Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Стьопочкіна Марина Валеріївна

УДК 512.562

(MIN,MAX)-еквівалентність скінченних частково впорядкованих множин та додатна визначеність квадратичної форми Тітса

01.01.06 -- алгебра і теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2007

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
БОНДАРЕНКО Віталій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу алгебри, м. Київ.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор,
КИРИЧЕНКО Володимир Васильович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
професор кафедри геометрії механіко-математичного факультету, м. Київ;

кандидат фізико-математичних наук,
доцент,
ПИЛЯВСЬКА Ольга Степанівна,
Національний університет
"Києво-Могилянська академія",
доцент кафедри математики, м. Київ.

Провідна установа Ужгородський національний університет, м. Ужгород.

Захист відбудеться «__» __________ 2007 року о __ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.18 при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03127, м. Київ, проспект акад. Глушкова, 6,
механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий «__»__________ 2007 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В.В. Плахотник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню квадратичної форми Тітса скінченних частково впорядкованих множин та застосуванню отриманих результатів у теорії зображень.

Квадратичні форми виникають при розв’язанні різних задач в алгебрі, геометрії, теорії диференціальних і інтегральних рівнянь, теорії операторів та інших областях математики. Серед них важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса для графів, частково впорядкованих множин, алгебр, тощо.

У 1972 р. П. Габріель[1] ввів квадратичну форму для довільного скінченного сагайдака (зорієнтованого графа), яку він назвав квадратичною формою Тітса. У цій же роботі показано, що сагайдак має скінченний тип (тобто має, з точністю до ізоморфізму, скінченне число нерозкладних зображень) тоді і лише тоді, коли його форма Тітса є додатно визначеною. Ця робота П. Габріеля стала початком нового напрямку в алгебрі, який пов’язаний із вивченням зв’язків між властивостями зображень різних об’єктів та властивостями відповідних квадратичних форм.

У 1974 р. Ю.А. Дрозд[2] та Ш. Бреннер[3] ввели квадратичну форму Тітса відповідно для частково впорядкованих множин та деяких класів сагайдаків із співвідношеннями. Ю.А. Дрозд довів, що частково впорядкована множина має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса є слабо додатною, тобто додатно визначеною на множині всіх ненульових векторів із

---

[1] Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – Vol. 6. – P. 71–103.

[2] Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8. – С. 34–42.

[3] Brenner S. Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. Int. Conf. Representations Algebras. – Ottawa: Carleton Univ., 1974. – Paper N5.

невід'ємними координатами (зображення частково впорядкованих множин введені Л.О. Назаровою і А.В. Ройтером[4] у 1972 р.). Аналогічний результат для комутативних сагайдаків отримали О.Г. Завадський та А.С. Шкабара[5].

У загальному випадку для матричних задач без співвідношень форму Тітса ввели М.М. Клейнер і А.В. Ройтер[6] у 1977 р. Вони довели, що вільна трикутна диференціальна градуйована категорія має скінченний тип в тому і лише в тому випадку, коли відповідна форма Тітса є слабо додатною.

Окрім згаданих вище авторів властивості квадратичних форм Тітса вивчали К. Бонгартц, В.М. Бондаренко, П. Дрекслер, С.А. Овсієнко, Х.А. де ла Пенья, К. Рінгель, Д. Сімсон та інші. При цьому досліджувалися як властивості форм Тітса, так і властивості зображень різних об'єктів, які можна охарактеризувати в термінах таких форм.

Актуальність теми. Квадратична форма Тітса для частково впорядкованих множин відіграє суттєву роль в теорії їх зображень. У дисертаційній роботі повністю описуються скінченні частково впорядковані множини, форма Тітса яких є додатно визначеною (аналогами таких множин у теорії графів є схеми Динкіна), а також мінімальні частково впорядковані множини, для яких ця умова не виконується. Отримані результати застосовуються в теорії зображень частково впорядкованих множин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науко-

---

[4] Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. –
1972. – Т. 28. – С. 5–31.

[5] Завадский А. Г., Шкабара А. С. Коммутативные колчаны и матричные алгебры типа. – Киев, 1976. – 52 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 76.3).

[6] Клейнер М. М., Ройтер А. В. Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 5–70.

вими дослідженнями кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка — тема 01БФ038-03 ”Розробка методів асимптотичного інтегрування нелінійних систем, теорії керування в біології та медицині і моделювання процесів взаємодії та деформування суцільних середовищ”, підрозділ ”Геометричні структури та комбінаторно-геометричні методи дослідження алгебраїчних систем та їх зображень” (номер державної реєстрації 0101U002479).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис скінченних частково впорядкованих множин із додатно визначеною формою Тітса і мінімальних частково впорядкованих множин, форма Тітса яких не є додатно визначеною (такі множини названо *P*-критичними), та вивчення ін’єктивних зображень частково впорядкованої множини.

Об’єктом дослідження є квадратичні форми Тітса та ін’єктивні зображення частково впорядкованої множини.

Предмет дослідження — додатна визначеність квадратичної форми Тітса та зображувальний тип категорії ін’єктивних зображень.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються у дослідженні, є стандартний метод комбінаторного аналізу та введений доктором фіз.-мат. наук В.М. Бондаренком метод ”(min, max)-еквівалентності частково впорядкованих множин”.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є такі:

- Вказано алгоритм опису всіх частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних фіксованій множині.
- Доведено низку загальних тверджень про (min, max)-еквівалентні частково впорядковані множини з додатно визначеною формою Тітса (а саме, що будь-яка така частково впорядкована множина (min, max)-еквівалентна

частково впорядкованій множині без циклів та частково впорядкованій множині ширини меншої за 3, тощо).

- Доведено, що форма Тітса частково впорядкованої множини S є додатно визначеною в тому і лише в тому випадку, коли довільна частково впорядкована множина, (min, max)-еквівалентна S, має слабо додатну форму Тітса.
- Доведено, що будь-яка частково впорядкована множина порядку більшого за 7 із додатно визначеною формою Тітса є серійною (серійні множини описано раніше).
- Наведено опис не серійних частково впорядкованих множин із додатно визначеною формою Тітса.
- Доведено, що частково впорядкована множина є P-критичною (критичною відносно додатної визначеності) тоді і лише тоді, коли вона (min, max)-еквівалентна деякій критичній множині Клейнера.
- Повністю описано P-критичні частково впорядковані множини.
- Досліджено зв'язок між додатною визначеністю форми Тітса та *rep*-скінченністю типа категорії ін'єктивних зображень частково впорядкованої множини. Доведено, що для квазіпримітивної частково впорядкованої множини S, що не є самодуальною, категорії ін'єктивних зображень множин S та S^{op} мають (одночасно) *rep*-скінченний тип тоді і лише тоді, коли форма Тітса S є додатно визначеною.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані в теорії квадратичних форм і в подальших дослідженнях категорій зображень частково впорядкованих множин.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать, як правило, постановки задач та загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві. Зокрема, у статті [2] йому належать результати §2 – §5, у статті [3] — доведення основної теореми (§2), у статтях [8, 9] — доведення всіх теорем. Зі спільних робіт на захист виносяться лише результати, отримані здобувачем особисто.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертаційної роботи оприлюднено:

на V міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Одеса, липень 2005р.),

на VI міжнародній алгебраїчній конференції з геометрії та топології (Черкаси, вересень 2005р.),

на міжнародній конференції з диференціальних рівнянь та систем комп'ютерної алгебри (Брест, жовтень 2005р.),

на V науковій конференції "Ломоносовские чтения" (Севастополь, травень 2006р.),

на IX міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, травень 2006р.),

на міжнародній конференції з радикалів – ICOR-2006 (Київ, серпень 2006р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 наукових роботах. Із них 6 статей – у фахових виданнях ([1–4, 8, 9]) та 6 – у тезах конференцій ([5–7, 10–12]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи — 123 сторінок, із них список використаних джерел займає 8 сторінок (64 найменувань).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено загальну характеристику та мету роботи, обґрунтовано її актуальність і наукову новизну.

У **першому розділі** наведено означення основних понять та формулювання відомих результатів, які використовуються в дисертаційній роботі.

Підрозділи 1.1 – 1.5 містять основні означення та результати щодо зображень частково впорядкованих (скорочено ч. в.) множин. Ми говоримо, що k-категорія Φ має скінченний тип, якщо вона має (з точністю до ізоморфізму) скінченне число нерозкладених об'єктів, і *rep*-скінченний тип, якщо категорія її зображень має скінченний тип. Далі, ми говоримо, що ч. в. має *inj*-скінченний тип, якщо категорія її ін'єктивних зображень має *rep*-скінченний тип.

У підрозділі 1.6 наведено означення квадратичних форм Тітса для різних об'єктів та вказано їхні основні властивості; вивчення таких форм для ч. в. множин є основною метою дисертації.

Квадратична форма Тітса ч. в. множини S — це форма $q_S(z): Z^{S \cup 0} \to Z$, яка задається рівністю

$$dr_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i \ .$$

Такі форми суттєво використовуються в теорії зображень ч. в. множин. Зокрема, згідно з відомою теоремою Ю.А. Дрозда ч. в. множина S має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса слабо додатна.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено детальному вивченню властивостей (min, max)-еквівалентних ч. в. множин. Основною мотивацією цих досліджень є той факт, що такі ч. в. множини мають еквівалентні форми Тітса.

У підрозділах 2.1 та 2.2 дається означення (min, max)-еквівалентності та вивчаються їх властивості.

Нехай S — скінченна ч. в. множина. Підмножину X будемо називати *нижньою* (відповідно *верхньою*), якщо $x \in X$ щораз, коли $x<y$ (відповідно $x>y$) і $y \in X$. Запис $x \not\lessgtr y$ буде означати, що елементи x і y непорівняльні. Множину елементів $x \in S$, непорівняльних із фіксованим елементом $a \in S$, будемо позначати $S_{\not\lessgtr}(a)$; для підмножин Y і Z множини S ми пишемо $Y<Z$, якщо $y<z$ для будь-яких $y \in Y$, $z \in Z$. Дуальну до S ч. в. множину будемо позначати через S^{op}. Ч. в. множини S і T називаються *антиізоморфними*, якщо S ізоморфна T^{op}.

Означимо для мінімального (відповідно максимального) елемента $a \in S$ ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) таким чином: це є об'єднання (без перетину) підмножин $\{a\}$ і $S \setminus a$

з найменшим частковим порядком, який містить заданий на $S \setminus a$ порядок, і при цьому $a > S \approx (a)$ (відповідно $a < S \approx (a)$).

Ч. в. множину T назвемо (min, max)-*еквівалентною* ч. в. множині S, якщо T дорівнює деякій ч.в. множині вигляду

$$\overline{S} = S^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p}_{x_1 x_2 \ldots x_p},\ p \geq 0,$$

де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ і для кожного i=1, … , p $x_i$$ – мінімальна (відповідно максимальна) точка $\overline{S}_{i-1} = S^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}}_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}$, якщо $\varepsilon_i = \uparrow$ (відповідно $\varepsilon_i = \downarrow$); при p=0 вважаємо, що $\overline{S} = S$. У випадку, коли $\varepsilon_i = \uparrow$ для всіх i, ч. в. множини називаються min-еквівалентними (а коли $\varepsilon_i = \downarrow$ для всіх i — max-еквівалентними). Ч. в. множини S і S' називаються (min, max)-*ізоморфними*, якщо існує ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна S і ізоморфна S'.

У підрозділі 2.3 розглядаються властивості min-еквівалентності. Доведено, що поняття (min, max)-еквівалентності та min-еквівалентності збігаються (Твердження 2.12).

Послідовність

$$\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad 0 \leq p < \infty,$$

елементів $x_i \in S$ назвемо min-*допустимою*, якщо вираз $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$ має сенс. Число p назвемо *довжиною* α і позначимо $d(\alpha)$. У цьому випадку ми також пишемо $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Множину всіх min-допустимих послідовностей елементів з S позначимо $\mathcal{P}(S)$. Покладемо, далі,

$$[\alpha]_S = \{x \in S \mid x = x_i \quad \textit{для деякого} \quad i\}.$$

Доведено, що $S^{\uparrow}_{\alpha}$ не залежить від того, в якій послідовності розташовані її члени (Наслідок 2.10). Для нижньої підмножини X ч. в. множини S будемо позначати через $S^{\uparrow}_{X}$ ч. в. множину $S^{\uparrow}_{\alpha}$, де α — деяка послідовність без повторень із $\mathcal{P}(S)$ така, що $[\alpha] = X$.

У підрозділі 2.4 побудовано алгоритм, який дозволяє виписати всі ч. в. множини, min-еквівалентні заданій ч. в. множині. Він полягає в наступному:

I. Описуються всі нижні підмножини $X \neq S$$ в S, і для кожної з них будується ч. в. множина $S_X^{\uparrow}$.

II. Описуються всі пари (Y, X), що складаються із власної нижньої підмножини Y в S і непорожньої нижньої підмножини X в Y такої, що $X<S\backslash Y$; для кожної такої пари будується ч. в. множина $\left(S_Y^{\uparrow}\right)_X^{\uparrow}$.

III. Серед отриманих у пп. I і II ч. в. множин фіксується по одній із кожного класу ізоморфних множин.

Побудований алгоритм суттєво використовується в наступних розділах дисертації.

Третій розділ присвячено P-критичним ч. в. множинам.

Далі додатно визначену форму часто називатимемо просто додатною.

Ч. в. множина S називається *P-критичною* (відповідно *WP-критичною*), якщо форма Тітса будь-якої її власної підмножини є додатною (відповідно слабо додатною), а форма Тітса самої S такою не є. Зауважимо, що WP-критичні ч. в. множини — це в точності критичні множини Клейнера.

Основними результатами підрозділів 3.1–3.3 є дві теореми.

Теорема 3.1. *Для ч. в. множини S є еквівалентними наступні умови*:

1) *форма Тітса S є додатною*;

2) *форма Тітса довільної ч. в. множини, яка* (min, max)-*еквівалентна S, є слабо додатною*.

Теорема 3.2. *Ч. в. множина S є P-критичною тоді і лише тоді, коли вона* (min, max)-*еквівалентна деякій WP-критичній ч. в. множині*.

З використанням теореми 3.2 та вказаного вище алгоритму у підрозділах 3.4 та 3.5 наведено повний опис P-критичних ч. в. множин (це природно робити з точністю до ізоморфізму і антиізоморфізму), які вказані в таблиці 1 (подвійна нумерація множин у цій таблиці, як і в таблиці 2, пов’язана з їх додатковими властивостями).

Четвертий розділ присвячено опису ч. в. множин із додатною формою Тітса.

У підрозділі 4.1 розглянуті допоміжні властивості квадратичної форми Тітса, а в підрозділі 4.2 – властивості ч. в. множин із додатною формою Тітса.

У підрозділі 4.3 доведено загальні теореми про (min, max)-еквівалентні ч. в. множини з додатно визначеною формою Тітса.

Теорема 4.8. *Довільна ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса* (min, max)-*еквівалентна ч. в. множині ширини* $w \le 2$.

Теорема 4.9. *Довільна ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса* (min, max)-*еквівалентна ч. в. множині без циклів*.

У підрозділі 4.4 наведено означення та відомі факти, пов'язані з серійними частково впорядкованими множинами з додатно визначеною формою Тітса.

Ч. в. множину з єдиною парою непорівняльних елементів назвемо *майже ланцюгом* (*ланцюгом*} називають будь-яку лінійно впорядковану множину).

Ч. в. множина S називається *сумою* власних підмножин A_1, ... , A_s, якщо вони попарно не перетинаються та їх об'єднання дорівнює S (у цьому випадку пишуть $S = A_1 + \ldots + A_s$); якщо при цьому елементи, що належать різним доданкам, завжди непорівняльні, то S називається прямою сумою заданих підмножин та позначається $S = A_1 \coprod \ldots \coprod A_s$. Далі, сума $S = A_1 + \ldots + A_s$ називається *односторонньою,* якщо, з точністю до нумерації доданків, $i<j$ кожного разу, коли існують елементи $b \in A_i$ та $c \in A_j$ для $i \ne j$ такі, що $b<c$. Нарешті, сума $S = A_1 + \ldots + A_s$ називається *мінімаксною* (відповідно *напівмінімаксною*), якщо з $x<y$, де x та y належать різним доданкам, випливає, що x є мінімальним, а (або) y – максимальним елементом множини S. Зауважимо, що пряма сума є як односторонньою, так і мінімаксною.

Ч. в. множина S із додатно визначеною формою Тітса називається *серійною*, якщо для будь-якого натурального m існує ч. в. множина T така, що:

а) S є підмножиною T;

б) $|T \setminus S| = m$;

в) форма Тітса множини T є додатно визначеною.

Серійні ч. в. множини описує наступна теорема, яку довели В. М. Бондаренко та А. М. Поліщук[7].

Теорема 4.10. *Ч. в. множина S із додатно визначеною формою Тітса є серійною тоді і лише тоді, коли виконано одну із таких умов*:

1) *S — пряма сума двох ланцюгів*;

2) *S — одностороння мінімаксна сума двох ланцюгів*;

3) *S — пряма сума ланцюга і майже ланцюга*.

Основним результатом підрозділів 4.5–4.11 є теорема, яка описує всі не серійні ч. в. множини з додатно визначеною формою Тітса (з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму вони вичерпуються ч. в. множинами 1–108, вказаними в таблиці 2).

У **п'ятому розділі** наведено застосування результатів попередніх розділів у теорії зображень ч. в. множин.

Ч. в. множину назвемо *квазіпримітивною*, якщо відповідний їй орієнтований граф є об'єднанням ланцюгів (у випадку, коли всі стрілки кожного ланцюга мають однаковий напрямок, множина називається *примітивною*).

Доведено, зокрема, наступні теореми.

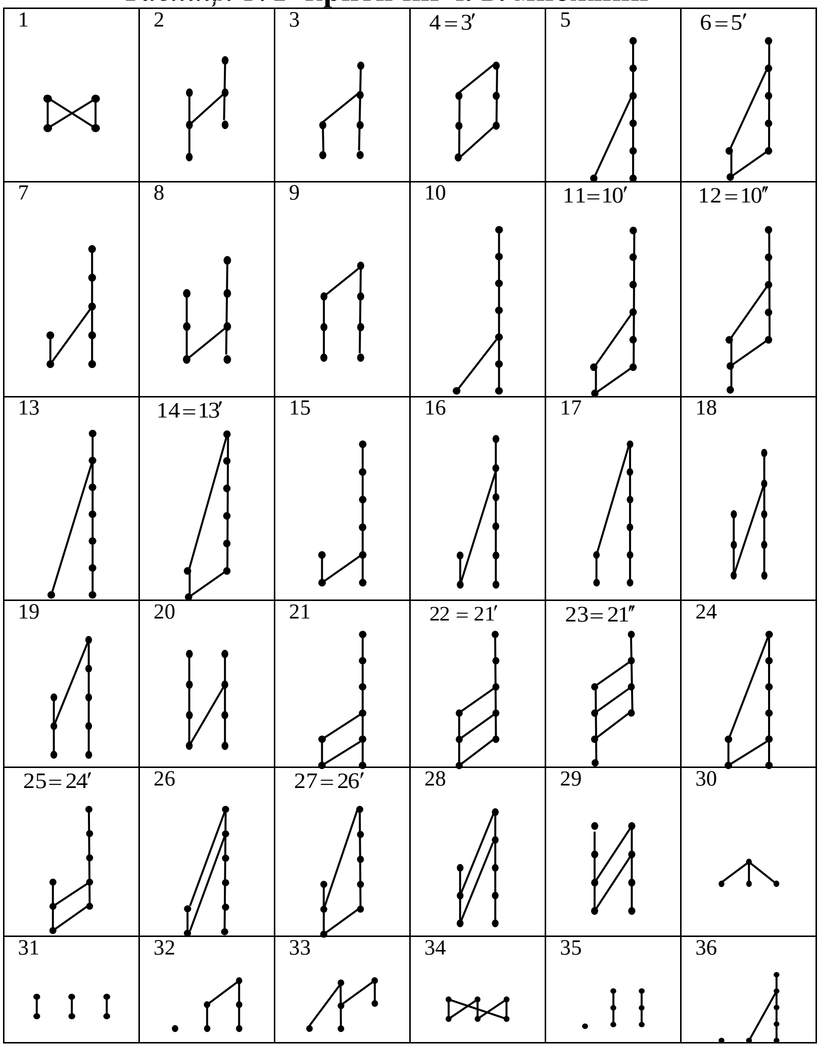
Теорема 5.3. *Нехай S — ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса. Тоді S має inj-скінченний тип*.

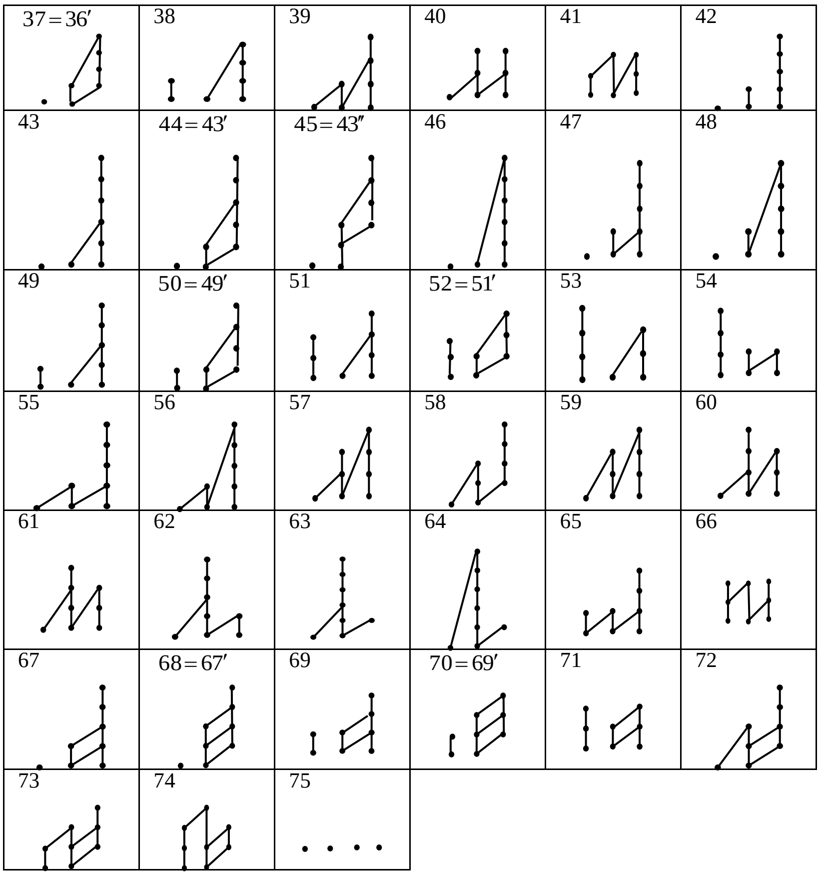
Теорема 5.4. *Нехай S — квазіпримітивна ч. в. множина, що не є самодуальною. Тоді S і S^{op} одночасно мають inj-скінченний тип в тому і лише в тому випадку, коли форма Тітса S є додатно визначеною*.

---

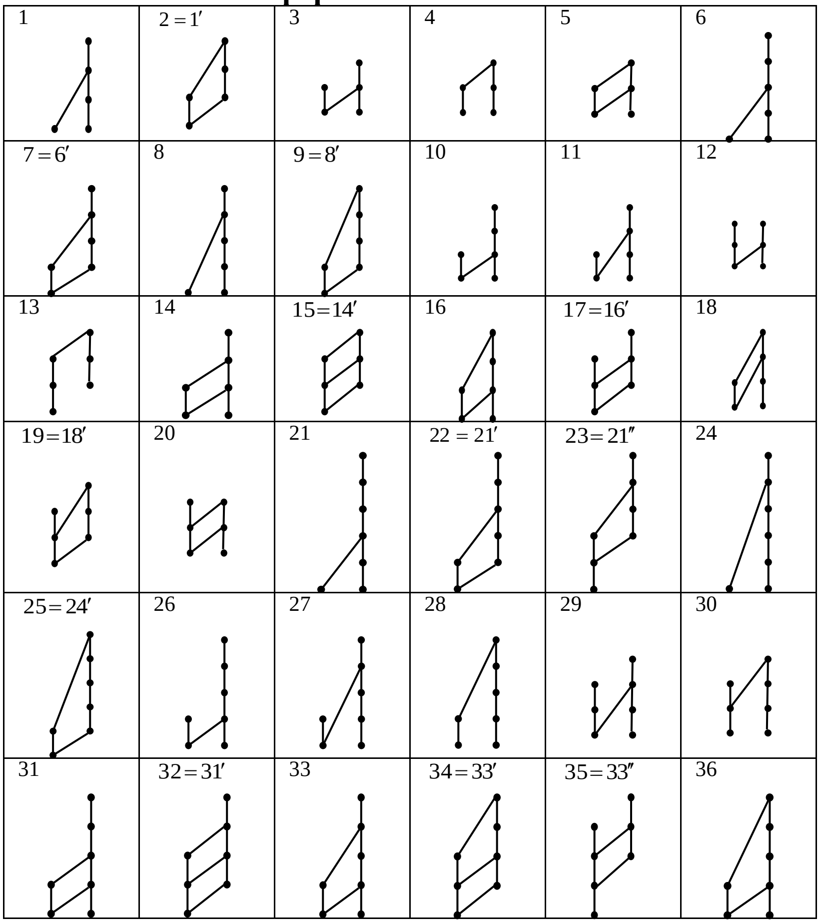
[7] Бондаренко В. М., Полищук А. М. О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. – 2003. – Т.6, №1. – С. 3–14.

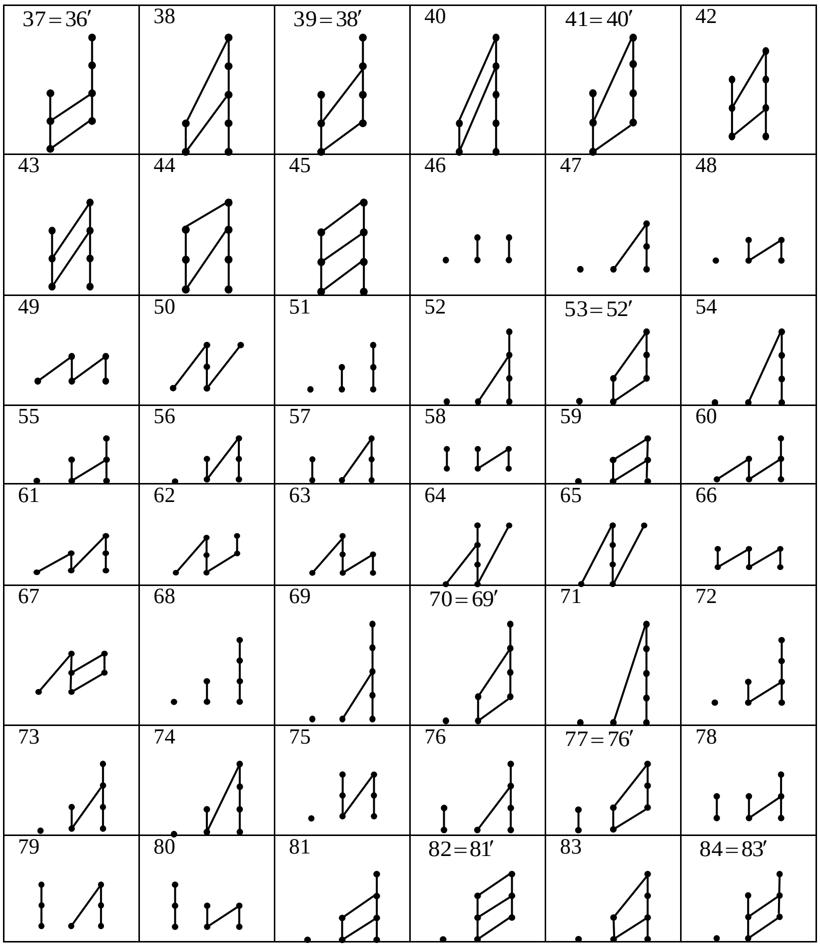
Таблиця 1. ***P*-критичні ч. в. множини**

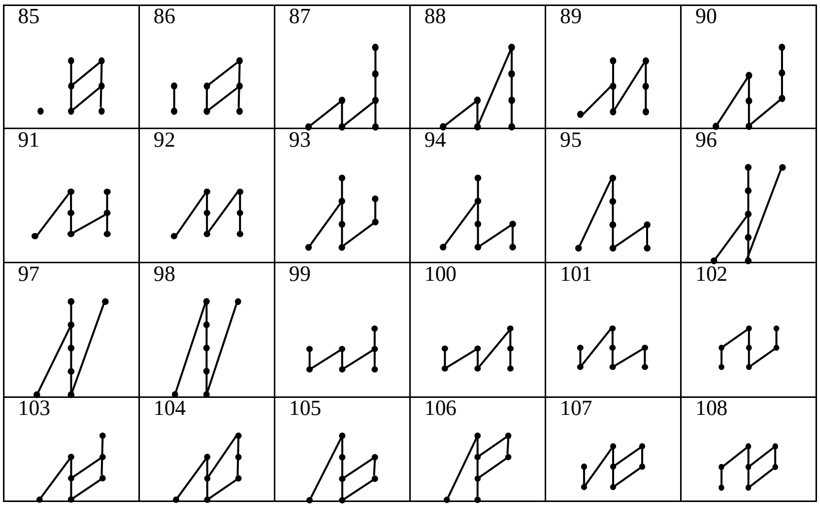



37 = 36′
38
39
40
41
42
43
44 = 43′
45 = 43″
46
47
48
49
50 = 49′
51
52 = 51′
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68 = 67′
69
70 = 69′
71
72
73
74
75

Таблиця 2. **Не серійні ч. в. множини з додатно визначеною формою Тітса**




37 = 36′
38
39 = 38′
40
41 = 40′
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53 = 52′
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70 = 69′
71
72
73
74
75
76
77 = 76′
78
79
80
81
82 = 81′
83
84 = 83′



ПУБЛІКАЦІЇ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Степочкина М. В*. Об одном свойстве положительно определенных квадратичных форм, соответствующих конечным частично упорядоченным множествам // Нелінійні коливання. – 2005. – Т.8, N4. – С. 544–552.

2. *Bondarenko V. M.* , *Styopochkina M. V.* On posets of width two with positive Tits form // Algebra Duscrete Math. – 2005. – N2. – P. 20–35.

3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно конечного типа // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 22–33.

4. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т.2, N3. – С. 18–58.

5. *Styopochkina M. V.* On positive (non-negative) Tits form and (min, max)-equivalence of posets // 5th Int. Algebraic

Conf. in Ukraine (Odessa, July 20–27, 2005): Abstr. – Odessa, 2005. – P. 207–208.

6. *Степочкина М. В.* О положительно определенных формах для одного класса биграфов // Тез. докл. 6-й междунар. конф. по геометрии и топологии (Черкассы, 5–10 сент. 2005г.). – Черкаси, 2005. – С. 87–88.

7. *Бондаренко В.М., Степочкина М. В.* О классификации положительно определенных квадратичных форм специального вида // Тез. докл. междунар. конф. ”Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры” (Брест, 5–8 окт. 2005г.). – Минск, 2005. – Ч. 1. – С. 65–68.

8. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On finite posets of *inj*-finite type and their Tits forms // Algebra Duscrete Math. – 2006. – N2. – P. 17–21.

9. *Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно означеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання. – 2006. – Т.9, N3. – Р. 320–325.

10. *Степочкина М. В.* Об инъективных представлениях частично упорядоченных множеств // V науч. конф. ”Ломоносовские чтения”: Тез. докл. (Севастополь, 3–5 мая 2006г.). – Севастополь, 2006. – С. 166.

11. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В*. О конечных частично упорядоченных множествах *inj*-конечного типа // XI Міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука: Тези доп. (Київ, 18–20 трав. 2006р.). – Київ, 2006. – С. 336.

12. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On injective representations of posets and the quadratic Tits form // Int. Conf. Radicals ICOR-2006 (Kyiv, July 30 – August 5, 2006). Abstr. – Kyiv, 2006. – P. 24–25.

АНОТАЦІЇ

Стьопочкіна М. В. (Min, max)-*еквівалентність скінченних частково впорядкованих множин та додатна визначеність квадратичної форми Тітса*. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2007.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню квадратичної форми Тітса скінченних частково впорядкованих множин за допомогою методу (min,max)-еквівалентності та застосуванню отриманих результатів у теорії зображень.

Основними результатами дисертації є повний опис скінченних частково впорядкованих множин із додатно визначеною формою Тітса та *P*-критичних частково впорядкованих множин. Доведено, що будь-яка частково впорядкована множина з додатно визначеною формою Тітса порядку $n>7$ є серійною. Доведено також, що частково впорядкована множина є *P*-критичною тоді і лише тоді, коли вона (min, max)-еквівалентна деякій критичній множині Клейнера.

Вказані результати застосовано в останньому розділі дисертації до вивчення частково впорядкованих множин, категорія ін’єктивних зображень яких має *rep*-скінченний тип.

Ключові слова: частково впорядкована множина, мінімальний (максимальний) елемент, квадратична форма Тітса, (min,max)-еквівалентність, ін’єктивне зображення.

Степочкина М. В. (Min, max)-*эквивалентность конечных частично упорядоченных множеств и положительная определенность квадратичной формы Титса*. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, 2007.

Диссертационная работа посвящена изучению квадратичной формы Титса конечных частично упорядоченных множеств с помощью метода (min, max)-

эквивалентности, а также применению полученных результатов в теории представлений частично упорядоченных множеств.

Основным результатом диссертации является полное описание конечных частично упорядоченных множеств с положительно определенной формой Титса и P-критических частично упорядоченных множеств. Доказано, что любое частично упорядоченное множество с положительно определенной формой Титса порядка n>7 серийное. Доказано также, что частично упорядоченное множество является P-критическим тогда и только тогда, когда оно (min, max)-эквивалентно некоторому критическому множеству Клейнера.

Описания несерийных частично упорядоченных множеств с положительно определенной формой Титса и P-критических частично упорядоченных множеств получены методом "(min, max)-эквивалентности", предложенным научным руководителем. Доказано, что (min, max)-эквивалентность множеств равнозначна min-эквивалентности. Описан алгоритм, с помощью которого можно классифицировать все частично упорядоченные множества, min-эквивалентные фиксированному частично упорядоченному множеству. Показано, что любое частично упорядоченное множество с положительно определенной формой Титса (min, max)-эквивалентно частично упорядоченному множеству без циклов и частично упорядоченному множеству ширины w<3.

Указанные результаты применяются в последнем разделе диссертации для изучения частично упорядоченных множеств *inj*-конечного типа (т. е. таких, категория инъективных представлений которых имеет *rep*-конечный тип).

Доказано, что частично упорядоченное множество с положительно определенной формой Титса имеет *inj*-конечный тип. Доказано также, что для квазипримитивного частично упорядоченного множества S, не являющегося самодуальным, категории инъективных представлений множеств *S* и S^{op} имеют (одновременно) *rep*-конечный тип тогда и только тогда, когда форма Титса *S* есть положительно определенная.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, минимальный (максимальный) элемент, квадратичная форма Титса, (min,max)-эквивалентность, инъективное представление.

Styopochkina M. V. (Min, max)-*equivalence of finite posets and positive definiteness of the quadratic Tits form.* — Manuscript.

Thesis of the disertation for obtaining the degree of Candidate of sciences in physics and mathematics in speciality 01.01.06 – algebra and number theory. — Kyiv National Taras Shevchenko University, 2007.

The disertation is devoted to the study of the quadratic Tits form of finite posets by the method of (min, max)-equivalence, and applications of received results in the theory of representations of posets.

The main results of the disertation are classifications the posets with positive Tits form and *P*-critical posets. It is proved that any poset with positive Tits form of order $n>7$ is serial, and that a poset is *P*-critical if and only if it is (min, max)-equivalent to some critical Kleiner set.

In the last chapter of the dissertation the indicated results apply to the study of posets with the category of injective representations to be of rep-finite type.

Keywords: poset, minimal (maximal) element, quadratic Tits form, (min, max)-equivalence, injective representation.