення (20) та (21).

Враховуючи (24), з (22) маємо рівність

$$\overline{L}_r^{-1}\overline{L} = \overline{L}_r^{-1}(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}) =$$

$$= \overline{L}_r^{-1}L + \overline{L}_r^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} =$$

$$= \overline{L}_r^{-1}L + \mathcal{P}_{N_1(L)} = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)},$$

з якої з урахуванням (19) отримаємо співвідношення (20).

З (23) з урахуванням (25) маємо рівність

$$\overline{L}\,\overline{L}_r^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})\,\overline{L}_r^{-1} =$$

$$= L\overline{L}_r^{-1} + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\,\overline{L}_r^{-1} = L\overline{L}_r^{-1} + \mathcal{P}_{Y_L} = I_{\mathbf{B}_2},$$

з якої отримаємо співвідношення (21).

*Доведення достатності.* Нехай існують оператор $U$ і проектори $K_1$ та $K_2$, для яких виконуються умови (20) та (21). Нехай, як і раніше, $U = \overline{L}_r^{-1}-$ лінійний обмежений оператор $K_1 = \mathcal{P}_{N(L)}-$ нескінченновимірний лінійний оператор $K_2 = \mathcal{P}_Y-$ $d$-вимірний лінійний обмежений проектор.

Розглянемо рівняння $Lx = 0$. Застосувавши до нього оператор $U$ зліва, з урахуванням (20) отримаємо:

$$\overline{L}_r^{-1} L x = (I_{\mathbf{B}_1} - K_1)x = 0$$

тобто $x = K_1 x$.

Оскільки $K_1-$ нескінченновимірний обмежений проектор у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, то можна показати, що за $K_1$ можна взяти проектор $\mathcal{P}_{N(L)}x = X\,\Gamma(x)$. В цьому випадку рівняння $Lx = 0$ має розв'язок $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\, c_i$, де $c_i-$ координати довільного сталого вектора $c$ з деякого банахового простору числових послідовностей $c = \{c_1, c_2, c_3 \ldots\}$ таких, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i c_i$ збіжний. Таким чином, $\dim\, N(L) = \infty$.

Далі розглянемо рівняння $Lx = y$. Нехай $x = Uz$. Тоді з рівності (21) маємо:

$$L\overline{L}_r^{-1} z = (I_{\mathbf{B}_2} - K_2)z = y. \qquad (26)$$

За умовою теореми $K_2-$ скінченновимірний обмежений проектор у просторі $\mathbf{B}_2$, який має базис. Можна показати, що за $K_2$ можна взяти проектор $\mathcal{P}_{Y_L} z = \Psi\Phi(z)$. Звідки маємо, що $\dim\, N(L^*) = d$. Це означає, що оператор $L$ є $d-$ нормальним.

Тоді

$$(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})z = y. \qquad (27)$$

Застосувавши до обох частин рівності (27) проектор $\mathcal{P}_{Y_L}$, отримаємо необхідну і достатню умову розв'язності рівняння (26) $\mathcal{P}_{Y_L} y = 0$. Якщо ця умова виконується, то знайдеться $z_0$ таке, що $y = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})z_0$ і неоднорідне рівняння (26) має розв'язок $x = \overline{L}_r^{-1} z_0$.

Теорему доведено.

**Зауваження 1.** *Якщо* $\dim\ker L < \infty$, $\dim\ker L^* < \infty$, *то оператор* $L-$ *нетеровий. Тоді теореми 1, 2 переходять у теорему Ф.В. Аткінсона [3].*

**Зауваження 2.** *Якщо* $\dim\ker L < \infty$, $\dim\ker L^* < \infty$ *і* $\dim\ker L = \dim\ker L^*$, *то оператор* $L-$ *фредгольмовий. Тоді леми 2, 3 переходять у лему Е. Шмідта [2], а теореми 1,2 — у теорему С.М. Нікольського [1].*

**Зауваження 3.** *Усі доведені у статті твердження залишаються справедливими і у випадку, коли банахові простори* $\mathbf{B}_1$ *та* $\mathbf{B}_2$ *не мають базисів.*

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Никольский С.М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. – 1943.– 7, № 3. – С. 147–163.

2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.

3. *Аткинсон Ф.В.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах //Мат. сборник. Нов. сер. – 1951. – **28**, № 1.– С. 3–14.

4. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.

5. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.

6. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

7. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.

8. *Кадец М.И., Митягин Б.С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // УМН. – 1973. – *28*, вып. 6. – С. 77 – 94.

9. *Попов М.М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні. – 2007. – В. 13. – С. 78 – 116.

10. *Гринблюм М.М.* Биортогональные системы в пространстве Банаха //Докл. АН СССР. – 1945. – **47**, № 2. – С. 79 – 82.

11. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.