

УДК 539.3

І.Г.Грабар, доктор технічних наук, професор, проректор з наукової роботи Житомирського національного агроекологічного університету

О.І.Грабар, кандидат технічних наук, Житомирський державний технологічний університет

О.І.Грабар, студент Харківського національного університету ім.Я. Мудрого

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ТА МІРИ ХАОСУ ДИВНИХ АТТРАКТОРІВ

Для нелінійних систем, де має місце хаотизація аттрактора, запропоновано алгоритм обчислення висоти хаосу та відносної висоти хаосу. Обчислено відносну висоту хаосу аттрактора Фейгенбаума і показано, що її значення прямує до граничного значення $\Lambda_{\text{min}}(J) \lim = 0,100562734297571\dots$, яке, можливо, є ще однією новою константою даного аттрактора.

Вступ. В останні два десятиліття проблема детермінованого хаосу в нелінійних системах [1–3] – одна з найбільш обговорюваних науковцями. Особливо цікаво відзначити, що моделювання хаотизації аттрактора таких систем можна досягти на достатньо простих моделях. І однією з найблисучіших серед них можна назвати модель М. Фейгенбаума [2].

Виключно математична задача стимулюється величезним експериментальним матеріалом із найрізноманітніших областей фізики, механіки, газової і гідро- динаміки, та ін., де виявлена скейлінгова кінетика, за структурою схожа на сценарій Фейгенбаума [4-8].

Постановка задачі та результати досліджень. Дослідимо сценарій хаотизації аттрактора Фейгенбаума одномірного відображення Пуанкаре [5]

$$x_{i+1} = \alpha - x_i^2, \tag{1}$$

Для чого на біфуркаційній діаграмі після j -ої біфуркації пронумеруємо гілки біфуркаційної діаграми (притягуючі точки аттрактора) знизу вверх (рис. 1). Як видно з рис. 1, для $j=0$ маємо одну гілку, для $j=1-2$ гілки, для $j=2-4$ гілки, після j біфуркації 2^j гілок. Дослідимо закономірності руху притягуючої траєкторії по аттрактору Фейгенбаума та кількісно виміряти відносну висоту хаосу цього руху.

На рис. 2 зображено схематично порядок відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми для перших чотирьох біфуркацій.

Для кількісного аналізу висоти хаосу доцільно ввести N - R - операції (рис. 3).

Легко бачити, що на рис. 2 всі траєкторії повернення (верхні лінії) є R - операціями, а траєкторії віддалення наведені таблиці 1.

Використовуючи ітераційний алгоритм Грони [9] для оцінки висоти хаосу λ в одномірних стохастичних масивах

$$\lambda(n+1) = n * \lambda(n) + (n-i), \tag{2}$$

покажемо, що кожна із перестановок групи із $\{n\}$ елементів має своє, тільки їй притаманне, значення λ , що знаходиться в діапазоні $[0...n!-1]$.

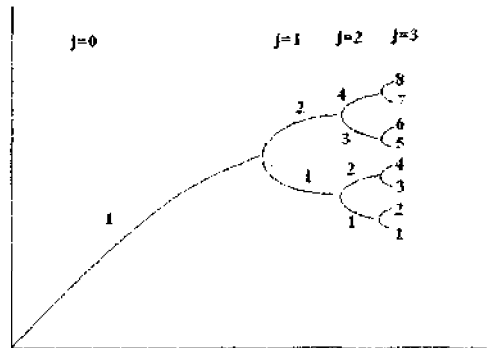


Рис. 1. Біфуркаційна діаграма Фейгенбаума

Наприклад, для перестановки із чотирьох елементів 3 2 1 4 висота хаосу за даним алгоритмом може бути обчислена наступним чином:

$$\begin{aligned} \lambda(1) &= 0 & \lambda(2,1) &= 2 * 0 + (2-1) = 1 \\ \lambda(3,2,1) &= 3 * 1 + (3-1) = 5 & \lambda(3,2,1,4) &= 4 * 5 + (4-4) = 20 \end{aligned} \tag{3}$$

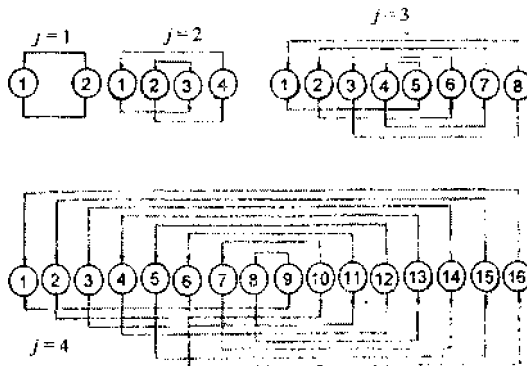


Рис. 2. Порядок відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми після j -ої біфуркації (Циклічні групи $R_1 / N_{2^{j-1}}, N_{2^{j-2}}, \dots, R_2, N_2(N_2, R_2)$), або циклічні групи сценарію Фейгенбаума)

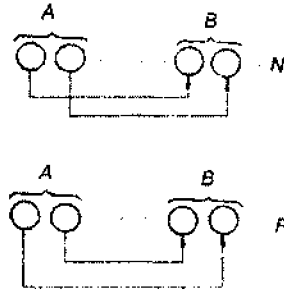


Рис. 3. N- та R-операції

Таблиця 1

До загальної формули циклічних груп Фейгенбаума

$J=2$:	N_2
$J=3$:	N_2R_2
$J=4$:	$N_4R_2N_2$
$J=5$:	$N_8R_4N_2R_2$
.....		
$J=n$:	$N_{2^{n-2}} N_{2^{n-3}} \dots R_2 N_2(N_2R_2)$

Аналогічно обчислимо висоту хаосу у всіх 24 перестановках і результати розмістимо в таблиці 2. Таким чином, нами вперше показано, що масив перестановок $n!$ можна строго ранжувати за скалярною мірою – показником висоти хаосу (ВХ) λ . Тоді група із $n=4$ елементів має $4!=24$ перестановки, і за висотою хаосу, обчисленою за ітераційною формулою (2), їх можна розмістити по ранжиру в порядку зростання λ :

Таблиця 2

Результати обчислення висоти хаосу в повній групі перестановок $4!$

Перестановка	λ	Перестановка	λ	Перестановка	λ
1234	0	3124	8	2314	16
1243	1	3142	9	2341	17
1423	2	3412	10	2431	18
4123	3	4312	11	4231	19
1324	4	2134	12	3214	20
1342	5	2143	13	3241	21
1432	6	2413	14	3421	22
4132	7	4213	15	4321	23

Легко бачити, що перенормування

$$\Lambda = \frac{\lambda}{n!}, \tag{3}$$

дозволяє отримати відносну висоту хаосу (ВВХ) в перестановці, що буде змінюватись в діапазоні $[1 \dots 0]$.

Використовуючи ітераційну формулу Грони (2), а також послідовність відвідування граничної траєкторією гілок біфуркаційної діаграми Фейгенбаума після J -ої біфуркації (рис.1 та рис.2), нами обчислено характеристики висоти хаосу для кожного з цих випадків (таблиця 3).

Як слідує з таблиці 3 Λ_{\min} асимптотично наближається до граничного мінімального значення $\Lambda_{\min}(J) \lim = 0,100562734297571\dots$ Автори не виключають, що дане значення можливо $\Lambda_{\min}(J) \lim$ є новою, невідомою раніше, самостійною математичною константою.

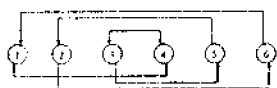
В таблиці 4 наведені результати дослідження висоти хаосу та відносної висоти хаосу циклічних груп класу $R(J)N1R(J-1)$ (рис.4), схожих за структурою на циклічні групи Фейгенбаума. Як слідує з таблиці 4, в даних циклічних групах відносна висота хаосу прямує до граничного значення $\Lambda \lim \Rightarrow 0.281718171540955\dots$

Таблиця 3

Визначення висоти хаосу в аттракторі Фейгенбаума

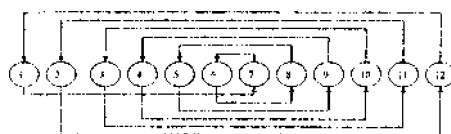
	Перестановки (рис.1)	Висота хаосу λ	Відносна висота хаосу Λ
J=1	1 2	0	0
J=2	1 3 2 4	4	0,16666
J=3	1 5 4 7 2 6 3 8	4448	0,110317460...
J=4	1 9 8 13 4 12 5 15 2 10 7 14 3 11 6 16	2104116955072	0,1005657929...
J=5	1 17 16 25 8 24 9 29 4 20 13 28 5 21 12 31 2 18 15 26 7 23 10 30 3 19 14 27 6 22 11 32	264611564400612156947045 11145162624	0,10056273429757 4...
J=6	1 33 32 49 16 48 17 57 8 40 25 56 9 41 24 61 4 36 29 52 13 45 20 60 5 37 28 53 12 44 21 63 2 34 31 50 15 47 18 58 7 39 26 55 10 42 23 62 3 35 30 51 14 46 19 59 6 38 27 54 11 43 22 64	127600968472429443990856 968719072525489984145420 191266970962650502824853 38776834091450112	0.10056273429757 1...

$$\frac{R_3}{N_1 R_2} \quad 1\ 4\ 3\ 5\ 2\ 6 \quad \Lambda = 0,2583333333$$



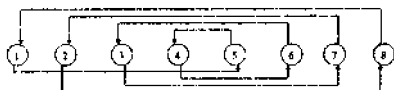
$$\frac{R_6}{N_1 R_5} \quad 1\ 7\ 6\ 8\ 5\ 9\ 4\ 10\ 3\ 11\ 2\ 12$$

$$\Lambda = 0,281655668791085$$



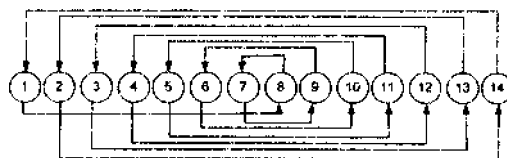
$$\frac{R_4}{N_1 R_3} \quad 1\ 5\ 4\ 6\ 3\ 7\ 2\ 8$$

$$\Lambda = 0,27797619047619$$



$$\frac{R_7}{N_1 R_6} \quad 1\ 8\ 7\ 9\ 6\ 10\ 5\ 11\ 4\ 12\ 3\ 13\ 2\ 14$$

$$\Lambda = 0,281711389016077$$



$$\frac{R_5}{N_1 R_4} \quad 1\ 6\ 5\ 7\ 4\ 8\ 3\ 9\ 2\ 10$$

$$\Lambda = 0,281203152567319$$

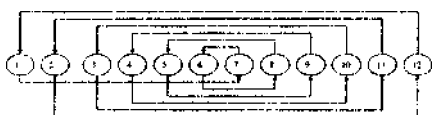


Рис.4

Таблиця 4

Висота хаосу в циклічних групах R(J)/N1R(J-1)

Циклічна група	Кільк. елем. в групі K	Λ	Перестановки
R2/N1R1	4	0.166666666666667	1 3 2 4
R3/N1R2	6	0.258333333333333	1 4 3 5 2 6
R4/N1R3	8	0.27797619047619	1 5 4 6 3 7 2 8
R5/N1R4	10	0.281203152557319	1 6 5 7 4 8 3 9 2 10
R6/N1R5	12	0.281655668791085	1 7 6 8 5 9 4 10 3 11 2 12
R7/N1R6	14	0.281711389016077	1 8 7 9 6 10 5 11 4 12 3 13 2 14
R8/N1R7	16	0.281717506250761	1 9 8 10 7 11 6 12 5 13 4 14 3 15 2 16
R9/N1R8	18	0.281718112022464	1 10 9 11 8 12 7 13 6 14 5 15 4 16 3 17 2 18
R10/N1R9	20	0.281718166647785	1 11 10 12 9 13 8 14 7 15 6 16 5 17 4 18 3 19 2 20
R11/N1R10	22	0.28171817116889	1 12 11 13 10 14 9 15 8 16 7 17 6 18 5 19 4 20 3 21 2 22

Висновки:

1. Вперше запропоновано загальну модель процесу хаотизації аттрактора Фейгенбаума та досліджено кількісні характеристики висоти хаосу після j -ої біфуркації.
2. Обчислено висоту і відносну висоту хаосу аттрактора Фейгенбаума та показано, що після j -ої біфуркації при $j \rightarrow \infty$ Λ прямує до граничного значення $\Lambda_{\text{lim}} = 0,100562734297571\dots$
3. Показано можливість застосування запропонованого алгоритму для інших типів циклічних груп. Зокрема, отримано граничне значення $\Lambda \rightarrow 0.281718171540955$ висоти хаосу для циклічних груп $R(J)/N1R(J-1)$.

Список використаних джерел

1. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 411 с.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем. – УФН, 1983, т. 141, №2, с. 343 – 374.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
4. Шанявский А.А. Самоорганизация кинетики усталостных трещин. – В кн.: Синергетика и усталостное разрушение металлов. – М.: Наука, 1989. – с. 57 – 76.
5. Грабар І.Г. Термоактиваційний аналіз та синергетика руйнування. – Житомир. – ЖІТІ. – 2002. – 312 с.
6. Иванова В.С. Разрушение металлов. – М.: Металлургия, 1979. – 167 с.
7. Баланкин А.С. Самоорганизующиеся и диссипативные структуры в деформируемом теле. – Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, № 19.
8. Уровни прочности и релаксационные явления в полимерах // Цой Б., Каримов С.Н., Князев В.К. и др. – ВМС, 1985, т. 27, № 3, с. 132 – 176.
9. Грони В. Основи математичної кібернетики. – Житомир: ЖДТУ. – 2004 – 428 с.