УДК 517.983

А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. А. Покутный (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

On the basis of a generalization of the well-known Schmidt lemma to the case of linear, bounded, normally solvable operators in Banach spaces, we propose a procedure for the construction of a generalized inverse for a linear, bounded, normally solvable operator whose kernel and image are complementable in the indicated spaces. This construction allows one to obtain a solvability criterion for linear normally solvable operator equations and a formula for finding their general solutions.

На основі узагальнення відомої леми Е. Шмідта на випадок лінійних обмежених нормально розв'язних операторів у банахових просторах запропоновано конструкцію узагальнено-оберненого оператора до лінійного обмеженого нормально розв'язного, ядро та образ якого доповнювальні в цих просторах. Ця конструкція дозволяє отримати критерій розв'язності та формулу для зображення загального розв'язку лінійних нормально розв'язних операторних рівнянь.

Многочисленные задачи теории функционально-дифференциальных уравнений и краевых задач для них [1, 2] могут быть записаны в виде линейного операторного уравнения $Lz = f$ с ограниченным оператором. Такая запись позволяет сосредоточиться на общих закономерностях, присущих каждому классу задач. В случае, когда оператор L всюду и однозначно разрешим, т. е. когда существует ограниченный обратный оператор L^{-1}, такие уравнения хорошо изучены. Если же оператор L не является всюду разрешимым, возникают задачи об обобщенном обращении операторов в функциональных пространствах [1]. Известно [3, 4], что при построении обобщенно-обратных операторов к нормально разрешимым классическая конструкция Э. Шмидта применима лишь для фредгольмовых операторов. Поэтому актуальной является задача о возможности построения ограниченных обобщенно-обратных операторов к различным классам линейных ограниченных нефредгольмовых операторов в банаховых пространствах. Так, в [5] с использованием теоремы Ф. В. Аткинсона [3], которая описывает класс нетеровых операторов и обобщает известную теорему С. М. Никольского [6], получена конструкция обобщенно-обратного оператора к нетеровому. Однако она не охватывает все множество обобщенно-обратимых операторов [7]. В работе выделен класс ограниченных операторов, действующих в бесконечномерных банаховых пространствах, для которых удается построить конструкцию ограниченного обобщенно-обратного оператора, аналогичную известной конструкции Э. Шмидта.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Lz = f \tag{1}$$

в предположении, что L — линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$, $L\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$.

Пусть ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ оператора L дополняемы [8, 9] в банаховых пространствах $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ соответственно. Это значит [7, с. 139], что оператор L обобщенно обратим. С каждой парой взаимно дополняемых пространств связаны ограниченные проекторы [8] $\mathscr{P}_{N(L)}$ и $\mathscr{P}_{R(L)}$, которые индуцируют разбиение $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ в прямые топологические суммы

$$\mathbf{B}_1 = N(L) \oplus X,$$
$$\mathbf{B}_2 = Y \oplus R(L), \tag{2}$$

$\mathscr{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$, $\mathscr{P}_{R(L)} : \mathbf{B}_2 \to R(L)$. Дополнительные проекторы на подпространства X и Y соответственно будем обозначать $\mathscr{P}_X = I_{\mathbf{B}_1} - \mathscr{P}_{N(L)}$ и $\mathscr{P}_Y = I_{\mathbf{B}_2} - \mathscr{P}_{R(L)}$.

Известно [8, с. 73], что если подпространство X_1 дополняемо подпространством X_2 в банаховом пространстве $\mathbf{B}$, то оно имеет бесконечно много различных дополнений $\widetilde{X}_2$. С каждой парой взаимно дополняемых подпространств связан ограниченный проектор $\mathscr{P}_{X_1}$. Норма проектора может служить оценкой „качества" дополнения: чем больше $\|\mathscr{P}_{X_1}\|$, тем „хуже" дополнение. Описание ограниченных проекторов $\widetilde{\mathscr{P}}_{X_1}$ в общем виде, порождающих это множество дополнений, дается в лемме А. Собчика [8, с. 80].

В дальнейшем класс линейных ограниченных обобщенно-обратимых операторов, действующих из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$, будем обозначать $GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$. Очевидно, что оператор из $GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ является нормально разрешимым.

Ставится задача о нахождении условий существования и построении ограниченного обобщенно-обратного оператора L^- к оператору $L \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, установлении критерия разрешимости и представлении решений уравнения (1).

Вспомогательный результат. Поставленная задача будет рассматриваться в предположении, что выполнено одно из следующих условий:

1. *Подпространство $N(L)$ линейно изоморфно дополняемому в Y подпространству Y_1, $N(L) \cong Y_1 \subseteq Y$.*

Это значит, что существуют линейный ограниченный обратимый оператор $J_1 : N(L) \to Y_1$ такой, что $J_1 N(L) = Y_1$, $J_1^{-1} Y_1 = N(L)$, и ограниченный проектор $\mathscr{P}_{Y_1} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$, разбивающий подпространство Y в прямую сумму замкнутых подпространств

$$Y = Y_1 \oplus Y_2, \tag{3}$$

где $Y_1 = \mathscr{P}_{Y_1}\mathbf{B}_2$, $Y_2 = \mathscr{P}_{Y_2}\mathbf{B}_2$, $\mathscr{P}_{Y_2} = (\mathscr{P}_Y - \mathscr{P}_{Y_1})$ — ограниченный проектор. В этом случае справедливы следующие разложения для тождественных операторов:

$$I_{\mathbf{B}_1} = \mathscr{P}_{N(L)} + \mathscr{P}_X,$$
$$I_{\mathbf{B}_2} = \mathscr{P}_{Y_1} + \mathscr{P}_{Y_2} + \mathscr{P}_{R(L)} \tag{4}$$

пространств $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ соответственно.

2. *Подпространство Y линейно изоморфно дополняемому в $N(L)$ подпространству $N_1(L)$, $Y \cong N_1(L) \subset N(L)$.*

В этом случае существуют линейный ограниченный обратимый оператор $J_2 : N_1(L) \to Y$ такой, что $J_2 N_1(L) = Y$, $J_2^{-1} Y = N_1(L)$, и ограниченный проектор $\mathscr{P}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$, разбивающий подпространство $N(L)$ в прямую сумму замкнутых подпространств

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L),$$

где $N_1(L) = \mathscr{P}_{N_1(L)}\mathbf{B}_1$, $N_2(L) = \mathscr{P}_{N_2(L)}\mathbf{B}_1$, $\mathscr{P}_{N_2(L)} = \mathscr{P}_{N(L)} - \mathscr{P}_{N_1(L)}$ — ограниченный проектор.

В этом случае имеем два разложения

$$I_{\mathbf{B}_1} = \mathscr{P}_{N_1(L)} + \mathscr{P}_{N_2(L)} + \mathscr{P}_X,$$

$$I_{\mathbf{B}_2} = \mathscr{P}_Y + \mathscr{P}_{R(L)}.$$

3. *Подпространство $N(L)$ линейно изоморфно подпространству Y*, $N(L) \cong Y$.

В этом случае существует линейный ограниченный обратимый оператор $J_3\colon N(L) \to Y$ такой, что $J_3N(L) = Y$, $J_3^{-1}Y = N(L)$.

Продолжим нулем операторы J_1 и J_3 на подпространстве X, а J_2 на подпространстве $X \oplus \oplus N_2(L)$ и обозначим расширения операторов J_i, $i = 1, 2, 3$, на пространство $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathscr{P}}_{Y_i}\colon \mathbf{B}_1 \to \to Y_i \subseteq Y$. Аналогично продолжим нулем оператор J_1^{-1} на подпространстве $Y_2 \oplus R(L)$, а операторы J_2^{-1}, J_3^{-1} на подпространстве $R(L)$ и обозначим через $\overline{\mathscr{P}}_{N_i(L)}\colon \mathbf{B}_2 \to N_i(L) \subseteq N(L)$ расширения операторов J_i^{-1}, $i = 1, 2, 3$, на пространство $\mathbf{B}_2$. В случае 3 $Y_i \equiv Y$, $N_i(L) \equiv N(L)$ и поэтому $\overline{\mathscr{P}}_{Y_i} \equiv \overline{\mathscr{P}}_Y$, $\overline{\mathscr{P}}_{N_i(L)} \equiv \overline{\mathscr{P}}_{N(L)}$.

Лемма 1. *Пусть L принадлежит $GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ и выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_i}$ имеет ограниченный односторонне обратный*

$$\overline{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1})_l^{-1} & - \text{ левый, если } N(L) \cong Y_1 \subset Y, \\ (L + \overline{\mathscr{P}}_Y)_r^{-1} & - \text{ правый, если } N(L) \supset N_1(L) \cong Y. \end{cases}$$

Общий вид односторонне обратных операторов $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ задается формулой

$$\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1} = \begin{cases} \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathscr{P}}_{Y_2}) & - \text{ левый, если } N(L) \cong Y_1 \subset Y, \\ (I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{\mathscr{P}}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{-1} & - \text{ правый, если } N(L) \supset N_1(L) \cong Y, \end{cases}$$

где $\widetilde{\mathscr{P}}_{N_2(L)}\colon \mathbf{B}_1 \to N_2(L)$ и $\widetilde{\mathscr{P}}_{Y_2}\colon \mathbf{B}_2 \to Y_2$ — произвольные ограниченные проекторы.

Доказательство. Пусть, например, $N(L)$ изоморфно подпространству $Y_1 \subset Y$. Покажем, что оператор $L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1}$ имеет ограниченный левый обратный. Для этого необходимо и достаточно показать, что [7, с. 61]:

i) $N(\overline{L}) = N(L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1}) = \{0\}$;

ii) $R(L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1})$ дополняемо в $\mathbf{B}_2$.

Покажем это.

i) Пусть существует элемент $z_0 \in \mathbf{B}_1$, $z_0 \neq 0$, такой, что

$$(L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1})z_0 = Lz_0 + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1}z_0 = 0. \tag{5}$$

Из (5) следует, что

$$Lz_0 \in R(L), \quad \overline{\mathscr{P}}_{Y_1}z_0 \in Y_1.$$

Подпространства $R(L)$ и Y взаимно дополняют друг друга, $Y_1 \subset Y$, следовательно, $R(L) \bigcap Y_1 = = \{0\}$. Таким образом, они имеют только один общий элемент — нулевой, $Lz_0 = 0$ и $\overline{\mathscr{P}}_{Y_1}z_0 = 0$, т. е. $z_0 \in N(L)$ и $z_0 \in N(\overline{\mathscr{P}}_{Y_1}) \subset X$ одновременно. Подпространства $N(L)$ и X взаимно дополняют друг друга. Следовательно, $N(L)\bigcap X = \{0\}$. Отсюда следует, что $z_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $N(L+\overline{\mathscr{P}}_{Y_1}) = \{0\}$.

ii) Дополняемость $R(L+\overline{\mathscr{P}}_{Y_1})$ следует из ограниченности проектора $\mathscr{P}_{Y_2}$ и соотношения (3).

Таким образом, оператор $L+\overline{\mathscr{P}}_{Y_1}$ имеет левый обратный.

Известно [7], что левые обратные операторы в общем виде записываются следующим образом: $\overline{L}_l^{-1} = \overline{L}_l^{-1}\mathscr{P}_{R(\overline{L})}$, где $\mathscr{P}_{R(\overline{L})}$ — некоторый проектор со свойством $R(\mathscr{P}_{R(\overline{L})}) = R(\overline{L})$. Как следует из (4), таким свойством обладает проектор $I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathscr{P}}_{Y_2}$, т. е. $R(I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathscr{P}}_{Y_2}) = R(\overline{L})$, где $\widetilde{\mathscr{P}}_{Y_2}\colon \mathbf{B}_2 \to Y_2$ — ограниченный проектор, построенный в общем виде. Отсюда следует, что общее представление левых обратных операторов таково:

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \mathscr{P}_{\tilde{Y}_2}).$$

В случае, когда Y изоморфно подпространству $N_1(L) \subset N(L)$, имеем $Y_1 \equiv Y$ и $\mathscr{P}_{Y_1} \equiv \mathscr{P}_Y$. Для существования ограниченного правого обратного оператора к оператору $L+\overline{\mathscr{P}}_Y$ необходимо и достаточно показать, что [7, с. 62]:

i) $R(\overline{L}) = R(L+\overline{\mathscr{P}}_Y) = \mathbf{B}_2$;

ii) $N(L+\overline{\mathscr{P}}_Y)$ дополняемо в $\mathbf{B}_1$.

Для этого случая доказательство аналогично проведенному выше.

***Замечание* 1.** Если оператор $L \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ нетеров ($\operatorname{ind} L = \dim\ker L - \dim\ker L^* \neq 0 < \infty$), то лемма 1 переходит в лемму 2.4 из [5, с. 47; 2].

***Замечание* 2.** В отличие от конечномерного случая, когда ядро и коядро оператора L конечномерны, для ограниченности односторонне обратного оператора $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ в бесконечномерном случае требования дополняемости нуль-пространства $N(L)$ и образа $R(L)$ оказывается недостаточно, так как ядро и образ оператора $\overline{L}$ могут оказаться недополняемыми. Поэтому дополняемость подпространств Y_1, $N_1(L)$ в Y и $N(L)$, соответственно, является существенным условием и выполняется в банаховых пространствах далеко не всегда (в отличие от гильбертовых, имеющих ортогональное дополнение к любому подпространству).

В качестве иллюстрации приведем следующий пример.

***Пример* 1.** Рассмотрим оператор $P_n z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots)$, где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots)$, действующий на конечномерное подпространство бесконечномерного банахового пространства, $P_n\colon l_p \to l_q$, где $p < q$, $p, q \in [1; +\infty]$, $p \neq 2$. Линейность и ограниченность такого оператора очевидна. Ядро $N(P_n)$ оператора P_n состоит из всех векторов пространства l_p, у которых первые n координат равны нулю. Очевидно, что бесконечномерное подпространство $N(P_n)$ дополняемо в пространстве l_p. Его дополнением служит изоморфное $\mathbb{R}^n$ подпространство, состоящее из элементов, у которых все координаты, начиная с $(n+1)$-й, равны нулю. Известно [8], что бесконечномерное подпространство X пространства l_p дополняемо тогда и только тогда, когда оно изоморфно l_p. Отсюда, в частности, следует, что l_p не дополняемо в l_q. Множество значений оператора P_n, очевидно, изоморфно $\mathbb{R}^n$, и, следовательно, дополняемо в l_q. Его дополнением является подпространство, изоморфное l_q. На основании изложенного выше можно сделать вывод о том, что оператор P_n индуцирует следующие разбиения подпространств l_p и l_q:

$$l_p = N(P_n) \oplus X,$$

$$l_q = Y \ominus R(P_n),$$

где подпространство $N(P_n)$ изоморфно l_p, а подпространство Y изоморфно l_q. Таким образом, подпространство $N(P_n)$ изоморфно недополняемому в Y подпространству Y_1.

Лемма 2. *Пусть L принадлежит $Gl(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ и выполнено условие 3. Тогда оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathscr{P}}_Y$ имеет ограниченный обратный*

$$\overline{L}^{-1} = (L + \overline{\mathscr{P}}_Y)^{-1}.$$

Доказательство. Поскольку $N(L)$ изоморфно Y, по лемме 1 существуют ограниченный левый и правый обратный операторы к оператору $\overline{L}$. Отсюда следует, что существует ограниченный обратный оператор $\overline{L}^{-1}$.

Замечание 3. Если оператор $L \in Gl(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ действует из банахова пространства $\mathbf{B}$ в себя и $N(L)$ изоморфно Y, то он называется приводимо-обратимым и доказанная лемма переходит в теорему 1.6 из [11, с. 28].

Замечание 4. Если оператор $L \in Gl(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ фредгольмов ($\operatorname{ind} L = 0$), то лемма 2 переходит в известную лемму Е. Шмидта [4, с. 340].

Основной результат.

Теорема 1. *Пусть L принадлежит $Gl(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ и выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда оператор*

$$L^- = \begin{cases} (L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1})_l^{-1} - \overline{\mathscr{P}}_{N(L)} & - \text{ левый, если } \quad N(L) \cong Y_1 \subset Y, \\ (L + \overline{\mathscr{P}}_Y)_r^{-1} - \overline{\mathscr{P}}_{N_1(L)} & - \text{ правый, если } \quad N(L) \supset N_1(L) \cong Y. \end{cases} \tag{6}$$

является ограниченным обобщенно-обратным к оператору L.

Общий вид обобщенно-обратных операторов L_0^- к оператору L дается формулой

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)}) L^- (I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathscr{P}}_Y),$$

где $\widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ и $\widetilde{\mathscr{P}}_Y : \mathbf{B}_2 \to Y$ — произвольные бесконечномерные ограниченные проекторы.

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо и достаточно проверить, что L^- удовлетворяет равенству [7, с. 140]

$$L = LL^- L. \tag{7}$$

Пусть, для определенности, $N(L)$ изоморфно подпространству $Y_1 \subset Y$. Тогда существует левый обратный оператор $\overline{L}_{l_0}^{-1}$. Предварительно покажем, что

$$L\overline{L}_{l_0}^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathscr{P}_Y. \tag{8}$$

Действительно, поскольку $\mathscr{P}_Y \overline{\mathscr{P}}_{Y_1} = \overline{\mathscr{P}}_{Y_1}$ и $\mathscr{P}_Y(Lz) = 0$, так как $Lz \in R(L)$, подействовав справа оператором $L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1}$ на обе части равенства (8), получим тождество, доказывающее это соотношение:

$$L = L(I_{\mathbf{B}_1} - \mathscr{P}_{N_2(L)}) = L\overline{L}_{l_0}^{-1}\overline{L} \equiv (I_{\mathbf{B}_2} - \mathscr{P}_Y)(L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1}) = L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1} -$$

$$-\mathscr{P}_Y L - \mathscr{P}_Y \overline{\mathscr{P}}_{Y_1} = L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_1} - \overline{\mathscr{P}}_{Y_1} = L.$$

Далее покажем, что

$$LL^- = I_{\mathbf{B}_2} - \mathscr{P}_Y. \tag{9}$$

Так как $L\overline{\mathscr{P}}_{N_1(L)} = 0$, используя равенство (8) и представление (6), получаем

$$LL^- = L(\overline{L}_{l_0}^{-1} - \overline{\mathscr{P}}_{N_1(L)}) = L\overline{L}_{l_0}^{-1} - L\overline{\mathscr{P}}_{N_1(L)} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathscr{P}_Y.$$

С учетом (9) проверим выполнение соотношения (7). Имеем

$$LL^- L = (I_{\mathbf{B}_1} - \mathscr{P}_Y)L = L - \mathscr{P}_Y L = L,$$

так как $\mathscr{P}_Y L = 0$. Ограниченность оператора L^- следует из ограниченности оператора $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ и оператора $\mathscr{P}_{N_1(L)}$.

Из теоремы 5.2 [7, с. 140] следует, что обобщенно-обратные операторы L_0^- в общем виде записываются так: $L_0^- = \mathscr{P}_1 L^- \mathscr{P}_2$, где произвольные ограниченные проекторы $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ удовлетворяют свойствам $(I_{\mathbf{B}_1} - \mathscr{P}_1)\mathbf{B}_1 = N(L)$, $\mathscr{P}_2\mathbf{B}_2 = R(L)$. В качестве таких проекторов можно взять проекторы $I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)}$ и $I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathscr{P}}_Y$, где $\widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ и $\widetilde{\mathscr{P}}_Y : \mathbf{B}_2 \to Y$ – произвольные ограниченные бесконечномерные проекторы, построенные в общем виде.

В случае, когда Y изоморфно подпространству $N_1(L) \subset N(L)$, теорема доказывается аналогично.

***Замечание* 5.** Если оператор $L \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ имеет конечномерные ядро и коядро, т. е. является нетеровым, то конструкция (6) переходит в конструкцию (2.14) из [5, с. 53; 2].

В связи с множественностью дополнений, о которой шла речь в начале работы, обобщенно-обратный оператор L^- определяется неоднозначно. С каждой парой ограниченных проекторов $\mathscr{P}_{N(L)}$ и $\mathscr{P}_Y$ связан свой обобщенно-обратный оператор.

***Замечание* 6.** Если $\mathscr{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ и $\mathscr{P}_Y : \mathbf{B}_2 \to Y$ — ограниченные проекторы и L^- — некоторый связанный с ними обобщенно-обратный оператор к оператору L, такой, что $LL^- = I_{\mathbf{B}_2} - \mathscr{P}_Y$, $L^- L = I_{\mathbf{B}_1} - \mathscr{P}_{N(L)}$, то любой другой обобщенно-обратный к L оператор $\widetilde{L}^-$ (связанный с проекторами $\widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ и $\widetilde{\mathscr{P}}_Y : \mathbf{B}_2 \to Y$) имеет вид

$$\widetilde{L}^- = (I_{\mathbf{B}_1} + \mathscr{P}_{N(L)} - \widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{B}_2} + \mathscr{P}_Y - \widetilde{\mathscr{P}}_Y),$$

где $R(\widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)}) = R(\mathscr{P}_{N(L)}) = N(L)$, $R(\widetilde{\mathscr{P}}_Y) = R(\mathscr{P}_Y) = R(L)$, $I_{\mathbf{B}_1}, I_{\mathbf{B}_2}$ — тождественные операторы в пространствах $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ соответственно [12, с. 827].

Для случая, когда $N(L)$ изоморфно Y, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть L принадлежит $GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ и выполнено условие 3. Тогда оператор*

$$L^- = (L + \overline{\mathscr{P}}_Y)^{-1} - \overline{\mathscr{P}}_{N(L)} = \overline{L}^{-1} - \overline{\mathscr{P}}_{N(L)} \tag{10}$$

является ограниченным обобщенно-обратным к оператору L.

Общий вид обобщенно-обратных операторов L_0^- к оператору L дается формулой

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathscr{P}}_Y),$$

где $\widetilde{\mathscr{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ и $\widetilde{\mathscr{P}}_Y : \mathbf{B}_2 \to Y$ — произвольные ограниченные бесконечномерные проекторы.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 7. Если оператор $L \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ имеет конечномерные ядро и коядро и $\dim N(L) = \dim N(L^*)$, т. е. он является фредгольмовым, то конструкция (10) переходит в конструкцию из [4, с. 340].

Далее получим условия разрешимости и представление общего решения операторного уравнения (1).

Из (3) следует, что общее решение операторного уравнения (1) с линейным ограниченным обобщенно-обратимым оператором L представляет собой прямую сумму

$$z = \tilde{z} + \bar{z}$$

общего решения $\tilde{z}$ соответствующего (1) однородного уравнения $Lz = 0$ и частного решения $\bar{z} = L^- f$ неоднородного уравнения (1).

Поскольку оператор L принадлежит $GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, линейное операторное уравнение (1) является нормально разрешимым, и для его разрешимости [10] необходимо и достаточно, чтобы элемент $y \in \mathbf{B}_2$ принадлежал образу $R(L)$ оператора L. Поскольку $R(L) = N(\mathscr{P}_Y)$, из (2) следует, что $y \in \mathbf{B}_2$ будет принадлежать образу $R(L)$ оператора L тогда и только тогда, когда

$$\mathscr{P}_Y f = 0. \tag{11}$$

Эти рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть L принадлежит $GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$. Операторное уравнение (1) разрешимо для тех и только тех $y \in \mathbf{B}_2$, для которых выполняется условие (11), и при этом оно имеет семейство решений*

$$z = \mathscr{P}_{N(L)} \hat{z} + L^- f, \tag{12}$$

где $\mathscr{P}_{N(L)} \hat{z}$ — общее решение соответствующего (1) однородного уравнения $Lz = 0$, $\hat{z}$ — произвольный элемент банахового пространства $\mathbf{B}_1$, $L^- f$ — частное решение операторного уравнения (1), L^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору L.

Доказательство. Подставив решение (12) в исходное уравнение (1), с учетом соотношений (9) и (11) получим

$$Lz = L\mathscr{P}_{N(L)}\hat{z} + LL^- f = LL^- f = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathscr{P}_Y) f =$$

$$= I_{\mathbf{B}_2} f - \mathscr{P}_Y f = I_{\mathbf{B}_2} f = f,$$

так как $L\mathscr{P}_{N(L)} = 0$, а $\mathscr{P}_Y f = 0$ по условию теоремы.

Теорема доказана.

Об аналитическом представлении проекторов. Проекторы, используемые в данной статье, могут быть представлены аналитически, если банаховы пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ имеют топологические базисы. Для определенности предположим, что пространство $\mathbf{B}_1$ имеет базис Шаудера. Тогда подпространство $N(L)$ также имеет базис Шаудера.

Напомним, что последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ векторов банахового пространства называется базисом Шаудера или топологическим базисом этого пространства, если каждый его вектор

z однозначно раскладывается в ряд $z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$, сходящийся по норме. Такое пространство обязательно сепарабельное.

Проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$ может быть представлен с помощью биортогональной системы функционалов к элементам базиса, которая существует в силу минимальности базисной системы [15]. Пусть последовательность $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, является базисом $N(L)$, а $\gamma_i \in (\mathbf{B}_1)^*$ — соответствующая ей биортогональная система линейных непрерывных функционалов $\gamma_i(f_j) = \delta_{ij}, i, j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathcal{P}_{N(L)}z = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}z,$$

где $\mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}$ — монотонная последовательность проекторов на подпространства $N^{(n)}(L) \subset N(L)$, $\mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(z) f_i$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Аналогично могут быть найдены и другие проекторы в случае существования базиса Шаудера (являющегося одновременно и минимальной системой) в соответствующих пространствах.

Отметим, что любое сепарабельное гильбертово пространство имеет базис Шаудера, каковым является каждая тотальная ортонормированная система векторов (в то время как среди сепарабельных банаховых пространств встречаются не имеющие топологического базиса).

В случае, когда пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ гильбертовы и ядро обладает минимальной ортогональной системой $\{f_\alpha, \alpha \in A\}$, проектор на нуль-пространство L имеет вид

$$\mathcal{P}_{N(L)}z = \sum_{\alpha\in A} (f_\alpha^*, z) f_\alpha,$$

где $f_\alpha^* : (f_\alpha^*, f_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, A — множество произвольной мощности [13, с. 239].

Если гильбертово пространство сепарабельно, то условие минимальности системы векторов $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ эквивалентно следующему [14]: для любого j величина

$$\delta_j^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(f_j, f_{j+1}, \ldots, f_n)}{\Gamma(f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_n)} > 0,$$

где $\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — определитель Грама системы векторов $\{g_i\}_{i=1}^{n}$.

В этом случае проектор на нуль-пространство $N(L)$ можно найти следующим образом:

$$\mathcal{P}_{N(L)}z = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}z,$$

где

$$\mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}z = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(-1)} (f_j, z) f_i, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$\alpha_{ij}^{(-1)}$ — элементы матрицы, обратной к матрице Грама $\Gamma(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Существование предела и то, что так определяемый оператор будет проектором, следует из теоремы 7 [15, с. 230] в силу монотонности последовательности проекторов $\mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}z$. В случае, когда $N(L)$ — конечномерное подпространство, конструкция проектора переходит в известную для n-нормальных операторов [16].

***Пример* 2.** Найдем условия разрешимости и общий вид решений операторного уравнения

$$(Lz)(t) = z(t) + M(t)\int_0^1 N(s)z(s)ds = f(t), \tag{13}$$

в котором оператор-функции

$$M(t) = \operatorname{diag}\{e^t, e^t, \ldots, e^t, e^t, \ldots\},$$

$$N(s) = \operatorname{diag}\{s, 0, s, 0, \ldots, s, 0, \ldots\}$$

действуют из банахова пространства $\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$ в себя с нормами $|||M|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,1]}||M(t)||_{\mathbf{c}}$, $|||N|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,1]}||N(t)||_{\mathbf{c}}$, вектор-функция $f(t)$ действует из отрезка $[0,1]$ в банахово пространство $\mathbf{c}$ всех сходящихся числовых последовательностей: $f(t)\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}) := \{f(\cdot)\colon [0,1]\to \to \mathbf{c}\}$.

Из определения оператор-функций $M(t)$ и $N(t)$ следует, что

$$|||M|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,1],\, i,j\in\mathbb{N}} |m_{ij}(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |e^t| \le e,$$

$$|||N|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,1],\, i,j\in\mathbb{N}} |n_{ij}(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |t| \le 1.$$

Тогда

$$||L||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{z\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}),\, z\neq 0} \frac{||Lz||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{||z||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} =$$

$$= \sup_{z\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}),\, z\neq 0} \frac{||z(t) + M(t)\int_0^1 N(s)z(s)ds||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{||z||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \le$$

$$\le \sup_{z\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}),\, z\neq 0} \frac{||z(t)||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} + ||M(t)||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}\int_0^1 ||N(s)||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}||z(s)||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}ds}{||z||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \le$$

$$\le \sup_{z\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}),\, z\neq 0} \frac{(1+e)||z||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{||z||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \le 1+e.$$

Таким образом, оператор L является линейным ограниченным оператором, действующим из банахового пространства непрерывных на промежутке $[0,1]$ функций $\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$ в себя. Бесконечномерные подпространства $N(L)$ и Y изоморфны как подпространства сепарабельного банахового пространства $\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$ [10, с. 55].

Используя изложенную выше теорию, построим обобщенно-обратный оператор L^- к оператору L.

Для оператора L проекторы $\mathscr{P}_{N(L)}$ и $\mathscr{P}_{Y_L}$ имеют вид

$$(\mathscr{P}_{N(L)}z)(t) = X(t)\int_0^1 \Gamma(s)z(s)ds, \qquad (\mathscr{P}_{Y_L}f)(t) = \Psi\int_0^1 \Phi(s)f(s)ds,$$

а операторы $\overline{\mathscr{P}}_{Y_L}$ и $\overline{\mathscr{P}}_{N(L)}$ — соответственно вид

$$(\overline{\mathscr{P}}_{Y_L}z)(t) = \Psi\int\limits_0^1 \Gamma(s)z(s)ds, \qquad (\overline{\mathscr{P}}_{N(L)}f)(t) = X(t)\int\limits_0^1 \Phi(s)f(s)ds,$$

где

$$X(t) = \operatorname{diag}\left\{X_{(4\times 2)}(t), X_{(4\times 2)}(t),\ldots\right\}, \qquad \Gamma(t) = \operatorname{diag}\left\{\Gamma_{(2\times 4)}(t), \Gamma_{(2\times 4)}(t),\ldots\right\},$$

$$X_{(4\times 2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \Gamma_{(2\times 4)}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}\left\{\Phi_{(2\times 4)}(t), \Phi_{(2\times 4)}(t),\ldots\right\}, \qquad \Psi = \operatorname{diag}\left\{\Psi_{(4\times 2)}(t), \Psi_{(4\times 2)}(t),\ldots\right\},$$

$$\Phi_{(2\times 4)}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{(4\times 2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\int\limits_0^1 \Gamma(s)X(s)ds = E_\infty, \qquad \int\limits_0^1 \Phi(s)\Psi ds = E_\infty,$$

E_∞ — бесконечная единичная матрица.

Из ограниченности оператор-функций $X(t)$ и $\Gamma(t)$ следует ограниченность проектора $\mathscr{P}_{N(L)}$:

$$\|\mathscr{P}_{N(L)}\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{z\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}),z\neq 0} \frac{\|\mathscr{P}_{N(L)}z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} =$$

$$= \sup_{z\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}),z\neq 0} \frac{\|X(t)\int_0^1 \Gamma(s)z(s)ds\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}),z\neq 0} \frac{\|X(t)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}\int_0^1 \|\Gamma(s)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}\|z(s)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}ds}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}),z\neq 0} e\,\frac{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \leq e.$$

Аналогично убеждаемся в ограниченности проектора $\mathscr{P}_Y$, операторов $\overline{\mathscr{P}}_{Y_L}$ и $\overline{\mathscr{P}}_{N(L)}$. Вследствие ограниченности проекторов $\mathscr{P}_{N(L)}$ и $\mathscr{P}_Y$ нуль-пространство $N(L)$ и подпространство Y дополняемы в пространстве $\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$. Следовательно, оператор L является обобщенно обратимым. Бесконечномерные подпространства $N(L)$ и Y изоморфны как подпространства сепарабельного банахового пространства $\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$ [10, с. 55].

По лемме 2 оператор

$$((L+\overline{\mathscr{P}}_{Y_L})z)(t) = z(t) + M(t)\int\limits_0^1 N(s)z(s)ds + \Psi\int\limits_0^1 \Gamma(s)z(s)ds =$$

$$= z(t) + \overline{M}(t)\int_0^1 \overline{N}(s)z(s)ds.$$

где

$$\overline{M}(t) = \operatorname{diag}\left\{M_{(2\times 3)}(t), M_{(2\times 3)}(t), \ldots\right\},$$

$$\overline{N}(s) = \operatorname{diag}\left\{N_{(3\times 2)}(s), N_{(3\times 2)}(s), \ldots\right\},$$

$$M_{(2\times 3)}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & -2 \\ 0 & e^t & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_{(3\times 2)}(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

имеет ограниченный обратный.

Оператор, обратный к оператору $\overline{L} = L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_L}$, имеет вид

$$((L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_L})^{-1} f)(t) = f(t) + \overline{M}(t)S^{-1}\int_0^1 \overline{N}(s)f(s)ds,$$

где $S^{-1} = \operatorname{diag}\left\{S^{-1}_{(3\times 3)}, S^{-1}_{(3\times 3)}, \ldots\right\}$ — оператор, обратный к оператору $S = E_\infty - D$,

$$S^{-1}_{(3\times 3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \int_0^1 \overline{N}(s)\overline{M}(s)ds.$$

Тогда, использовав теорему 2, получим обобщенно-обратный оператор L^- к оператору L:

$$(L^- f)(t) = ((L + \overline{\mathscr{P}}_{Y_L})^{-1} - \overline{\mathscr{P}}_{N(L)} f)(t) = f(t) + \overline{M}(t)S^{-1}\int_0^1 \overline{N}(s)f(s)ds -$$

$$-X(t)\int_0^1 \Phi(s)f(s)ds = f(t) + M_1(t)\int_0^1 N_1(s)f(s)ds,$$

где

$$M_1(t) = \operatorname{diag}\left\{M_{(2\times 4)}(t), M_{(2\times 4)}(t), \ldots\right\},$$

$$N_1(s) = \operatorname{diag}\left\{N_{(4\times 2)}(s), N_{(4\times 2)}(s) \ldots\right\};$$

$$M_{(2\times 4)}(t) = \begin{pmatrix} 2(e^t - 1) & 0 & -e^t & -e^t \\ 0 & e^t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_{(4\times 2)}(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Оператор L обобщенно обратим и, следовательно, нормально разрешим. Тогда по теореме 3 при выполнении условия

$$(\mathscr{P}_{Y_L} f)(t) = \Psi\int_0^1 \Phi(s)f(s)ds = 0 \tag{14}$$

уравнение (13) имеет решение. Условие (14) выполняется, если компоненты вектор-функции $f(t) = \mathrm{col}\,(f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int_0^1 s f_{2k-1}(s)ds = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{15}$$

При выполнении условий (15) операторное уравнение (13) имеет семейство решений

$$z(t) = (\mathscr{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + (L^- f)(t) = X(t) \int_0^1 \Gamma(s)\hat{z}(s)ds + f(t) + M_1(t) \int_0^1 N_1(s) f(s)ds,$$

где $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{C}([0,1], \mathbf{c})$.

1. *Ben-Israel A., Greville T. N. E.* Generalized Inverses. – Second ed. – New York: Springer, 2003.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
3. *Аткинсон Ф. В.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат. сб. Нов. сер. – 1951. – **28**, № 1. – С. 3–14.
4. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.
6. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. – 1943. – **7**, № 3. – С. 147–163.
7. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
8. *Кадец М. И., Митягин Б. С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, вып. 6. – С. 77–94.
9. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
11. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 218 с.
12. *Nashed M. Z., Votruba G. F.* A unified approach to generalized inverses of linear operators. I. Algebraic, topological and projectional properties // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – **80**, № 5. – P. 825–830.
13. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Наук. думка, 1990. – 600 с.
14. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Вища шк., 1977. – Т. 1. – 315 с.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 750 с.
16. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 2. – С. 43–115.

Получено 25.12.12