

В.С. Деева,  
С.М. Слободян, д-р техн. наук  
Национальный исследовательский Томский политехнический институт, Россия,  
С.А. Романяшина  
Житомирский национальный агроэкологический университет

## ДИНАМИКА КОНТАКТНОГО ПРОСТРАНСТВА СКОЛЬЖЕНИЯ СРЕДЫ И ПОВЕРХНОСТИ РАБОЧЕГО ОРГАНА АГРОМАШИН

*Для стационарного режима движения создана аналитическая модель динамики фрактального разрушения контактного слоя скольжения сред при воздействии на грунт режущего элемента рабочего органа машин агротехники. Анализ выявил изменение свойств стационарного потока фракций разрушения тела скольжения в контактном пространстве в зависимости от динамики движения, ориентации пространства и свойств среды многомерного контактного слоя поверхности режущего элемента и грунта в предположении в среднем однородно распределённой сплошной среды.*

*An analytical dynamical model of a fractal fracture of a thin contact layer sliding medium set for the steady state of sliding contact. Analysis revealed a change in the properties of steady flow fractions decomposition of the body slip in contact space from movement dynamics, space orientation and properties of the medium multidimensional contact layer.*

### Введение

Качество прогноза состояния изношенности элементов, направляющих поток сыпучего материала, а также, например, режущего элемента рабочего органа различных средств агротехники, которое для целей контроля и диагностики состояния и живучести этих элементов можно характеризовать на основе получения данных их состояния в процессе скользящего контакта (СК) конденсированных сред, зависит от точности аналитической оценки параметров слоёв контактно взаимодействующих сред или математической модели при их метрологии [1–5]. Сложность оценки времени жизни СК пары элементов (например, грунт и лемех плуга) определена вероятностным характером процесса скольжения сред ввиду широкого спектра факторов взаимодействия, прилегающих к друг другу, слоёв сред СК, факторов часто взаимно противоположного направления влияния.

Трудности решения задачи прогноза состояния скользящего контакта сред материалов элементов агротехники состоят: во-первых, в метрологической недоступности; во-вторых, в отсутствии аналитического описания ряда процессов, протекающих в СК; в-третьих, в недостатке априорной информации для оценки экстремума функции поведения материалов сред СК при оптимизации диагностики состояния; в-четвертых, в стохастичности состава среды обрабатываемого грунта, а, значит, и его влияния на режущий элемент. Многие известные методики прогноза СК не учитывают физику явлений случайного взаимодействия сред элементов в пространстве тонкого контактного слоя [1–5].

Ниже представлена математическая модель стационарного взаимодействия смежных слоёв контактно взаимодействующих сред как процесса разрушения и переноса фракций обоих тел СК в пространстве контактного слоя.

### Постановка задачи

Используя общий подход к исследованию физических процессов в системах плотно упакованной дискретной структуры конденсированных тел, за основу модели фрактального процесса разрушения тела, движущегося по поверхности другого примем подход [6–8], основанный на аналогии модели гидродинамики. Несмотря на обилие работ [3–5] по контактному разрушению тел, практически отсутствуют публикации с анализом динамики и кинетики этого, недоступного для наблюдения в реальном времени, вероятностного контактного пространства взаимодействия грунта с режущим элементом средств агротехники. Модель этого процесса нужна не только в плане оценки живучести режущего элемента как тела скольжения, что весьма актуально для прогноза состояния их живучести, но и для теории физики и управления контактным взаимодействием потока сыпучих тел с направляющими этот поток элементами в представлении их структуры как структуры конденсированных тел. Одно из важных условий оценки живучести рабочих элементов агротехники является знание закономерностей контактного скольжения взаимодействия рабочей пары тел, которые определяют особенности оптимального выбора параметров и технических характеристик при проектировании рабочих органов агротехники.

### Основные положения

Примем, что область скользящего взаимодействия режущего элемента и грунта в установившемся режиме постоянна. Тогда удельный объём  $V_{\text{пф}}$  фракций разрушения контактного слоя плотно упакованной среды через  $S_{\text{пф}}$  — поперечное сечение контактного слоя (назовём его канал движения потока фракций) в единицу времени равен произведению  $v_{\text{пф}}$  — средней линейной скорости

движення фракцій тела по каналу (в продольном направлении) на  $S_{\text{пф}}$  — площадь поперечного сечения канала или тела:  $V_{\text{пф}} = S_{\text{пф}} v_{\text{пф}} t$ . Если принять  $(x, y, z)$  — переменные в системе координат контактного пространства пары тел и  $\Delta t$  — интервал времени оценки скорости, то скорость движения потока фракций разрушения в контактном пространстве в условиях скользящего взаимодействия тел в системе координат переменных  $(x, y, z)$  определится проекциями вектора его скорости  $v_{\text{пф}}(x, y, z, t)$ , характер изменения которых имеет вид:

$$v_x(t) = [x_i(t + \Delta t) - x_i(t)] / \Delta t;$$

$$v_y(t) = [y_i(t + \Delta t) - y_i(t)] / \Delta t;$$

$$v_z(t) = [z_i(t + \Delta t) - z_i(t)] / \Delta t.$$

Фрактальный распад тел скольжения длителен. Время полного разрушения тела скольжения пропорционально отношению объема тела к интенсивности потока и геометрическим размерам фракций разрушения тела, находящегося в контактном скользящем взаимодействии:

$$t_{\text{пр}} = V_{\text{пф}} / \bar{n}_{\text{фр}} \bar{V}_{\text{фр}}.$$

Ясно, что  $\bar{n}_{\text{фр}}$  — среднее число и размер отдельных фракций разрушения структуры тела скольжения являются коррелированными величинами. В общем случае:

$$\bar{V}_{\text{фр}} = \iiint_{(x,y,z)} V_{\text{фр}} dx dy dz = \iiint_{(V)} V_{\text{фр}} dV.$$

Отсюда среднее число фракций разрушения тела при скольжении равно  $\bar{n}_{\text{фр}} = V_{\text{пф}} / \bar{V}_{\text{фр}}$ . Интенсивность (масса) потока фракций разрушения тела скольжения, проходящего через поперечное сечение области контакта тел в единицах массы равна произведению объемного размера разрушения на плотность материала тела скольжения

$$m_{\text{пф}}(t) = \rho_{\text{тс}} S_{\text{пф}} v_{\text{пф}} t = \sum_{i=1}^k \bar{V}_{\text{фр}} v_{\text{пф}} \rho_{\text{фр}}.$$

Примем плотность тела скольжения тождественной плотности фракции среды  $\rho_{\text{тс}} \equiv \rho_{\text{фр}}$ . В общем случае это может не выполняться, например, в случае более упругого, чем плоскость, тела скольжения. Заметим, что в ньютоновской механике масса — величина аддитивная, т. е. масса любой системы тел равна сумме масс

$$m = \sum_{i=1}^k m_i$$

или масса фракции тела равна

$$m_i = \int \rho dV, \text{ где интегрирование идет по всему}$$

объёму фракции или тела. Учтём, что средняя плотность потока фракций разрушения неоднородных сред скольжения в контактном пространстве определяется отношением массы тела к его объёму

$$c_{\text{ср}} = m / V.$$

В случае неравновесной динамики потока фракций разрушения неоднородной структуры сред скольжения

$v_{\text{фр}}, \bar{V}_{\text{фр}}, \rho_{\text{фр}}$  не постоянны, как удельная плотность массы потока фракций, т. е. они — функции времени и координат, что может приводить к нарушению постоянства плотности распределения массы потока фракций по сечению потока. Учитывая задачу исследования — создание модели стационарного потока фракций разрушения, примем  $v_{\text{фр}}, \bar{V}_{\text{фр}}$ , как средние центрированные значения процесса разрушения. Условие стационарности случайного потока фракций распада тела скольжения предполагает постоянство средних характеристик потока во всех поперечных сечениях пространства. Другими словами, стационарность установившегося состояния приводит к соблюдению постоянства уравнения неразрывности потока фракций разрушения:

$$m_{\text{пф}}(t) = c_{\text{тс}} S_{\text{пф}} v_{\text{пф}} t = \sum_{i=1}^k \bar{V}_{\text{фр}} v_{\text{пф}} c_{\text{фр}} = \text{const}.$$

Это уравнение применимо для любого стационарного режима потока фракций разрушения, не имеющего притока или отбора фракций на пути их движения в контактном пространстве тела скольжения. При разрушении однородного тела или его контактного слоя на поток фракций однородной дисперсности (изоморфный поток) уравнение неразрывности упрощается:

$$m_{\text{фр}} = c_{\text{фр}} V_{\text{фр}} v_{\text{фр}} = \text{const}$$

и сводится к условию постоянства объёмной плотности и массы потока изоморфных фракций разрушения тела в любом сечении слоя.

В движении тела по траектории скольжения часть потока фракций разрушения поверхностного слоя на интервале прохождения контактной области последовательно выпадает из контактного пространства. Поэтому, оценку динамики потока фракций распада тела скольжения (на интервале его движения в контактном пространстве) произведём составлением уравнения баланса потока. При равномерной плотности и динамике вылета потока из контактного пространства уравнение баланса потока фракций для массового расхода  $m = \sum_{i=1}^k m_i$  примет вид:

$$m = m_0 - m_{\text{удфр}} z,$$

где  $m_0$  — объёмная массовая эмиссия фракций разрушения с поверхности тела в контактном пространстве скольжения (в начальном сечении потока фракций распада тела скольжения);  $m_{\text{удфр}}$  — удельный отток части потока фракций разрушения на интервале  $i$ -го сечения потока (в единицах массы фракций потока в единицу времени на единицу размера контактного пространства);  $z$  — координата — расстояние от поверхности тела скольжения — начала потока фракций разрушения до текущего сечения контактного пространства. Аналогично запишем и уравнение баланса стационарного потока фракций распада тела скольжения

$$m_{\text{фрст}} = m_0 - m_{\text{удст}} z.$$

где  $m_{удст}$  — удельный объёмный отток фракций в единицу времени на единицу размера контактного пространства (плотность интенсивности потока фракций распада тела скольжения). Если точнее, то объёма его слоя.

При циклической траектории скольжения тела, когда на пути скольжения при адгезии к поверхности основного тела фракций разрушения могут находиться фракции от предыдущего цикла разрушения, назовём этот поток фракций транзитным, уравнение непрерывности примет вид:

$$m = m_{мек} + m_{мр} - m_{удст}z = m_{мр} + m_{удст}(h - z),$$

где  $h$  — размер тела в ортогональном к плоскости скольжения направлении.

Для полного учёта особенностей динамики распада тела скольжения в математической модели, кроме уравнения неразрывности потока, полезно иметь уравнение баланса энергии потока фракций распада. Процесс разрушения контактного слоя в какой-то степени равносильно выполнению работы отрыва фракции, перемещению её в контактное пространство и за его пределы.

Потенциальная работа — это работа по перемещению фракции из одной в другую область координат, т.е. из поверхностного слоя через контактное пространство за его пределы. Другими словами, изменение энергии фракции, осуществлённое путем передачи фракции движения, это и есть работа, совершённая над фракциями тела скольжения. Передача энергии происходит в форме процесса силового скользящего взаимодействия поверхностей тел.

При поступательном движении (поток фракций распада слоя считаем поступательным) с одинаковыми векторами скорости фракций элементарная работа  $\delta A$  движения  $dz$  составит:

$$\delta A = \sum_{i=1}^k F_i dz = \vec{F} d\vec{z}.$$

В стационарном движении сила, действующая на отдельную фракцию и поток фракций  $\vec{F} = const$  и  $A = Fz$ . Сила, действующая на поток, потенциальная, так как производимая ею работа по перемещению потока фракций зависит только от начального и конечного положений фракций в контактном пространстве. Мерой движения потока фракций разрушения служит кинетическая энергия, измеряемая той работой, которую может совершить поток фракций при его торможении до полной остановки, и вычисляемая по известной формуле  $w_k = mv^2 / 2$ .

Если учесть, что это поток отдельных фракций, то формула примет вид

$$w_{кнф} = 0,5 \int_{(V)} cv^2 dV = 0,5 \int_{(m)} v^2 dm$$

где  $dm$  — масса отдельной  $i$ -той фракции;  $dV$ ,  $\rho$  и  $v$  — объём, плотность и модуль вектора скорости фракций в потоке;  $m$  и  $V$  — масса и объём полного потока фракций. При поступательном потоке его энергия равна

$$w_{кнф} = mv^2 / 2.$$

Потенциальная энергия фракций потока  $dw_{пф}$  подобно силовой функции  $U$  характеризует потенциальное поле потока фракций и связана с ней равенством  $dw_{пф} = -dU$  или  $w_{пф} = -U + C$ , где  $C$  — постоянная интегрирования.

Учтя действие основных факторов в условиях движения потока фракций, для элементарной работы получим следующее уравнение:

$$\delta w = \delta A_1 + d(v^2 / 2) + g dz + \delta A_2,$$

где  $\delta A_1$  — удельная эффективная работа, передаваемая телам внешней системы (в тонком контактном слое  $\delta A_1 \approx 0$ ). Второе слагаемое связано с изменением кинетической энергии; третье — с потенциальной ( $g = 9,807 м / с^2$  — ускорение свободного падения фракций в потоке под влиянием гравитации). Четвёртое — необратимые превращения работы

$$A_2 = [R_v (0,5v^2) / \ell_s] dz, \text{ где } \ell_s = 2\sqrt{xy/p} —$$

эффективный размер сечения потока фракций разрушения находится из тождества прямоугольного и круглого сечений потока  $pD^2 / 4 = xy$ ;  $R_v$  — гидравлическое сопротивление среды контактного пространства движению фракций разрушения;  $x$  и  $y$  — размеры тела скольжения в плоскости образования потока фракций разрушения (для круглого тела  $\ell_s = D$  — его диаметру);  $z$  — текущая координата сечения потока, отсчитываемая от начала его формирования (от плоскости отрыва фракций от тела скольжения). Из выражения для  $\delta w$  видим, что работа и кинетическая энергия потока частиц распада тела скольжения диссипирует на преодоление трения о среду их пролета — гидравлическое сопротивление среды, на движение — изменение своего положения в потоке и на изменение скорости потока частиц. Таким образом, уравнение баланса энергии элементарной фракции разрушения тела скольжения может быть представлено как

$$- \delta w = \delta_7 d(v^2 / 2) + g dz + R_v (v^2 / 2 \ell_s) dz = \alpha_7 d(v^2 / 2) + [g + R_v (v^2 / 2 \ell_s)] dz$$

В левой части уравнения стоит выражение удельной потенциальной работы потока фракций при его движении в контактном пространстве; знак минус отражает не приращение, процесс диссипации энергии. Это уравнение динамики движения потока фракций разрушения тела скольжения.

Уравнение удельной энергии приводится к простому виду для потока:

$$\rho^{-1} dw + \alpha_7 d(v^2 / 2) + [g + R_v (v^2 / 2 \ell_s)] dz = 0.$$

Для ламинарного потока фракций  $\alpha_7 = 2$ , для турбулентного режима  $\alpha_7 = 1,1$ . Первое слагаемое в уравнении — удельная работа движения частиц потока; вто-

рое — работа на изменение скорости фракций, т.е. их кинетической энергии; третье — удельная работа на преодоление сопротивления среды пространству движению потока фракций. Последнее и второе слагаемые — аутентичны. Это дифференциальное уравнение баланса энергии потока частиц стационарного движения контактного слоя скольжения.

Для горизонтального потока фракций  $g = 0$  уравнение баланса:

$$\rho^{-1}dw + \alpha_T d(v^2/2) + R_v(v^2/2\ell_z) dz = 0,$$

которое, при  $v \equiv const$ , принимает простой вид:

$$\rho^{-1}dw + R_v(v^2/2\ell_z) dz = 0.$$

Уравнения стационарного движения потока фракций в контактном пространстве сведём в систему:

• уравнение динамики движения

$$\rho^{-1}dw + \alpha_T d(v^2/2) + [g + R_v(v^2/2\ell_z)] dz = 0;$$

• уравнение баланса массы потока фракций — уравнение его неразрывности

$$m_{фр} = c_{фр} V_{фр} v_{фр} = const$$

и состояния, если считать поток (двухфазная система — фракции + среда) как газ, то можно принять за основу уравнение Клайперона  $p = c\eta_p R_p T$ .

Решая систему уравнений, сведём её к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$-c z_p R_p T v^{-2} d(v^2) + \alpha_T d(v^2) + [2g + R_v v^2 / \ell_z] dz = 0.$$

Стационарное движение потока фракций в контактном пространстве рассмотрим в изотермических условиях, то есть при постоянной температуре среды. Отклонение ориентации контактного пространства от горизонтали учтём введением зависимости гравитационной составляющей движения фракций от  $\alpha_{\perp}$  — угла отклонения пространства от горизонтали:

$$-c z_p R_p T v^{-2} d(v^2) + \alpha_T d(v^2) + [2g \cos \alpha_{\perp} + R_v v^2 / \ell_z] dz = 0.$$

При горизонтальном пространстве  $\alpha_{\perp} = 0$  и  $\cos \alpha_{\perp} = 1$ . При вертикальной ориентации  $\beta \alpha = 90^\circ$ , а  $\cos \beta \alpha = 0$ . Сила тяжести направляет поток фракций вдоль пространства. Поток фракций — падающий вниз и компонента  $2gz = 0$ .

Для горизонтальной геометрии контактного пространства уравнение стационарного движения потока фракций разрушения приводится, с учётом силы  $p = c\eta_p R_p T$  — давления тела скольжения, к частному виду

$$-c z_p R_p T v^{-2} d(v^2) + \alpha_T d(v^2) + [2g + R_v v^2 / \ell_z] dz = 0.$$

Приводя подобные слагаемые, получим следующее уравнение

$$- \frac{z_p R_p T d(v^2)}{v^2 [2g \cos \alpha_{\perp} + R_v v^2 / \ell_z]} + \frac{\alpha_T d(v^2)}{[2g \cos \alpha_{\perp} + R_v v^2 / \ell_z]} + dz = 0.$$

Проведём интегрирование уравнения в диапазоне изменения скорости потока фракций, считая, что в момент распада поверхности ( $z=0$ ) фракция приобретает скорость  $v_0$ , а в области второй стенки зазора  $z = \ell_z$  (поверхность скольжения) —  $v_t$ . Результат интегрирования имеет вид:

$$\ln \left[ \frac{2g \cos \alpha_{\perp} + R_v}{v_t^2 \ell_z} \right] \left( \frac{2g \cos \alpha_{\perp} + R_v}{v_0^2 \ell_z} \right) = - \frac{2g \cos \alpha_{\perp}}{\eta_p R_p T} \left( 1 + \frac{\alpha_T \ell_z}{R_v \ell_z} \ln \frac{2\ell_z g \cos \alpha_{\perp} + R_v \ell_z v_t^2}{2\ell_z g \cos \alpha_{\perp} + R_v \ell_z v_0^2} \right).$$

Обозначим:  $a = (2g \cos \alpha_{\perp}) / \eta_p R_p T$  — коэффициент, зависящий от ориентации контактного пространства, точнее, от ориентации плоскости скольжения и

$$b = 1 + \frac{\alpha_T \ell_z}{R_v \ell_z} \ln \frac{2\ell_z g \cos \alpha_{\perp} + R_v \ell_z v_t^2}{2\ell_z g \cos \alpha_{\perp} + R_v \ell_z v_0^2} -$$

коэффициент, отражающий динамику изменения скорости фракций, физические свойства среды контактного слоя и ориентацию плоскости скольжения. При горизонтальном скольжении  $\alpha_{\perp} \equiv 0$  превалирует гравитация и тогда

$$b = 1 + \frac{\alpha_T \ell_z}{R_v \ell_z} \ln \frac{v_t^2}{v_0^2} = 1 + 2 \frac{\alpha_T \ell_z}{R_v \ell_z} \ln \frac{v_t}{v_0}.$$

Для  $v_t \cong v_0$ , т.е. при постоянной скорости фракции с момента её отрыва от тела до её выхода из контактного пространства,  $b = 1$  независимо от вида и температуры среды. Заменой скорости  $v_t$  и  $v_0$  массовым значением потока и его давлением  $p_1$  и  $p_2$  в этих точках координат дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$p_1^2 e^{-ab} p_2^2 = (R_v m^2 \eta_p R_p T \ell_z / s_{нф} \ell_z) a^{-1} (1 - e^{-ab}).$$

Верификация математической модели динамики потока фракций разрушения тела скольжения в контактном пространстве, из-за отсутствия в настоящее время экспериментальных данных о физике неравновесных и весьма сложных явлений течения фракций в малых пространствах, т.е. в условиях подобных исследуемой задаче, затруднена. Поэтому на данном этапе исследования возможность прямого сопоставления расчётных данных с экспериментальными отсутствует.

Для обоснования достоверности полученной модели динамики стационарного потока фракций разрушения в тонком контактном слое тела скольжения воспользуемся основами фундаментальной теории подобия [9]. Следуя

её методикам, проведены тестовые проверки в виде проверок размерностей и алгоритма вычислений на задачах физических по моделям идентичных модели рассматриваемой, давшие положительный результат.

Сравнительный анализ адекватности размерностей и основных закономерностей показывает [6–10], что динамика движения потока фракций разрушения тела скольжения, представленного моделью движения фракций, как распределённого двухфазного потока конденсированной среды, и известных подходов и методик оценки движения газовых и жидкостных сред обладают весьма высокой аутентичностью результатов. Как и при движении вязкой несжимаемой неизотермической жидкости [6–8], распределение поперечной составляющей скорости  $v_z$  убывает с ростом координаты.

Ещё одним подтверждением адекватности действия полученной модели служит наличие закономерностей изменения температурных полей и динамики движения стационарного потока фракций разрушения, так же как и жидкостей, в ограниченном контактном пространстве взаимоувязанных с параметром динамики течения газовых и вязких сред — числом Рейнольдса.

На основе методики верификации теории подобия был выполнен численный анализ выявления преобладающих параметров в модели течения фракций. Численный анализ проведён в первом приближении оценки результата уравнений модели, т. е. с пренебрежением влияния параметров третьего порядка малости. Это даёт точность оценки качества модели примерно на уровне доли процента. Сопротивление среды контактного пространства или гидравлическое сопротивление  $R_v$  — функция одного из фундаментальных параметров — числа Рейнольдса; отношения силы инерции  $F_u$  к силе внутреннего трения  $F_{тр}$  стационарного потока фракций в контактном слое:

$$Re = F_u / F_{тр} = cv\ell_s / \mu,$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость среды контактного слоя. Оно определяет роль инерции и сил трения при взаимодействии фракций в потоке их скольжения и зависит от свойства среды и режима её течения в контактном пространстве: ламинарный ( $Re \leq 2320$ ):  $R_v = 64 / Re$ ; критический (ламинарный/турбулентный)  $Re \geq 4000$ :  $R_v = 2,5 \cdot 10^{-3} \sqrt[3]{Re}$ ; гладкое пространство ( $Re$  от 2000 до 4000):  $R_v = 0,3164 / \sqrt[4]{Re}$ ; смешанное трение (среда+фракция):

$$R_v = 0,1[(3/2\ell_s) + 100/Re]^{1/4};$$

шероховатый слой (квадратичный закон сопротивления):

$$R_v = 0,1(\kappa/\ell_s)^{1/4}, \text{ где } \kappa \approx 1,46.$$

## Выводы

Создана модель для исследования основных закономерностей контактного взаимодействия пары тел в аспектах гидродинамики распределённого стационарного потока фракций разрушения тонкого слоя пространства скольжения сред.

Численным анализом проведена верификация аналитической модели формирования и динамики движения стационарного потока фракций контактного распада пары тел в ограниченном контактном пространстве скольжения с динамически меняющейся геометрией слоя скольжения и формой фракций разрушения.

Впервые показана возможность применения математического аппарата и алгоритмов гидро- и газовой динамики для решения фундаментальной задачи неравновесного процесса разрушения тела в контактном пространстве скользящего взаимодействия сред для формирования прогноза состояния рабочего органа агротехники методами имитационного компьютерного моделирования.

## Литература

1. Гушин, В.М., Гушин, О.В., Рыбалко, Р.И. Движение частиц сыпучего материала в пневмотранспортном трубопроводе при вращательном режиме перемещения аэросмесей // Промислова гідраліка і пневматика. — 2011. — №3(33). — С. 41–46.
2. Волошин, А.И., Пономарёв, Б.В. Механика транспортирования сыпучих материалов. — К.: Наукова думка, 2001. — 519 с.
3. Демкин, Н.Б. Фактическая поверхность касания твердых поверхностей. М.: АН СССР, 1962. — 111 с.
4. Уайтхауз, Д. Метрология поверхностей. — Долгопрудный: Интеллект, 2009. — 492 с.
5. Радчик, А.С., Радчик, В.С. О деформации поверхностных слоёв при трении скольжения // Доклады АН СССР. — 1968. — Т. 183. — №5. — С. 77–78.
6. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
7. Левицкий, Б.Ф., Лещий, Н.П. Гидравлика: Загальний курс. — Львів: Світ, 1994. — 264 с.
8. Альтшуль, А.Д. Гидравлические сопротивления. — М.: Недра, 1982. — 224 с.
9. Гухман, А.А. Введение в теорию подобия. — М.: Высшая школа, 1973. — 296 с.
10. Деева, В.С. Изоморфизм скользящего контакта конденсированных сред // Инновационные технологии: теория, инструменты, практика («Inno Tech 2010»): Матер. Междунар. Интернет-конф. — ПГТУ, 1.11–1.12.2010. — Пермь, 2010. — С. 124–125.

Надійшла 15.12.2011 р.