Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Стьопочкіна Марина Валеріївна

УДК 512.562

(MIN,MAX)-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СКІНЧЕННИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН ТА ДОДАТНА ВИЗНАЧЕНІСТЬ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ТІТСА

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Бондаренко Віталій Михайлович,
доктор фізико-математичних наук,
провідний науковий співробітник

Київ – 2007

Зміст

ВСТУП

Дисертаційну роботу присвячено вивченню квадратичної форми Тітса скінченних частково впорядкованих множин та застосуванню отриманих результатів у теорії зображень.

Квадратичні форми виникають при розв'язанні різних задач в алгебрі, геометрії, теорії диференціальних і інтегральних рівнянь, теорії операторів та інших областях математики (див., зокрема, [1]–[24]). Серед них важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса для графів, частково впорядкованих множин, алгебр, тощо.

У 1972 р. П. Габріель [1] ввів квадратичну форму для довільного скінченного сагайдака (зорієнтованого графа), яку він назвав квадратичною формою Тітса. У цій же роботі показано, що сагайдак має скінченний тип (тобто має, з точністю до ізоморфізму, скінченне число нерозкладних зображень) тоді і лише тоді, коли його форма Тітса є додатно визначеною. Ця робота П. Габріеля стала початком нового напрямку в алгебрі, який пов'язаний із вивченням зв'язків між властивостями зображень різних об'єктів та властивостями відповідних квадратичних форм.

У 1974 р. Ю. А. Дрозд [2] та Ш. Бреннер [3] ввели квадратичну форму Тітса відповідно для частково впорядкованих множин та деяких класів сагайдаків із співвідношеннями. Ю. А. Дрозд довів, що частково впорядкована множина має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса є слабо додатною, тобто додатно визначеною на множині всіх ненульових векторів із невід'ємними координатами (зображення частково впорядкованих множин введені Л. О. Назаровою і А. В. Ройтером у [25]). Аналогічний результат для комутативних сагайдаків отримали О. Г. Завадський та А. С. Шкабара [26].

У загальному випадку для матричних задач без співвідношень форму Тітса ввели М. М. Клейнер і А. В. Ройтер в 1977 р. (див. роботу [27]). Вони довели, що вільна трикутна диференціальна градуйована категорія має скінченний тип в тому і лише в тому випадку, коли відповідна форма Тітса є слабо додатною.

Окрім згаданих вище авторів властивості квадратичних форм Тітса вивчали К. Бонгартц, В. М. Бондаренко, П. Дрекслер, С. А. Овсієнко, Х. А. де ла Пенья, К. Рінгель, Д. Сімсон та інші (див., зокрема, [32] – [43]). При цьому досліджувалися як властивості форм Тітса, так і властивості зображень різних об'єктів, які можна охарактеризувати в термінах таких форм.

Актуальність теми. Квадратична форма Тітса для частково впорядкованих множин відіграє суттєву роль в теорії їх зображень. У дисертаційній роботі повністю описуються скінченні частково впорядковані множини, форма Тітса яких є додатно визначеною (аналогами таких множин у теорії графів є схеми Динкіна), а також мінімальні частково впорядковані множини, для яких ця умова не виконується. Отримані результати застосовуються в теорії зображень частково впорядкованих множин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка — тема 01БФ038-03 "Розробка методів асимптотичного інтегрування нелінійних систем, теорії керування в біології та медицині і моделювання процесів взаємодії та деформування суцільних середовищ", підрозділ "Геометричні структури та комбінаторно-геометричні методи дослідження алгебраїчних систем та їх зображень" (номер державної реєстрації 0101U002479).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис скінченних частково впорядкованих множин із додатно визначеною формою Тітса і мінімальних частково впорядкованих множин, форма Тітса яких не є додатно визначеною (такі множини названо P-критичними), та вивчення ін'єктивних зображень частково впорядкованої множини.

Об'єктом дослідження є квадратичні форми Тітса та ін'єктивні зображення частково впорядкованої множини.

Предмет дослідження — додатна визначеність квадратичної форми Тітса та зображувальний тип категорії ін'єктивних зображень.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються у дослідженні, є стандартний метод комбінаторного аналізу та введений доктором фіз.-мат. наук В. М. Бондаренком метод "(min, max)-еквівалентності частково впорядкованих множин".

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є такі:

• Вказано алгоритм опису всіх частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних фіксованій множині.

• Доведено низку загальних тверджень про (min, max)-еквівалентні частково впорядковані множини з додатно визначеною формою Тітса (а саме, що будь-яка така частково впорядкована множина (min, max)-еквівалентна частково впорядкованій множині без циклів та частково впорядкованій множині ширини меншої за 3, тощо).

• Доведено, що форма Тітса частково впорядкованої множини S є додатно визначеною в тому і лише в тому випадку, коли довільна частково впорядкована множина, (min, max)-еквівалентна S, має слабо додатну форму Тітса.

• Доведено, що будь-яка частково впорядкована множина порядку більшого за 7 із додатно визначеною формою Тітса є серійною (серійні множини описано раніше).

• Наведено опис не серійних частково впорядкованих множин із додатно визначеною формою Тітса.

• Доведено, що частково впорядкована множина є P-критичною (критичною відносно додатної визначеності) тоді і лише тоді, коли вона (min, max)-еквівалентна деякій критичній множині Клейнера.

• Повністю описано P-критичні частково впорядковані множини.

• Досліджено зв'язок між додатною визначеністю форми Тітса та *rep*-скінченністю типа категорії ін'єктивних зображень частково впорядкованої множини. Доведено, що для квазіпримітивної частково впорядкованої множини S, що не є самодуальною, категорії ін'єктивних зображень множин S та S^{op} мають (одночасно) *rep*-скінченний тип тоді і лише тоді, коли форма Тітса S є додатно визначеною.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані в теорії квадратичних форм і в подальших дослідженнях категорій зображень частково впорядкованих множин.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать, як правило, постановки задач та загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві. Зокрема, у статті [46] йому належать результати §2 – §5, у статті [47] — доведення основної теореми (§2), у статтях [52] і [53] — доведення всіх теорем. Зі спільних робіт на захист виносяться лише результати, отримані здобувачем особисто.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертаційної роботи оприлюднено:

на V міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Одеса, липень 2005р.),

на VI міжнародній алгебраїчній конференції з геометрії та топології

(Черкаси, вересень 2005р.),

на міжнародній конференції з диференціальних рівнянь та систем комп'ютерної алгебри (Брест, жовтень 2005р.),

на V науковій конференції "Ломоносовские чтения"(Севастополь, травень 2006р.),

на IX міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, травень 2006р.),

на міжнародній конференції з радикалів – ICOR-2006 (Київ, серпень 2006р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 наукових роботах. Із них 6 статей – у фахових виданнях ([45] – [48], [52] – [53]) та 6 – у тезах конференцій ([49] – [51], [54] – [56]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи — 123 сторінок, із них список використаних джерел займає 8 сторінок (64 найменувань).

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук В. М. Бондаренку за постійну увагу, цікаві ідеї та корисні поради.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено загальну характеристику та мету роботи, обґрунтовано її актуальність і наукову новизну.

У **першому розділі** наведено означення основних понять та формулювання відомих результатів, які використовуються в дисертаційній роботі.

Підрозділи 1.1 – 1.5 містять основні означення та результати щодо зображень частково впорядкованих (скорочено ч. в.) множин. Ми говоримо, що k-категорія Φ має скінченний тип, якщо вона має (з точністю до ізоморфізму) скінченне число нерозкладених об'єктів, і *rep*-скінченний тип, якщо категорія її зображень має скінченний тип. Далі, ми говоримо, що ч. в. має *inj*-скінченний тип, якщо категорія її ін'єктивних зображень має *rep*-скінченний тип.

У підрозділі 1.6 наведено означення квадратичних форм Тітса для різних об'єктів та вказано їхні основні властивості; вивчення таких форм для ч. в. множин є основною метою дисертації.

Квадратична форма Тітса ч. в. множини S — це форма $q_S(z) : \mathbb{Z}^{S \cup 0} \to \mathbb{Z}$, яка задається рівністю

$$dr_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Такі форми суттєво використовуються в теорії зображень ч. в. множин. Зокрема, згідно з відомою теоремою Ю. А. Дрозда ч. в. множина S має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса слабо додатна.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено детальному вивченню властивостей (min, max)-еквівалентних ч. в. множин. Основною мотивацією цих досліджень є той факт, що такі ч. в. множини мають еквівалентні форми Тітса.

У підрозділах 2.1 та 2.2 дається означення (min, max)-еквівалентності та вивчаються їх властивості.

Нехай S — скінченна ч. в. множина. Підмножину X будемо називати *нижньою* (відповідно *верхньою*), якщо $x \in X$ щораз, коли $x < y$ (відповідно $x > y$) і $y \in X$. Запис $x \not\lessgtr y$ буде означати, що елементи x і y непорівняльні. Множину елементів $x \in S$, непорівняльних із фіксованим елементом $a \in S$, будемо позначати $S^{\not\lessgtr}(a)$; для підмножин Y і Z множини S ми пишемо $Y < Z$, якщо $y < z$ для будь-яких $y \in Y, z \in Z$. Дуальну до S ч. в. множину будемо позначати через S^{op}. Ч. в. множини S і T називаються *антиізоморфними*, якщо S ізоморфна T^{op}.

Означимо для мінімального (відповідно максимального) елемента $a \in$

S ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) таким чином: це є об'єднання (без перетину) підмножин $\{a\}$ і $S \setminus a$ з найменшим частковим порядком, який містить заданий на $S \setminus a$ порядок, і при цьому $a > S^{\asymp}(a)$ (відповідно $a < S^{\asymp}(a)$).

Ч. в. множину T назвемо (min, max)-*еквівалентною* ч. в. множині S, якщо T дорівнює деякій ч. в. множині вигляду

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \dots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p},\ p \geq 0,$$

де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ і для кожного $i = 1, \dots, p$ x_i — мінімальна (відповідно максимальна) точка $\overline{S}_{i-1} = S_{x_1 x_2 \dots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1}}$, якщо $\varepsilon_i =\uparrow$ (відповідно $\varepsilon_i =\downarrow$); при $p = 0$ вважаємо, що $\overline{S} = S$. У випадку, коли $\varepsilon_i =\uparrow$ для всіх i, ч. в. множини називаються min-еквівалентними (а коли $\varepsilon_i =\downarrow$ для всіх i — max-еквівалентними). Ч. в. множини S і S' називаються (min, max)-*ізоморфними*, якщо існує ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна S і ізоморфна S'.

У підрозділі 2.3 розглядаються властивості min-еквівалентності. Доведено, що поняття (min, max)-еквівалентності та min-еквівалентності збігаються (Твердження 2.12).

Послідовність

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_p), \quad 0 \leq p < \infty,$$

елементів $x_i \in S$ назвемо min-*допустимою*, якщо вираз $\overline{S} = S_{x_1 x_2 \dots x_p}^{\uparrow\uparrow\dots\uparrow}$ має сенс. Число p назвемо *довжиною* α і позначимо $d(\alpha)$. У цьому випадку ми також пишемо $\overline{S} = S_{\alpha}^{\uparrow}$. Множину всіх min-допустимих послідовностей елементів з S позначимо $\mathcal{P}(S)$. Покладемо, далі,

$$[\alpha]_S = \{x \in S \,|\, x = x_i \ \text{ для деякого } \ i\}.$$

Доведено, що $S_{\alpha}^{\uparrow}$ не залежить від того, в якій послідовності розташовані її члени (Наслідок 2.10). Для нижньої підмножини X ч. в. множини S

будемо позначати через $S^{\uparrow}_{X}$ ч.‘в. множину $S^{\uparrow}_{\alpha}$, де α — деяка послідовність без повторень із $\mathcal{P}(S)$ така, що $[\alpha] = X$.

У підрозділі 2.4 побудовано алгоритм, який дозволяє виписати всі ч. в. множини, min-еквівалентні заданій ч. в. множині. Він полягає в наступному:

I. Описуються всі нижні підмножини $X \neq S$ в S, і для кожної з них будується ч. в. множина $S^{\uparrow}_{X}$.

II. Описуються всі пари (Y, X), що складаються із власної нижньої підмножини Y в S і непорожньої нижньої підмножини X в Y такої, що $X < S \setminus Y$; для кожної такої пари будується ч. в. множина $(S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow}_{X}$.

III. Серед отриманих у пп. I і II ч. в. множин фіксується по одній із кожного класу ізоморфних множин.

Побудований алгоритм суттєво використовується в наступних розділах дисертації.

Третій розділ присвячено P-критичним ч. в. множинам.

Далі додатно визначену форму часто називатимемо просто додатною.

Ч. в. множина S називається *P-критичною* (відповідно *WP-критичною*), якщо форма Тітса будь-якої її власної підмножини є додатною (відповідно слабо додатною), а форма Тітса самої S такою не є. Зауважимо, що WP-критичні ч. в. множини — це в точності критичні множини Клейнера.

Основними результатами підрозділів 3.1–3.3 є дві теореми.

Теорема 3.1. *Для ч. в. множини S є еквівалентними наступні умови*:

1) *форма Тітса S є додатною;*

2) *форма Тітса довільної ч. в. множини, яка* (min, max)*-еквівалентна S, є слабо додатною.*

Теорема 3.2. *Ч. в. множина S є P-критичною тоді і лише тоді, коли вона* (min, max)*-еквівалентна деякій WP-критичній ч. в. множині.*

З використанням теореми 3.2 та вказаного вище алгоритму у підрозділах 3.4 та 3.5 наведено повний опис P-критичних ч. в. множин (це природно робити з точністю до ізоморфізму і антиізоморфізму), які вказані в таблиці 1 (подвійна нумерація множин у цій таблиці, як і в таблиці 2, пов'язана з їх додатковими властивостями).

Четвертий розділ присвячено опису ч. в. множин із додатною формою Тітса.

У підрозділі 4.1 розглянуті допоміжні властивості квадратичної форми Тітса, а в підрозділі 4.2 – властивості ч. в. множин із додатною формою Тітса.

У підрозділі 4.3 доведено загальні теореми про (min, max)-еквівалентні ч. в. множини з додатно визначеною формою Тітса.

Теорема 4.8. *Довільна ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса* (min, max)-*еквівалентна ч. в. множині ширини* $w \leqslant 2$.

Теорема 4.9. *Довільна ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса* (min, max)-*еквівалентна ч. в. множині без циклів.*

У підрозділі 4.4 наведено означення та відомі факти, пов'язані з серійними частково впорядкованими множинами з додатно визначеною формою Тітса.

Ч. в. множину з єдиною парою непорівняльних елементів назвемо *майже ланцюгом* (*ланцюгом* називають будь-яку лінійно впорядковану множину).

Ч. в. множина S називається *сумою* власних підмножин $A_1, ..., A_s$, якщо вони попарно не перетинаються та їх об'єднання дорівнює S (у цьому випадку пишуть $S = A_1 + \ldots + A_s$); якщо при цьому елементи, що належать різним доданкам, завжди непорівняльні, то S називається прямою сумою заданих підмножин та позначається $S = A_1 \coprod \ldots \coprod A_s$. Далі, сума $S = A_1 + \ldots + A_s$ називається *односторонньою*, якщо, з точністю до нумерації доданків, $i < j$ кожного разу, коли існують елементи $b \in A_i$ та $c \in A_j$ для $i \neq j$ такі, що $b < c$. Нарешті, сума $S = A_1 + \ldots + A_s$ називається *мінімаксною* (відповідно *напівмінімаксною*), якщо з $x < y$, де x та y належать різним доданкам, випливає, що x є мінімальним, а (або) y – максимальним елементом множини S. Зауважимо, що пряма сума є як односторонньою, так і мінімаксною.

Ч. в. множина S із додатно визначеною формою Тітса називається *серійною*, якшо для будь-якого натурального m існує ч. в. множина T така, що:

а) S є підмножиною T;

б) $|T \setminus S| = m$;

в) форма Тітса множини T є додатно визначеною.

Серійні ч. в. множини описує наступна теорема, яку довели В. М. Бондаренко та А. М. Поліщук [29].

Теорема 4.10. *Ч. в. множина S із додатно визначеною формою Тітса є серійною тоді і лише тоді, коли виконано одну із таких умов:*

1) S — *пряма сума двох ланцюгів;*

2) S — *одностороння мінімаксна сума двох ланцюгів;*

3) S — *пряма сума ланцюга і майже ланцюга.*

Основним результатом підрозділів 4.5–4.11 є теорема, яка описує всі не серійні ч. в. множини з додатно визначеною формою Тітса (з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму вони вичерпуються ч. в. множинами $1-108$, вказаними в таблиці 2).

У **п'ятому розділі** наведено застосування результатів попередніх розділів у теорії зображень ч. в. множин.

Ч. в. множину назвемо *квазіпримітивною*, якщо відповідний їй орієнтований граф є об'єднанням ланцюгів (у випадку, коли всі стрілки кожного ланцюга мають однаковий напрямок, множина називається *примітивною*).

Доведено, зокрема, наступні теореми.

Теорема 5.3. *Нехай S — ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса. Тоді S має inj-скінченний тип.*

Теорема 5.4. *Нехай S — квазіпримітивна ч. в. множина, що не є самодуальною. Тоді S і S^{op} одночасно мають inj-скінченний тип в тому і лише в тому випадку, коли форма Тітса S є додатно визначеною.*

Розділ 1

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Категорії над полем та їх зображення

У цьому параграфі ми приводимо основні означення та деякі твердження, які стосуються категорій над полем.

1.1.1. Категорії над полем. Множина об'єктів категорії Φ позначається через $\operatorname{Ob}\Phi$, а множина її морфізмів — через $\operatorname{Mor}\Phi$; множина морфізмів з об'єкта X в об'єкт Y позначається через $\operatorname{Hom}_\Phi(X,Y)$ або $\Phi(X,Y)$. Замість $X \in \operatorname{Ob}\Phi$ часто пишуть $X \in \Phi$; запис $X \cong Y$ означає, що X і Y ізоморфні. Ізоморфізм називають ще оборотним морфізмом; інакше кажучи, морфізм $\alpha \in \Phi(X,Y)$ оборотний, якщо існує морфізм $\beta \in \Phi(Y,X)$, такий, що $\alpha\beta = 1_X$ і $\beta\alpha = 1_Y$ (1_Z позначає одиничний морфізм об'єкта Z).

Скелетом категорії називається її повна підкатегорія, що складається з представників всіх класів ізоморфних об'єктів.

Коваріантний функтор, як правило, називається просто функтором. Функтор $F : \Phi \to \Psi$ називається строгим, якщо для довільних об'єктів X, Y категорії Φ відображення

$$F(X,Y) : \operatorname{Hom}_\Phi(X,Y) \to \operatorname{Hom}_\Psi(XF,YF)$$

(яке визначається відображенням $F : \operatorname{Mor}\Phi \to \operatorname{Mor}\Psi$) ін'єктивне, і повним, якщо це відображення сюр'єктивне. Далі, фуктор $F : \Phi \to \Psi$ називається щільним, якщо для кожного $Y \in \Psi$ існує ізоморфний йому об'єкт виду XF, $X \in \Phi$.

Добре відома наступна теорема (див. наприклад, [57]).

Теорема 1.1. *Функтор $F : \Phi \to \Psi$ є еквівалентністю категорій тоді і лише тоді, коли він строгий, повний і щільний.*

Категорією над полем k або просто k-категорією називається довільна категорія Φ, всі множини морфізмів якої є (не обов'язково скінченними) векторними просторами над k, такими, що композиція морфізмів k-білінійна; тоді множини $\Phi(X, X)$ є k-алгебрами. Якщо всі простори $\Phi(X, Y)$ є скінченними, то категорія Φ називається скінченною. Елемент $X \in \Phi$ називається нульовим, якщо $\Phi(X, X) = 0$ або, що те ж саме, $1_X = 0$ (зауважимо, що в k-категорії не завжди існують нульові об'єкти).

Функтор $F : \Phi \to \Psi$ між k-категоріями Φ і Ψ називається k-лінійним, якщо всі відповідні йому відображення $F(X, Y)$ є k-лінійними; іноді такий функтор називають k-функтором. Як правило, між k-категоріями розглядають тільки k-лінійні функтори.

Кожній категорії Φ можна природно зіставити k-категорію $k\Phi$, що називається k-лінійною оболонкою або k-лінеаризацією Φ; вона має ті ж об'єкти, що і категорія Φ, а $k\Phi(X, Y)$ — це векторний k-простір з базисом $\Phi(X, Y)$. Очевидно, що довільний функтор $F : \Phi \to \Psi$, де Ψ — k-категорія, однозначно продовжується до k-лінійного функтора $F^k : k\Phi \to \Psi$.

Двостороннім ідеалом (або просто ідеалом) $\mathcal{I}$ k-категорії Φ називається набір підпросторів $\mathcal{I}(X, Y) \subseteq \Phi(X, Y)$, де $X, Y \in \Phi$, таких, що $\lambda\alpha\gamma \in \Phi(W, Z)$ щораз, коли $\alpha \in \mathcal{I}(X, Y)$, $\lambda \in \Phi(W, X)$, $\gamma \in \Phi(Y, Z)$. З кожним ідеалом $\mathcal{I}$ зв'язаний фактор-k-категорія $\Phi/\mathcal{I}$ з тими ж об'єктами, що і категорія Φ, і множинами морфізмів $(\Phi/\mathcal{I})(X, Y) = \Phi(X, Y)/\mathcal{I}(X, Y)$ для всіх $X, Y \in \Phi$. Зауважимо, що якщо $1_X \in \mathcal{I}$, то об'єкт X категорії $\Phi/\mathcal{I}$ є нульовим. Канонічні проекції (просторів) $\Phi(X, Y) \to \Phi/\mathcal{I}(X, Y)$ задають функтор-проекцію $\Pi : \Phi \to \Phi/\mathcal{I}$.

Як важливий приклад, пов'язаний із цими поняттями, можна вказати наступний приклад. Нехай $F : \Phi \to \Psi$ — k-функтор між k-категоріями, що є повним і щільним. Позначимо через $\mathrm{Ker}F$ ядро функтора F, тобто множина всіх морфізмів α, таких, що $\alpha F = 0$; очевидно, що $\mathrm{Ker}F$ — ідеал в Φ. Тоді F індукує еквівалентність $\Phi/\mathrm{Ker}F \cong \Psi$.

Скінченна k-категорія Ψ називається спектроїдом, якщо її об'єкти попарно неізоморфні і всі алгебри ендоморфізмів $\Psi(X, X)$ локальні (локальна алгебра — це алгебра з $1 \neq 0$, всі необоротні елементи якої утворюють ідеал). Зауважимо, що умова про локальність всіх алгебр ендоморфізмів еквівалентна тому, що всі необоротні морфізми Ψ утворюють ідеал. Цей ідеал називається радикалом спектроїда Ψ; ми позначаємо його через $\mathcal{R}_\Psi$. Таким чином, ми маємо $\mathcal{R}_\Psi(X, Y) = \Psi(X, Y)$ для $X \neq Y$, а $\mathcal{R}_\Psi(X, X)$ — це максимальний ідеал (радикал) локальної алгебри $\Psi(X, X)$.

Якщо $\mathcal{I}$ — ідеал спектроїда Ψ і $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}_\Psi$, то, мабуть, $\Psi/\mathcal{I}$ також є спектроїдом; якщо ж $\mathcal{I}$ не належить $\mathcal{R}_\Psi$, то множина $P = \{X \in \Psi \,|\, 1_X \in \mathcal{I}\}$ непорожня і значить фактор-категорія $\Psi/\mathcal{I}$ не є спектроїдом (оскільки об'єкти $X \in P$ стають нульовими об'єктами $\Psi/\mathcal{I}$, алгебри ендоморфізмів $\Psi/\mathcal{I}(X, X)$ не є локальними). Однак у другому випадку спектроїдом є повна підкатегорія категорії $\Psi/\mathcal{I}$, що складається з ненульових об'єктів.

Адитивною k-категорією (або k-адитивною категорією) називається довільна k-категорія, що є адитивною (тобто має скінченні прямі суми і нульовий об'єкт). Відзначимо, що кожній k-категорії Φ можна природно зіставити адитивну k-категорію $\oplus\Phi$, що називається адитивною оболонкою Φ. Її об'єктами є скінченні послідовності $(X_1, \ldots, X_s)$ об'єктів з Φ, а морфізми $(X_1, \ldots, X_s) \to (Y_1, \ldots, Y_t)$ ототожнюються з "матрицями" $\mu = (\mu_{ij}) \in \bigoplus_{i,j} \Phi(X_i, Y_j)$; композиція морфізмів визначається правилом множення матриць.

Очевидно, що довільний k-лінійний функтор з Φ в Ψ, де Ψ — адитивна k-категорія, можна природно продовжити до k-лінійного функтора з $\oplus\Phi$ в Ψ.

Скінченна адитивна k-категорія називається категорією Крулля-Шмідта, якщо кожний її об'єкт розкладається в пряму суму нерозкладних об'єктів з локальними алгебрами ендоморфізмів. Повну підкатегорію категорії Крулля-Шмідта Φ, що складається з представників всіх класів ізоморфізмів нерозкладних об'єктів, будемо позначати через Φ_0; очевидно, що категорія Φ_0 визначена однозначно з точністю до ізоморфізму категорій і є спектроїдом. Ми називаємо її головним спектроїдом категорії Φ.

Поняття радикала, що ми ввели вище для спектроїдів, можна ввести також і для категорій Крулля-Шмідта.

Нехай Φ — категорія Крулля-Шмідта. Морфізм $\alpha \in \Phi(X, Y)$ називається радикальним, якщо для кожного $\beta \in \Phi(Y, X)$ морфізми $1_X + \alpha\beta$ і $1_Y + \beta\alpha$ оборотні (насправді досить вимагати одну з цих умов). Всі радикальні морфізми утворюють ідеал, що називається радикалом категорії Φ; ми позначаємо його через $\mathcal{R}_\Phi$. Зауважимо, що між просторами $\mathcal{R}_\Phi(\oplus_i X_i, \oplus_j Y_j)$ і $\oplus_{i,j}\mathcal{R}_{\Phi_0}(X_i, Y_j)$ існує природний (канонічний) ізоморфізм.

1.1.2. Зображення k-категорій. Нехай Φ — деяка k-категорія і $\operatorname{mod} k$ — категорія скінченних векторних k-просторів. Під зображенням категорії Φ ми розуміємо k-функтор з Φ в $\operatorname{mod} k$. Два зображення називаємо еквівалентними або ізоморфними, якщо ізоморфні відповідні функтори. Інакше кажучи, категорія зображень $Rep\,\Phi$ категорії Φ — це категорія $Funct(\Phi, \operatorname{mod} k)$ функторів з Φ в $\operatorname{mod} k$. З добре відомих загальних теорем випливає, що $Rep\,\Phi$ — категорія Крулля-Шмідта. Легко показати, що якщо категорії $Funct(\Phi, \operatorname{mod} k)$ і $Funct(\Psi, \operatorname{mod} k)$

еквівалентні, якщо еквівалентними є Φ і Ψ (для цього потрібно зафіксувати пару взаємно квазіоборотніх функторів між Φ і Ψ і після цього подивитися на зв'язок між функторами $F : \Phi \to \operatorname{mod} k$ і $G : \Psi \to \operatorname{mod} k$). Зокрема, еквівалентними є категорії $Funct(\Phi, \operatorname{mod} k)$ і $Funct(\overline{\Phi}, \operatorname{mod} k)$, де $\overline{\Phi}$ — скелет категорії Φ.

Частину з щойно сказаного ми сформулюємо у вигляді твердження, яким будемо користуватися надалі.

Твердження 1.2. *Якщо Φ — категорія Крулля-Шмідта і Φ_0 — її головний спектроїд, то $\Phi \cong \oplus\Phi_0$ і категорії $Rep\,\Phi$ і $Rep\,\Phi_0$ еквівалентні.*

Ми називаємо k-категорію Φ категорією скінченного типу, якщо вона має (з точністю до ізоморфізму) скінченне число нерозкладних об'єктів, і категорією rep-скінченного типу, якщо $Rep\,\Phi$ — категорія скінченного типу (друге означення запропоноване науковим керівником).

Зображення k-категорій самим прямим чином пов'язані з зображеннями алгебр.

Нехай Φ — k-категорія; будемо вважати, що число її об'єктів скінченне. Цій категорії можна природно зіставити скінченну k-алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$. Саме покладемо

$$\mathcal{A}(\Phi) = \bigoplus_{X,Y\in\Phi} \Phi(X,Y)$$

(тут розглядається пряма сума векторних k-просторів). Добуток в $\mathcal{A}(\Phi)$ досить визначити для довільних морфізмів $\alpha \in \Phi(X,Y)$ і $\beta \in \Phi(Z,T)$: добуток α і β дорівнює морфізму $\alpha\beta$, якщо $Y = Z$, і нульовому елементу (простору $\mathcal{A}(\Phi)$), якщо $Y \neq Z$.

Алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$ можна визначити і для k-категорії з нескінченним числом об'єктів (см. [58, §2]).

Зрозуміло, що між зображеннями k-категорії Φ і k-алгебри $\mathcal{A}\Phi$

є природна взаємно однозначна відповідність (їх категорії зображень ізоморфні).

1.2. Зображення сагайдаків

Нехай Q — сагайдак, тобто орієнтований граф. Множину вершин сагайдака Q будемо позначати через Q_0, а множину його стрілок — через Q_1; сагайдак Q називають скінченним, якщо Q_0 і Q_1 скінченні. Надалі ми розглядаємо тільки скінченні сагайдаки. Початкову вершину стрілки λ (тобто вершину з якої виходить λ) позначаємо через $s(\lambda)$ і кінцеву вершину стрілки λ (тобто вершину в яку входить λ) позначаємо через $t(\lambda)$. Запис $\lambda : x \to y$ означає, що λ є стрілкою, такою, що $s(\lambda) = x$ і $t(\lambda) = y$.

Нехай $x, y \in Q_0$. Шляхом довжини $n \geqslant 1$ з початковою вершиною x і кінцевою вершиною y називається послідовність $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ стрілок α_i, така, що $s(\alpha_1) = x$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ для будь-якого $1 \leqslant i < n$ і $t(\alpha_n) = y$. Крім того, є шлях $\alpha = 1_x$ довжини 0 (для якого початкова і кінцева вершини збігаються з x). Початкова і кінцева вершини шляху α позначаються відповідно через $s(\alpha)$ і $t(\alpha)$. Два шляхи α і β називаються паралельними, якщо $s(\alpha) = s(\beta)$ і $t(\alpha) = t(\beta)$.

Кожному сагайдаку Q можна природно зіставити категорію його шляхів PQ, об'єктами якої є вершини сагайдака, а множина морфізмів $PQ(x, y)$ складається з всіх шляхів з початковою точкою x і кінцевою точкою y; композиція шляхів визначається природно.

Лінійна оболонка kPQ категорії PQ називається k-категорією шляхів сагайдака Q; вона позначається просто через k. У випадку, коли Q скінченний, можна розглянути алгебру $\mathcal{A}(Q)$ його шляхів; це скінченна алгебра, базис якої складається із всіх шляхів. (У попередньому пункті ми визначили скінченну алгебру за будь-якою скінченною k-категорією, і якщо цю конструкцію застосувати до k-категорії k, то одержимо саме алгебру $\mathcal{A}(Q)$.)

Зображення $\overline{U}$ сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем k складається зі скінченних векторних k-просторів $U_i, i \in Q_0$, і лінійних відображень $\gamma_\alpha : U_x \to U_y$, де $\alpha : x \to y$ пробігає Q_1. Вектор $\overline{d} = (d_x), x \in Q_0$, де $d_x = \dim U_x$ $(i = 1, \ldots, n)$, називається вектором-розмірністю зображення $\overline{U}$. Морфізм φ з $\overline{U}$ в $\overline{U'}$ складається з лінійних відображень $\varphi_x : U_x \to U'_x, x \in Q_0$, таких, що для кожної стрілки $\alpha : x \to y$ діаграма

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & U_y \\ {\scriptstyle\varphi_x}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_y} \\ U'_x & \xrightarrow{\gamma'_\alpha} & U'_y \end{array}$$

комутативна.

Для зображення $\overline{U}$ сагайдака Q покладемо $U = \{U_x \,|\, x \in Q_0\}$ і $\gamma = \{\gamma_\alpha \,|\, \alpha \in Q_1\}$. Використовуючи ці набори, $\overline{U}$ можна записати в короткій формі: $\overline{U} = (U, \gamma)$.

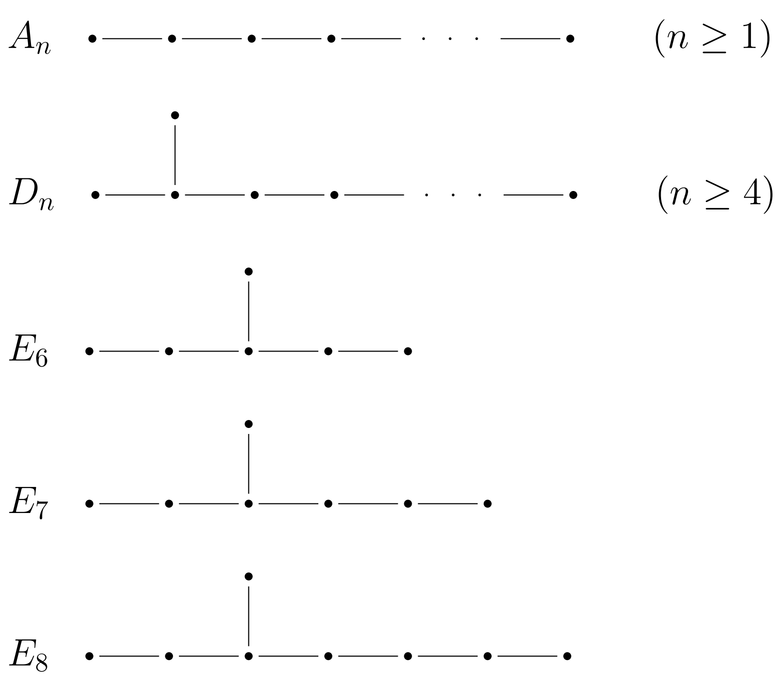
Категорію зображень сагайдака Q (яка є категорією Крулля-Шмідта) будемо позначати через $Rep_k\, Q$ або просто $Rep\, Q$ (якщо поле k фіксоване).

Очевидно, що між зображеннями сагайдака Q і k-категорії k є природна взаємно однозначна відповідність; більш того, їх категорії зображень ізоморфні. Звідси і зі сказаного в попередньому пункті випливає, що взаємно однозначна відповідність є між зображеннями скінченного сагайдака Q і зображеннями скінченної алгебри $\mathcal{A}(Q)$.

Кажуть, що сагайдак Q має скінченний тип над полем k, якщо $Rep_k\, Q$ — категорія скінченного типу.

Сагайдаки скінченного типу описав П. Габріель у роботі [1]. Сформулюємо відповідний результат.

Теорема 1.3. *Сагайдак Q має скінченний тип над полем k тоді і лише тоді, коли він є неперетинним об'єднанням діаграм Динкіна (з довільним напрямком стрілок):*



(*графи* A_n *та* D_n *мають* n *вершин*).

1.3. Зображення сагайдаків із співвідношеннями

Співвідношенням для сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ називають довільну k-лінійну комбінацію його паралельних шляхів. Нехай $\lambda = \{\lambda_i \,|\, i \in I\}$ — деякий набір співвідношень для Q. Зображенням сагайдака Q зі співвідношеннями λ_i, $i \in I$, називається довільне зображення $\overline{U} = (U, \gamma)$ сагайдака Q, таке, що при підстановці у кожне λ_i замість всіх його стрілок відповідних ним лінійних відображень виходить нульове відображення (якщо в λ_i входить який-небудь шлях 1_x довжини 0, то йому зіставляється тотожне відображення простору U_x). Виходячи з останнього визначення, у цій ситуації часто говорять, що ми маємо сагайдак Q зі співвідношеннями $\lambda_i = 0$ $(i \in I)$.

Зауважимо, що сагайдак зі співвідношеннями $(Q, \lambda) = (Q_0, Q_1, \lambda)$ визначає k-категорію $k/\mathcal{I}$, де $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\lambda)$ — ідеал в k, породжений λ_i $(i \in I)$. В зворотному напрямку, якщо розглянути ідеал $\mathcal{I}$ категорії k

і зафіксувати в ньому морфізми λ_i, які його породжують (зокрема, у якості таких морфізмів можна взяти всі морфізми з $\mathcal{I}$), то ми будемо мати сагайдак зі співвідношеннями (Q, λ), де λ позначає множину всіх λ_i.

Зображення сагайдака зі співвідношеннями (Q, λ) утворюють категорію, яка є повною підкатегорією категорії $Rep\, Q$; ми позначаємо її $Rep_k\, (Q, \lambda)$ або просто $Rep\, (Q, \lambda)$ (якщо поле фіксоване). Очевидно, що між зображеннями сагайдака Q зі співвідношеннями $\lambda_i = 0$ $(i \in I)$ і зображеннями k-категорії $k/\mathcal{I}$, де $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\lambda)$, існує природна взаємно однозначна відповідність; більш того, що відповідні категорії зображень ізоморфні. Те ж саме можна сказати й про зв'язок між зображеннями розглянутого сагайдака зі співвідношеннями і зображеннями алгебри $\mathcal{A}(Q)/\mathcal{I}^\circ$, де $\mathcal{I}^\circ = \mathcal{I}^\circ(\lambda)$ — ідеал в $\mathcal{A}(Q)$, породжений λ_i (зауважимо, що $\mathcal{A}(Q)/\mathcal{I}^\circ \cong \mathcal{A}(k/\mathcal{I})$).

Кажуть, що сагайдак із співвідношеннями (Q, λ) має скінченний тип над полем k, якщо $Rep_k\, Q$ — категорія скінченного типу.

Найбільш простими сагайдаками зі співвідношеннями є дерева зі співвідношеннями та комутативні сагайдаки (комутативний сагайдак — це сагайдак без орієнтованих циклів, у якому довільні два шляхи ненульової довжини, які мають однакові початкову та кінцеву вершини, рівні між собою). Сагайдаки зі співвідношеннями скінченного типу в першому випадку описані в роботі [33], а в іншому випадку — у роботі [26]; відносно довільного сагайдаку із співвідношеннями скінченного типу (у випадку скінченновимірної алгебри шляхів) див. [58, §14].

Розглянемо більш детально випадок комутативних сагайдаків [26]. Без обмеження загальності можна, мабуть, вважати, що не існує стрілки α, яка дорівнює деякому шляху $\beta \neq \alpha$ (оскільки такі стрілки можна викинути); таку стрілку називають лишньою.

Нехай $\overline{Q} = (Q, \lambda)$ — комутативний сагайдак (λ — множина всіх співвідношень виду $\alpha - \beta$, де α і β — паралельні шляхи ненульової довжини). Вершину $x \in Q_0$ називають (+)-допустимою (відповідно (-)-допустимою), якщо вона не є кінцем (відповідно початком) якого-небудь ребра.

Підсагайдаком комутативного сагайдака $\overline{Q}$ називається всякий сагайдак Q', який можна отримати з Q за допомогою комбінації наступних операцій:

a) відкидання (+)- або (-)-допустимої вершини (разом із ребрами, які її містять);

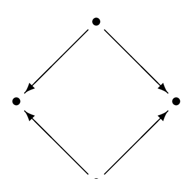
b) ототожнення кінців деякого ребра (стягування ребра в точку) з подальшим відкиданням лишніх ребер.

При цьому Q розглядається як сагайдак із усіма співвідношеннями, які індукуються співвідношеннями із λ.

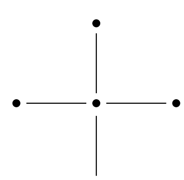
У роботі [26] доведена така теорема.

Теорема 1.4. *Комутативний сагайдак має скінченний тип над полем k тоді і лише тоді, коли він не містить, з точністю до антиізоморфізму, ні одного із наступних підсагайдаків (там де напрямок ребра не вказаний, він може бути довільним):*

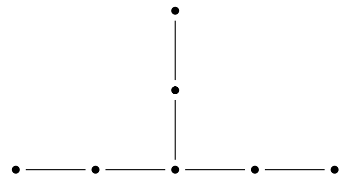
I



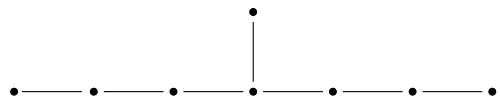
II



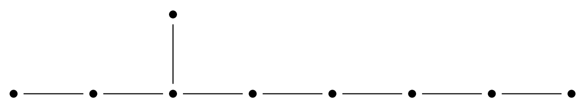
III



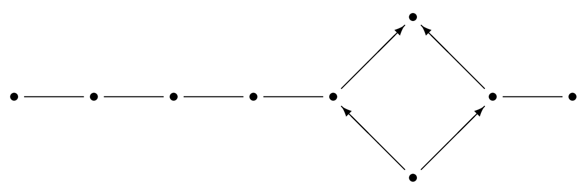
IV



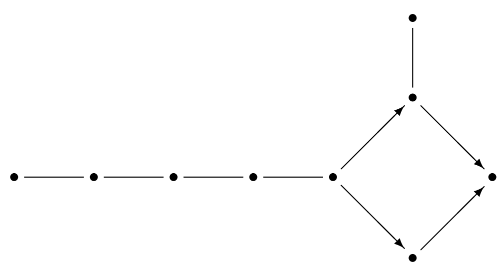
V



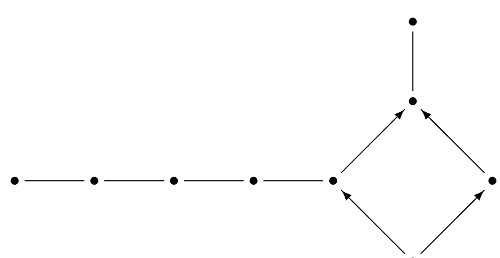
VI



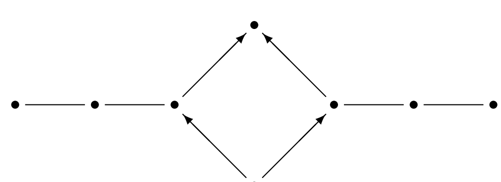
VII



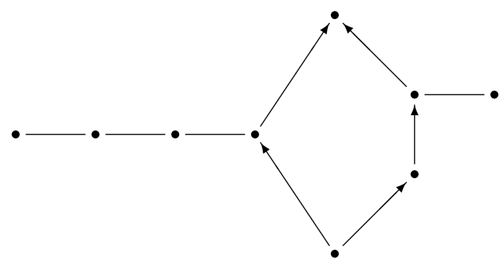
VIII



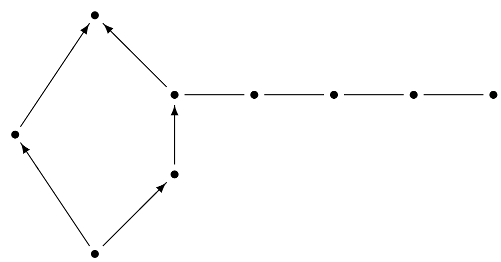
IX



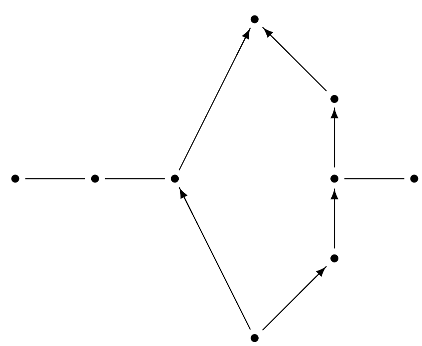
X



XI



XII



1.4. Сагайдак із співвідношеннями категорії Крулля-Шмідта

Нехай Ψ — спектроїд. Будемо вважати, що число його об'єктів скінченне. Сагайдак Q_Ψ категорії Ψ визначається в такий спосіб. Q_Ψ має в якості вершин об'єкти з Ψ. Число стрілок з вершини X у вершину Y дорівнює розмірності простору $\mathcal{R}_\Psi(X,Y)/\mathcal{R}^2_\Psi(X,Y)$. Далі, зіставимо кожній стрілці $\alpha : X \to Y$ сагайдака Q_Ψ радикальний морфізм $\overline{\alpha} \in \mathcal{R}_\Psi(X,Y)$ таким чином, щоб для кожної пари (X,Y) простір $\mathcal{R}_\Psi(X,Y)$ було прямою сумою підпростору $\mathcal{R}^2_\Psi(X,Y)$ і підпростору, породженого всіма морфізмами $\overline{\alpha} : X \to Y$. Ми маємо функтор $F : k_\Psi \to \Psi$, такий, що $XF = X$

для кожної вершини X і $\alpha F = \overline{\alpha}$ для кожної стрілки α. Оскільки k-категорія Ψ скінченна і число її об'єктів скінченне, то $\mathcal{R}_\Psi^s = 0$ для деякого натурального s, і легко бачити, що функтор F повний. Значить ми маємо еквівалентність категорій $k_\Psi/\mathrm{Ker}F \to \Psi$.

Якщо тепер зафіксувати в ідеалі $\mathrm{Ker}F$ морфізми λ_i, $i \in I$, які його породжують, то ми будемо мати сагайдак із співвідношеннями $\overline{Q}_\Psi = (Q_\Psi, \lambda)$, де λ позначає множину всіх λ_i (див. попередній пункт). Будемо його називати сагайдаком із співвідношеннями спектроїда Ψ. Зауважимо, що сагайдак Q_Ψ визначається категорією Ψ однозначно, а сагайдак із співвідношеннями $\overline{Q}_\Psi$ — ні.

У випадку, коли Φ — k-категорія Крулля-Шмідта, що має (з точністю до ізоморфізму) скінченне число нерозкладних об'єктів, ми називаємо її сагайдаком із співвідношеннями $\overline{Q}_\Phi$ сагайдак із співвідношеннями $\overline{Q}_{\Phi_0}$, де Φ_0 — головний спектроїд Φ.

1.5. Зображення частково впорядкованих множин

Якщо не вказано протилежне, ч. в. множина, яку ми розглядаємо, є скінченною. Під підмножиною X ч. в. множини A завжди розуміємо повну ч. в. підмножину (тобто, для $x, y \in X$, $x < y$ в X тоді і лише тоді, коли $x < y$ в A).

Дамо означення зображення ч. в. множини A [25] у термінах градуйованих векторних просторів [60] (в [25] використовується матрична мова).

Нехай A — ч. в. множина і k — довільне поле.

Дамо спочатку визначення категорії A-градуйованих векторних просторів над k [60]. A-градуйований векторний простір над k (або просто A-градуйований k-простір) — це пряма сума $U = \bigoplus_{x \in A} U_x$ векторних k-просторів U_x. Цілочисленний вектор $\overline{d} = \overline{d}(U) = (d_x), x \in A,$ де $d_x =$

$\dim U_x$, називається вектором-розмірністю простору U; його розмірність $\dim U = \sum_{x \in A} d_x$ позначається скорочено через $d = d(U)$.

Лінійне відображення $\varphi : U \to U'$, де U, U' — A-градуйовані k-простори, називається A-відображенням, якщо $\varphi_{bc} = 0$ щораз, коли $b \not\leq c$, де φ_{xy} позначає лінійне відображення U_x в U'_y, індуковане відображенням φ (тобто $\varphi_{xy} = i_x \varphi \pi'_y$, де i_x — вкладення U_x в U, а π'_y — проекція U' на U'_y). Множина всіх A-відображень U в U' (яке є підпростором в $\mathrm{Hom}(U, U')$) позначаємо через $\mathrm{Hom}_A(U, U')$. A-відображення φ природно ототожнювати з матрицею (φ_{xy}), $x, y \in A$; тоді сума і добуток A-відображень визначаються відповідно сумою і добутком цих матриць (звідки, зокрема, випливає, що сума і добуток A-відображень є A-відображеннями).

Категорія A-градуйованих векторних просторів над полем k — це категорія, об'єктами якої є A-градуйовані векторні простори над k, а морфізмами — A-відображення. Цю категорію, що є категорією Крулля-Шмідта, будемо позначати через $\mathrm{mod}_A k$, за аналогією з категорією скінченних векторних k-просторів $\mathrm{mod}\, k$.

Переходимо тепер до визначення зображень ч. в. множин.

Зображення ч. в. множин A — це трійка $X = (V, U, \gamma)$, що складається з просторів $V \in \mathrm{mod}\, k$, $U \in \mathrm{mod}_A k$ і лінійного відображення $\gamma : V \to U$. Ми ототожнюємо відображення γ з вектором (γ_a), $a \in A$, де γ_a — відображення V в U_a, індуковане γ. Прямою сумою зображень $X = (V, U, \gamma)$ і $X' = (V', U', \gamma')$ називається зображення $X \oplus X' = (V \oplus V', U \oplus U', \gamma \oplus \gamma')$.

Вектор $\overline{d} = \overline{d}(X) = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_n)$, де $d_0 = \dim V$ і $d_i = \dim U_i$, називається вектором-розмірністю зображення X, а число $d = d(X) = \dim V + \dim U$ — його розмірністю.

Морфізмом з (V, U, γ) в (V', U', γ') є довільна пара (μ, ν) лінійних відображень $\mu \in \mathrm{Hom}(V, V')$ і $\nu \in \mathrm{Hom}_A(U, U')$, таких, що діаграма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mu"'] & U \arrow[d, "\nu"] \\ V' \arrow[r, "\gamma'"] & U' \end{tikzcd}$$

комутативна. Перемножуються морфізми покоординатно. Очевидно, що морфізм (μ, ν) є ізоморфізмом тоді і лише тоді, коли μ — ізоморфізм в $\mathrm{mod}\, k$ і ν — ізоморфізм в $\mathrm{mod}_A k$.

Категорія зображень (над полем k) ч. в. множин A позначається нами через $Rep_k A$ або просто через $Rep A$. У силу основного результату роботи [61] вона є категорією Крулля-Шмідта.

Кажуть, що ч. в. множина A має скінченний тип, якщо $Rep A$ — категорія скінченного типу.

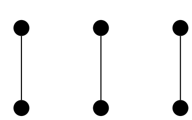
Частково впорядковані множини скінченного типу описує наступна теорема, доведена в роботі [62].

Теорема 1.5. *Частково впорядкована множина A має скінченний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить у собі підмножин такого вигляду:*

$\mathcal{K}_1$:

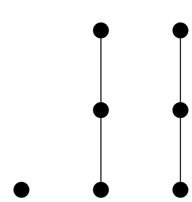
;

$\mathcal{K}_2$:



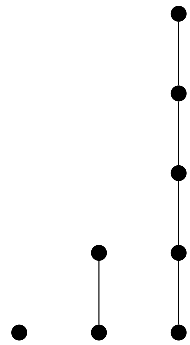
;

$\mathcal{K}_3$:



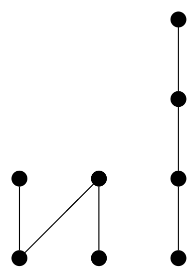
;

$\mathcal{K}_4$:



;

$\mathcal{K}_5$:



.

Частково впорядковані множини часто називають критичними множинами Клейнера.

1.6. Квадратичні форми Тітса

Про квадратичну форму Тітса для сагайдаків (частково для сагайдаків із співвідношеннями) та частково впорядкованих множин говорилося у вступі до дисертації. У цьому параграфі ми розглянемо означення форм Тітса (для тих об'єктів, які будуть зустрічатися надалі) та розглянемо деякі їх властивості.

Як звичайно, $\mathbb{Z}$ позначає кільце цілих чисел, а $\mathbb{Q}$ — поле раціональних чисел.

Протягом дисертації додатно визначені форми $q_{\mathbb{Z}}^n \to \mathbb{Z}$ ми часто називаємо просто додатними. Слабо додатною формою називається форма q, додатно визначена на множині всіх векторів із невід'ємними координатами.

1.6.1. Форма Тітса скінченного сагайдака. Квадратична форма (скінченного) сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ — це згідно означення форма $q_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$, яка задається наступною рівністю:

$$q_Q(z) = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{i \to j} z_i z_j,$$

де $i \to j$ пробігає множину Q_1.

Легко показати (див. [1]), що сагайдак Q має додатно визначену форму Тітса тоді і лише тоді, коли він є неперетинним об'єднанням діаграм Динкіна (з довільним напрямком стрілок).

Дамо тепер означення квадратичної форми Тітса для сагайдака з співвідношеннями $\overline{Q} = (Q, \lambda)$, де $\lambda = \{\lambda_i \,|\, i \in I\}$.

Покладемо $\Gamma = k$ і позначимо через $\mathcal{R}$ радикал Г. Позначимо, далі, через $\mathcal{I}$ ідеал в Г, породжений всіма λ_i, через $\mathcal{J}$ ідеал в Г, породжений всіма стрілками і через $\mathcal{K}$ ідеал в Г, породжений ідеалами $\mathcal{I}$ і $\mathcal{J}$. Будемо вважати, що кожне λ_i належить $\mathcal{R}^2$ і що категорія $\Gamma = k/\mathcal{I}$ скінченна (тоді Г — спектроїд). Квадратичною формою Тітса сагайдака зі співвідношеннями $\overline{Q}$ називається наступна форма $q_{\overline{Q}} : \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$:

$$q_{\overline{Q}}(z) = \sum_{x \in Q_0} z_x^2 - \sum_{x \to y} z_x z_y + \sum_{x,y \in Q_0} r_{xy} z_x z_y,$$

де $x \to y$ пробігає множину Q_1 і $r_{xy} = \dim\mathcal{I}(x,y) - \dim\mathcal{K}(x,y)$.

1.6.2. Форма Тітса спектроїда. Визначимо форму Тітса $q_\Psi(z)$ для спектроїда Ψ зі скінченним числом об'єктів: $q_\Psi(z)$ — це форма Тітса $q_{\overline{Q}}(z)$ для сагайдака зі співвідношеннями $\overline{Q}$ спектроїда Ψ (див. попередній пункт).

У випадку, коли Φ — k-категорія Крулля-Шмідта, що має (з точністю до ізоморфізму) скінченне число нерозкладних об'єктів, ми називаємо її формою Тітса $q_\Phi(z)$ форму Тітса $q_{\Phi_0}(z)$, де Φ_0 — головний спектроїд Φ.

1.6.3. Форма Тітса скінченної ч. в. множини. Квадратична форма ч. в. множини S — це форма $q_S(z) : \mathbb{Z}^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$, яка задається наступною рівністю:

$$dr_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i$$

(з формальних міркувань треба вважати, що ні один із елементів S не позначений числом 0).

У роботі [2] доведено, що ч. в. множина S має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса слабо додатна. Звідси, враховуючи теорему 1.5, випливає, що ч. в. множина S має слабо додатну форму Тітса тоді і лише тоді, коли вона не містить як підмножину ніяку критичну множину Клейнера.

1.6.4. Форма Тітса нескінченної ч. в. множини. Нехай S — нескінченна ч. в. множина і $\mathbb{Z}_0^{S\cup 0}$ — підмножина в декартовому добутку $\mathbb{Z}^{S\cup 0}$, яка складається з всіх векторів $z = (z_i)$, що мають скінченне число ненульових координат. Формою Тітса нескінченної ч. в. множини S називається форма $q_S : \mathbb{Z}_0^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$, яка задається тією ж рівністю, що і у випадку скінченних ч. в. множин:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i$$

(дів. [29]). Назвемо цю форму додатно визначеною або просто додатною, якщо вона приймає додатні значення для всіх ненульових $z \in \mathbb{Z}_0^{S\cup 0}$, і слабо додатною, якщо вона додатна на множині всіх векторів $z \in \mathbb{Z}_0^{S\cup 0}$, що мають невід'ємні координатами.

Легко бачити, що нескінченна ч. в. множина має слабо додатну форму Тітса в тому і лише в тому випадку, коли вона не містить (як підмножин) критичних множин Клейнера.

Одним з основних завдань дисертації є опис всіх скінченних частково впорядкованих множин із додатною формою Тітса. Аналогічне завдання для нескінченних множин розв'язане раніше в роботі [29] і ми переходимо до викладення відповідного результату.

Дамо спочатку деякі означення (для скінченних і нескінченних ч. в. множин).

Шириною ч. в. множини S називається максимальне число її попарно непорівняльних елементів. Ми позначаємо її через $w(S)$.

Будь-яку лінійно впорядковану множину (тобто множину ширини $\leqslant 1$) ми називаємо *ланцюгом*, а ч. в. множину з єдиною парою непорівняльних елементів — *майже ланцюгом*. У випадку, коли X — підмножина ч. в. множини S і при цьому X — ланцюг (відповідно майже ланцюг), будемо говорити, що X є *ланцюговою* (відповідно *майже ланцюговою*) *підмножиною* S.

Ми називаємо ч. в. множину S *сумою* власних підмножин $A_1, ..., A_s$ та пишемо $S = A_1 + \ldots + A_s$, якщо вони попарно не перетинаються та їх об'єднання дорівнює S; якщо при цьому елементи, що належати різним доданкам, завжди непорівняльні, то S називається прямою сумою заданих підмножин та позначається $S = A_1 \coprod \ldots \coprod A_s$. Далі, сума $S = A_1 + \ldots + A_s$ називається *односторонньою*, якщо, з точністю до нумерації доданків, $i < j$ будь-який раз, коли існують елементи $b \in A_i$ та $c \in A_j$ для $i \neq j$ такі, що $b < c$. Нарешті, сума $S = A_1 + \ldots + A_s$ називається *мінімаксною* (відповідно *напівмінімаксною*), якщо з $x < y$, де x та y належати різним доданкам, випливає, що x є мінімальним і (відповідно або) y максимальним елементом множини S. Зауважимо, що пряма сума є як односторонньою, так і мінімаксною.

Останні три поняття введені у роботі [29].

Надалі, коли ми будемо говорити про односторонні, напівмінімаксні чи мінімаксні суми двох ланцюгів, то, як правило, будемо вважати, що вона не є прямою; у випадках, коли ми цього не будемо притримуватися, ми будемо про це попереджувати.

У вже цитованій роботі [29] доведена така теорема.

Теорема 1.6. *Нехай S — нескінченна частково впорядкована множина. Тоді форма Тітса $q_S(x)$ є додатно визначеною тоді і лише тоді, коли виконана одна із таких умов:*

1) *S — пряма сума двох ланцюгів;*
2) *S — пряма сума ланцюга і майже ланцюга;*
3) *S — одностороння мінімаксна сума двох ланцюгів.*

Безпосередньо з доведення цієї теореми випливає, що існує деяке натуральне число N, таке, що будь-яка скінченна ч. в. множина порядку більшого за N із додатно визначеною формою Тітса має вигляд 1), 2) або 3) (основним при цьому є те, що список ч. в. множин з не додатною формою Тітса, яким користуються автори роботи [29] скінченний і складається лише з скінченних ч. в. множин).

Розділ 2

(MIN, MAX)-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН

У цьому розділі детально вивчаються властивості (min, max)-еквівалентних ч. в. множин. Основною мотивацією цих досліджень є той факт, що такі ч. в. множини мають еквівалентні форми Тітса.

2.1. Означення (min, max)-еквівалентності

Нехай S — скінченна частково впорядкована множина. Підмножину X будемо називати *нижньою* (відповідно *верхньою*), якщо $x \in X$ щораз, коли $x < y$ (відповідно $x > y$) і $y \in X$. Запис $x \not\gtrless y$ буде означати, що елементи x і y непорівняльні. Множина елементів $x \in S$, непорівняльних з фіксованим елементом $a \in S$, будемо позначати $S^{\not\gtrless}(a)$; для підмножин Y і Z множини S ми пишемо $Y < Z$, якщо $y < z$ для будь-яких $y \in Y, z \in Z$ (це заздалегідь виконується, коли Y або Z є порожньою). Одноелементні підмножини S ототожнюються із самими елементами.

Для ч. в. множин X і Y ми пишемо $X =_0 Y$, якщо X і Y рівні як звичайні множини (тобто без розгляду порядків на них). Якщо ж $X =_0 Y$ і при цьому $x < y$ в X тоді і лише тоді, коли $x < y$ в Y, то X і Y називаються *рівними* як ч. в. множини.

Дуальну до S ч. в. множину будемо позначати через S^{op}; тобто $S^{\mathrm{op}} =_0 S$ і при цьому $x < y$ в S^{op} тоді і лише тоді, коли $x > y$ в S. Ч. в. множини S і T називаються *антиізоморфними*, якщо S ізоморфно T^{op}.

Поняття (min, max)-еквівалентності ч. в. множин введене в роботі [30]. Нагадаємо його.

Означимо для мінімального (відповідно максимального) елемента $a \in S$ ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) наступним чином: це об'єднання (без перетину) підмножин $\{a\}$ і $S \setminus a$ з найменшим частковим порядком, який містить заданий на $S \setminus a$ порядок, і при цьому $a > S^{\lessgtr}(a)$ (відповідно $a < S^{\lessgtr}(a)$). іншими словами, $S_a^{\uparrow} =_0 S$ (відповідно $S_a^{\downarrow} =_0 S$) і відношення часткового порядку задається такими умовами:

a) a — максимальна (відповідно мінімальна) точка $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$);

b) якщо $x, y \neq a$, то $x < y$ в $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) тоді і лише тоді, коли $x < y$ в S;

c) $a > x$ в $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $a < x$ $S_a^{\downarrow}$) тоді і лише тоді, коли $a \lessgtr x$ в S.

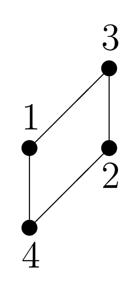
Надалі ми пишемо $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ замість $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$ і т. д.

Нехай S і T — ч. в. множини, такі, що $S =_0 T$. Ч. в. множину T назвемо (min, max)-*еквівалентною* ч. в. множині S, якщо T дорівнює якійсь ч. в. множині виду

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p} \ (p \geq 0),$$

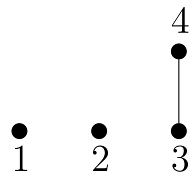
де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ і, для кожного $i = 1, \ldots, p$, x_i — мінімальна (відповідно максимальна) точка $\overline{S}_{i-1} = S_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}}$, якщо $\varepsilon_i = \uparrow$ (відповідно $\varepsilon_i = \downarrow$); при $p = 0$ вважаємо, що $\overline{S} = S$. Зауважимо, що ми не вимагаємо, щоб елементи $x_1 x_2 \ldots x_p$ були різні. Той факт, що введене відношення є відношенням еквівалентності, ми доведемо у наступному параграфі.

Наприклад, якщо за S взяти ч. в. множину



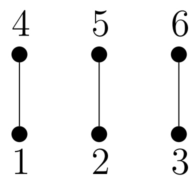
,

то $T = (S)^{\uparrow\downarrow}_{34}$ дорівнює



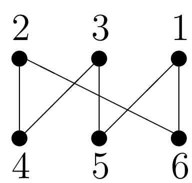
,

а якщо за S взяти ч. в. множину



,

то $T = S^{\uparrow\uparrow\uparrow}_{123}$ дорівнює



.

Поняття (min, max)-еквівалентності можна продовжити звичайним чином до поняття (min, max)-ізоморфізма. Саме назвемо ч. в. множини S і S' (min, max)-*ізоморфними*, якщо існує ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна S і ізоморфна S'.

Надалі, коли ми пишемо $S^{\uparrow}_x$, $S^{\downarrow}_y$, $S^{\uparrow\downarrow}_{xy}$ і т. д., ми не завжди вказуємо, що x є мінімальним, y є максимальним і т. д. (тобто завжди передбачається, що виписані вирази подібного типу мають сенс).

2.2. Первинні властивості (min, max)-еквівалентних частково впорядкованих множин

Безпосередньо з означення (min, max)-еквівалентних ч. в. множин випливають наступні їхні властивості.

Лема 2.1. a) $(S_a^{\uparrow})^{\mathrm{op}} = (S^{\mathrm{op}})_a^{\downarrow}$ *для будь-якого мінімального елемента* $a \in S$*;*

b) $S_{aa}^{\uparrow\downarrow} = S$ *для будь-якого мінімального елемента* $a \in S$*;*

b′) $S_{aa}^{\downarrow\uparrow} = S$ *для будь-якого максимального елемента* $a \in S$*;*

c) $S_{ab}^{\uparrow\uparrow} = S_{ba}^{\uparrow\uparrow}$ *для будь-яких (різних) мінімальних елементів* $a, b \in S$*; при цьому в* $S_{ba}^{\uparrow\uparrow}$ *елементи* a *і* b *є максимальними;*

c′) $S_{ab}^{\downarrow\downarrow} = S_{ba}^{\downarrow\downarrow}$ *для будь-яких (різних) максимальних елементів* $a, b \in S$*; при цьому в* $S_{ba}^{\downarrow\downarrow}$ *елементи* a *і* b *є мінімальними.*

Наслідок 2.2. *Відношення* $(\min, \max)$*-еквівалентності є відношенням еквівалентності.*

Доведення. Очевидно, що кожна ч. в. множина S (min, max)-еквівалентна самій собі (див. означення при $p = 0$). Далі, якщо

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \dots x_{p-1} x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p},$$

то за властивостями b) і b′)

$$S = \overline{S}\,{}_{x_p x_{p-1} \dots x_2 x_1}^{\varepsilon_p^{-1} \varepsilon_{p-1}^{-1} \dots \varepsilon_2^{-1} \varepsilon_1{}^{-1}},$$

де ε_i^{-1} позначає стрілку, що у порівнянні зі стрілкою ε_i має протилежний напрямок. Із сказаного випливає, що якщо T (min, max)-еквівалентна S, то S (min, max)-еквівалентна T. Транзитивність розглянутого відношення очевидна. $\square$

У випадку, коли ч. в. множини S і T (min, max)-еквівалентні, ми пишемо $S \cong_{(\min,\max)} T$.

Нагадаємо, що квадратична форма Тітса ч. в. множини S — це форма $q_S(z) : \mathbb{Z}^{S \cup 0} \to \mathbb{Z}$, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

(передбачається, що жоден з елементів S не позначений символом 0); тут $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел і $\mathbb{Z}^{S \cup 0}$ множина векторів $z = (z_i)$, де $z_i \in \mathbb{Z}$ і $i \in S \cup 0$.

Головною мотивацією введення поняття "(min, max)-еквівалентних ч. в. множин"є наступне твердження із роботи [30].

Твердження 2.3. *Нехай S і T — (min, max)-еквівалентні ч. в. множини. Тоді їхні форми Тітса еквівалентні.*

2.3. Min-еквівалентні частково впорядковані множини та їх властивості

Будемо тепер вивчати ч. в. множини виду $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$; як і в загальному випадку, ми не вимагаємо, щоб елементи $x_1 x_2 \ldots x_p$ були різні. Якщо ч. в. множина T дорівнює якійсь ч. в. множини виду $\overline{S}$ ($p \geq 0$), то будемо говорити, що T є min-еквівалентною ч. в. множині S і писати $T \cong_{\min} S$.

Послідовність

$$\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad 0 \leq p < \infty,$$

елементів $x_i \in S$ назвемо min-*допустимою*, якщо вираз $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$ має сенс. Число p назвемо *довжиною* α і позначимо $d(\alpha)$. У цьому випадку ми також пишемо $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Помітимо, що порожня послідовність α_0 (довжини 0) є min-допустимою. Множина всіх min-допустимих послідовностей елементів з S позначимо $\mathcal{P}(S)$.

Для послідовності $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}(S)$ і $0 \leq i \leq p$ покладемо $\alpha_{(i)} = (x_1, x_2, \ldots, x_i)$ и $\alpha^{(i)} = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$. Очевидно, що $\alpha_{(i)} \in \mathcal{P}(S)$ і $\alpha^{(i)} \in \mathcal{P}(S^{\uparrow}_{\alpha_{(i-1)}})$. Покладемо, далі,

$$[\alpha]_S = \{x \in S \,|\, x = x_i \text{ для деякого } i\}.$$

Кратність входження $a \in S$ в $\alpha \in \mathcal{P}(S)$ позначаємо через $m_\alpha(a)$. Іншими словами, $m_\alpha(a)$ дорівнює числу $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, таких, що $x_i = a$.

Лема 2.4. *Якщо $\alpha \in \mathcal{P}(S)$, то підмножина $[\alpha]_S \subseteq S$ є нижньою.*

Дійсно, якби в S існували елементи $a \notin [\alpha]_S$ і $b \in [\alpha]_S$, такі, що $a < b$, і s було найменше число, таке, що $x_s = b$, та нерівність $a < b$ мала б місце і в $S^{\uparrow}_{\alpha_{(s-1)}}$, тобто елемент b не був би мінімальним в $S^{\uparrow}_{\alpha_{(s-1)}}$.

Множина всіх послідовностей

$$\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}(S),$$

таких, що $m_\alpha(x) \leq k$ для довільного $x \in S$, позначимо через $\mathcal{P}_k(S)$. Зокрема, $\mathcal{P}_1(S)$ — це множина всіх min-допустимих послідовностей без повторень (що містить, між іншим, послідовність α_0). Помітимо, що $\mathcal{P}_k(S) \subseteq \mathcal{P}_s(S)$, якщо $k < s$.

Розглянемо тепер деякі твердження, які пов'язані з властивостями послідовностей з $\mathcal{P}(S)$ і які знадобляться нам надалі. Порядок ч. в. множини S позначаємо через n.

Лема 2.5. *Нехай S_1 позначає множину всіх мінімальних елементів в S і (індуковано) $S_i, i > 1$, — множина мінімальних елементів в $S \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} S_j)$ (очевидно, що $\cup_{i=1}^{r} S_i = S$, де r — найбільше i, таке, що $S_i \neq \varnothing$); запис $h(x) = i$ для елемента $x \in S$ буде означати, що $x \in S_i$. Тоді будь-яка послідовність без повторень $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, така, що $h(x_1) \leq h(x_2) \leq \ldots \leq h(x_n)$, належить $\mathcal{P}(S)$ (а значить і $\mathcal{P}_1(S)$).*

Доведення очевидно.

Наслідок 2.6. *Нехай X — підмножина S. В $\mathcal{P}_1(S)$ існує послідовність α, така, що $[\alpha] = X$, тоді і лише тоді, коли підмножина X нижня.*

Дійсно, необхідність очевидна, а достатність випливає з леми 2.5 для ч. в. множини X.

Твердження 2.7. *Нехай $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ послідовність із $\mathcal{P}_1(S)$ (тоді $m \leq n$) і нехай $a, b \in S$. Тоді $a < b$ в $\overline{S} = S_\alpha^\uparrow$ в тому і лише в тому випадку, коли виконується одна з наступних умов:*

a) *$a < b$ в S і або $a, b \in [\alpha]_S$, або $a, b \notin [\alpha]_S$;*

b) *$a \lessgtr b$ в S і $b \in [\alpha]_S, a \notin [\alpha]_S$.*

Доведення випливає з означення ч. в. множини $S_x^\uparrow$; оскільки відповідно до нього $(S_x^\downarrow) \setminus x = S \setminus x$, то по суті варто враховувати лише ті кроки (переходу від S до $\overline{S}$), які пов'язані з елементами a і b (їхнє число дорівнює 0, 1 або 2).

Наслідок 2.8. *Якщо $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ і $[\alpha]_S = S$, то $S_\alpha^\uparrow = S$.*

Наслідок 2.9. *Якщо $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, то $[\alpha]_{S_\alpha^\uparrow}$ — верхня ч. в. підмножина в $S_\alpha^\uparrow$, рівна $[\alpha]_S$.*

Наслідок 2.10. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$, причому β утворюється з α перестановкою її членів (або, іншими словами, $[\alpha]_S = [\beta]_S$), то $S_\alpha^\uparrow = S_\beta^\uparrow$.*

Дійсно, твердження 2.7 показує, що $S_\alpha^\uparrow$ не залежить від того, у якій послідовності розташовані її члени.

Через $S_X^\uparrow$, де X — нижня підмножина S, будемо позначати ч. в. множину $S_\alpha^\uparrow$, де α — послідовність із $\mathcal{P}_1(S)$, така, що $[\alpha] = X$. Існування такого α випливає з леми 2.5, а незалежність введеної ч. в. множини від вибору α — з наслідку 2.10. Із сказаного випливає, що при обчисленні порядку на $S_X^\uparrow$ можна не фіксувати відповідну послідовність, а відразу скористатися умовами *a*) і *b*) твердження 2.7. Зокрема, $S_S^\uparrow = S$.

Легко бачити (якщо врахувати твердження 2.7), що має місце наступне твердження (яке узагальнює твердження c) леми 2.1).

Лема 2.11. *Нехай X і Y — нижні підмножини S, такі, що $x \lessgtr y$ для будь-яких $x \in X, y \in Y$. Тоді $(S_X^{\uparrow})_Y^{\uparrow} = (S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow} = S_{X \cup Y}^{\uparrow}$.*

З вищесказаного випливає наступне твердження.

Твердження 2.12. *Наступні умови еквівалентні:*

a) T min-*еквівалентна* S;

b) T (min, max)-*еквівалентна* S.

Доведення. імплікація a) $\Rightarrow$ b) очевидна. Імплікація b) $\Rightarrow$ a) випливає безпосередньо з рівності $Y_x^{\downarrow} = Y_{Y \setminus x}^{\uparrow}$ (для кожної ч. в. множини Y і будь-якого її максимального елемента), яке у свою чергу випливає з рівності $Y_Y^{\uparrow} = Y$ і твердження b) леми 2.1 (більш детально: зафіксуємо послідовність $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$ з $\mathcal{P}_1(Y)$, таку, що $[\beta] = Y$ і $y_s = x$, і покладемо $\beta' = (y_1, y_2, \ldots, y_{s-1})$; тоді $Y_x^{\downarrow} = (Y_Y^{\uparrow})_x^{\downarrow} = (Y_\beta^{\uparrow})_x^{\downarrow} = (Y_{\beta'}^{\uparrow})_{xx}^{\uparrow\downarrow} = Y_{\beta'}^{\uparrow} = Y_{Y \setminus x}^{\uparrow}$). □

Звідси випливає, що відношення min-еквівалентності є відношенням еквівалентності.

Природно можна ввести min-ізморфізм ч. в. множин (це робиться, виходячи з min-еквівалентності, у такий же спосіб, як раніше визначався (min, max)-ізморфізм, виходячи з (min, max)-еквівалентності).

Розглянуті вище твердження про послідовності з $\mathcal{P}_1(S)$ можна узагальнити на послідовності з $\mathcal{P}_k(S)$ для будь-якого k. Ми зробимо це лише для $k = 2$ (інші випадки в цьому розділі не потрібні).

Для $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}_2(S)$ позначимо через $[\alpha]_S^2$ підмножину в $[\alpha]_S$, що складається з тих елементів S, які зустрічаються в послідовності α два рази.

Твердження 2.13. *Нехай $\alpha \in \mathcal{P}_2(S)$ і нехай $a, b \in S$. Тоді $a < b$ в $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$ тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

a) *$a < b$ в S і $m_\alpha(a) = m_\alpha(b)$;*

b) *$b < a$ в S і $m_\alpha(a) = 0, m_\alpha(b) = 2$;*

c) *$a \asymp b$ в S і $m_\alpha(b) = m_\alpha(a) + 1$.*

Доведення випливає безпосередньо з означень.

Наслідок 2.14. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_2(S)$, причому β утворюється із α перестановкою її членів (або, іншими словами, $[\alpha]_S = [\beta]_S$ і $[\alpha]^2_S = [\beta]^2_S$), то $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\beta}$.*

Дійсно, твердження 2.13 показує, що $S^{\uparrow}_{\alpha}$ не залежить від того, у якій послідовності розташовані її члени.

Лема 2.15. *Якщо $\alpha \in \mathcal{P}_2(S)$, то $[\alpha]^2_S$ є нижньою підмножиною в $[\alpha]_S$ (а значить і в S) і $[\alpha]^2_S < S \setminus [\alpha]_S$.*

Доведення. Припустимо, що $[\alpha]^2_S$ не є нижньою. Тоді існують елементи $b \in [\alpha]^2_S$ і $a \notin [\alpha]^2_S$, такі, що $a < b$; нехай i та $j > i$ позначають такі числа, що $x_i = x_j = b$. Оскільки підмножина $[\alpha]_S$ є нижньою і $[\alpha]^2_S \subseteq [\alpha]_S$, то $a \in [\alpha]_S$. Тоді $a = x_s$ для деякого s, і оскільки елемент b є мінімальним в $S^{\uparrow}_{\alpha(i-1)}$, то $s < i$, а значить $a \asymp b$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i-1)}$. Отже, $a < b$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i)}$, а значить і в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$, а тоді елемент b не є мінімальним в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$; значить α не є min-допустимою і приходимо до протиріччя. Далі, припустимо, що зазначена в умові нерівність не виконується. Тоді існують $a \in [\alpha]^2_S$ і $b \in S \setminus [\alpha]_S$, такі, що $a \asymp b$ (оскільки $[\alpha]^2_S$ — нижня підмножина, то випадок $b < a$ неможливий). Нехай $a = x_i = x_j$, де $i < j$. Тому що $b \notin [\alpha]_S$, то $a \asymp b$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i-1)}$, а тому $b < a$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i)}$; по тій же причині $b < a$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$ і значить в цій ч. в. множині $x_j = a$ не може бути мінімальним елементом; знову прийшли до протиріччя. □

Ми будемо писати (з аналогією з послідовностями) $S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ замість $(S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow}_{X}$.

Лема 2.16. *Нехай Y — нижня підмножина S, а X — нижня підмножина Y, причому $X < S\setminus Y$. Тоді вираз $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = (S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow}_{X}$ коректний.*

Дійсно, вираз $S^{\uparrow}_{Y}$ коректний за наслідком 2.6, а $(S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow}_{X}$ — тому, що за умовою $X < S \setminus Y$ підмножина X є нижньою і в $S^{\uparrow}_{Y}$ (див. твердження 2.7).

Твердження 2.17. *Нехай X і Y — підмножини S. В $\mathcal{P}_2(S)$ існує послідовність α, така, що $[\alpha]_S = Y$ і $[\alpha]^2_S = X$, тоді і лише тоді, коли Y — нижня підмножина S, X — нижня підмножина Y і при цьому $X < S \setminus Y$.*

Дійсно, необхідність випливає з лем 2.4 і 2.16, а достатність — це переформулювання попередньої леми.

Помітимо, що можна вивчати ч. в. множини виду $\overline{S} = S^{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$. Для них легко переформулювати все, що було сказано вище для ч. в. множин виду $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ (зокрема, ввести поняття max-еквівалентності і max-ізоморфізму ч. в. множин). Відповідні означення і доведення розглядаються аналогічним чином; їх можна також одержати з вищенаведених переходом до дуальної ч. в. множини з урахуванням твердження а) леми 2.1 та випливає з рівності $S^{\uparrow\uparrow}_{XS\setminus X} = S$.

Лема 2.18. *Нехай X — нижня підмножина S. Тоді $S^{\uparrow}_{X} = S^{\downarrow}_{S\setminus X}$.*

В якості прикладу приведемо ще одне корисне твердження про зв'язок між min- та max-еквівалентністю.

Нехай Y та X задовольняють умовам леми 2.16, тобто Y — нижня підмножина S, X — нижня підмножина Y та при цьому $X < S \setminus Y$. Оскільки підмножина Y однозначно задається підмножиною $Z = S \setminus Y$, то замість Y та X можно розглядати підмножини Z та X, такі, що Z — верхня підмножина S, X — нижня підмножина Y, причому $Z \cap X = \varnothing$ та $X < Z$. При цьому ч. в. множина $S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ обчислюється в нових термінах наступним чином.

Лема 2.19. $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y} = S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX}$.

Дійсно, з $S^{\uparrow}_{Y} = (S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow\downarrow}_{S\setminus YS\setminus Y} = (S^{\uparrow\uparrow}_{YS\setminus Y})^{\downarrow}_{S\setminus Y} = S^{\downarrow}_{S\setminus Y}$ маємо $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX}$, а з $S^{\downarrow}_{S\setminus Y} = (S^{\uparrow\downarrow}_{XX})^{\downarrow}_{S\setminus Y} = (S^{\uparrow}_{X})^{\downarrow\downarrow}_{XS\setminus Y} = (S^{\uparrow}_{X})^{\downarrow}_{X\cup(S\setminus Y)} = (S^{\uparrow}_{X})^{\downarrow\downarrow}_{S\setminus YX}$ маємо $S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX} = (S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y})^{\downarrow\uparrow}_{XX} = S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y}$, звідки $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y}$. Рівність $S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y} = S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX}$ випливає з твердження 2.7 та дуального до нього твердження.

2.4. Алгоритм побудови всіх частково впорядкованих множин, min-еквівалентних заданій множині

У цьому параграфі ми вкажемо алгоритм, який дозволяє виписати всі ч. в. множини, min-еквівалентні заданій ч. в. множині.

Спочатку розглянемо деякі додаткові твердження про властивості min-еквівалентних ч. в. множин.

Нехай S — довільна ч. в. множина і $n = |S|$.

Лема 2.20. *Нехай α — послідовність із $\mathcal{P}(S)$ і при цьому $[\alpha]_S = S$. Тоді існує послідовність $\beta \in \mathcal{P}(S)$ довжини $d(\beta) = d(\alpha) - n$, така, що $S^{\uparrow}_{\beta} = S^{\uparrow}_{\alpha}$.*

Доведення. Доведення будемо проводити індукцією по $d(\alpha)$. База індукції, а саме випадок $d(\alpha) = n$, має місце за наслідком 2.8 (у якості β потрібно взяти порожню послідовність).

Нехай тепер $p = d(\alpha) > n$. Покладемо $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ і позначимо через $s = s(\alpha)$ найменше число, таке, що $m_{\alpha}(x_s) > 1$. Розглянемо спочатку випадок, коли $s = 1$. Помітимо, що $S^{\uparrow}_{\alpha} = (S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}}$. Застосовуючи індукційне припущення до множини $S' = S^{\uparrow}_{x_1}$ і послідовності $\alpha' = \alpha^{(2)}$ довжини $d(\alpha') = p - 1$, одержуємо, що існує послідовність $\beta' \in \mathcal{P}(S') = \mathcal{P}(S)$ довжини $d(\beta') = p - 1 - n$, така, що $(S')^{\uparrow}_{\alpha'} = (S')^{\uparrow}_{\beta'}$, тобто $(S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}} = (S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\beta'}$ або $S^{\uparrow}_{\alpha} = (S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\beta'}$. Останню рівність можна записати в такий спосіб:

$S_\alpha^\upharpoonleft = S_\beta^\upharpoonleft$, де $\beta = (x_1, \beta')$. Оскільки $d(\beta) = d(\beta') + 1 = p - n$, то лема в цьому випадку доведена.

Розглянемо тепер випадок, коли $s > 1$; тоді $m_\alpha(x_i) = 1$ для $i = 1, \ldots, s-1$. Легко бачити, що x_j при $1 \leq j < s$ і x_s непорівнянні в S. Дійсно, у протилежному випадку $x_j < x_s$ в S (тому що $x_j \not> x_s$ в $S_{\alpha_{(j-1)}}^\upharpoonleft$ відповідно до означення послідовностей з $\mathcal{P}$), і, отже, в дійсності $x_j < x_s$ в $S_{\alpha_{(j-1)}}^\upharpoonleft$, а значить $x_j < x_s$ і в $S_{\alpha_{(s)}}^\upharpoonleft$; але оскільки x_j (як елемент S) не зустрічається в $\alpha^{(s+1)}$, а $x_s = x_t$ для деякого $t > s$, то елемент x_t не може бути мінімальним в $S_{\alpha_{(t-1)}}^\upharpoonleft$ і ми приходимо до протиріччя. Отже, $x_1, \ldots, x_{s-1}$ непорівнянні з x_s, а тоді за наслідком 2.10 $S_\alpha^\upharpoonleft = S_{\alpha'}^\upharpoonleft$, де $\alpha' = (x_s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_p)$. Але оскільки $m_{\alpha'}(x_s) = m_\alpha(x_s) > 1$ і $s(\alpha') = 1$, то ми прийшли до вже розглянутого вище випадку. $\square$

Наслідок 2.21. *Нехай $T \cong_{\min} S$. Тоді існує послідовність $\gamma \in \mathcal{P}_2(S)$, така, що $T = S_\gamma^\upharpoonleft$.*

Доведення. Зафіксуємо послідовність $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}(S)$, таку, що $T = S_\alpha^\upharpoonleft$ і нехай $\alpha \notin \mathcal{P}_2(S)$. Покажемо, що $[\alpha]_S = S$.

Припустимо протилежне і зафіксуємо елемент $a \in S \setminus [\alpha]_S$. Нехай x_s, x_t і x_r $(s < t < r)$ — рівні між собою члени послідовності α, $m_{\alpha_{(x_r)}}(x_r) = 3$. За лемою 2.4 $a \asymp x_s$ або $a > x_s$. І в першому випадку $a < x_s$ в $S_{\alpha_{(s)}}^\upharpoonleft$, а значить і в $S_{\alpha_{(t-1)}}^\upharpoonleft$, але тоді x_t не є мінімальним елементом в $S_{\alpha_{(t-1)}}^\upharpoonleft$ і ми прийшли до протиріччя. В другому випадку $a \asymp x_s$ в $S_{\alpha_{(t-1)}}^\upharpoonleft$, а значить $a < x_s$ в $S_{\alpha_{(r-1)}}^\upharpoonleft$, але тоді x_r не є мінімальним в $S_{\alpha_{(r-1)}}^\upharpoonleft$ і знову прийшли до протиріччя.

Отже, $[\alpha]_S = S$, а тоді за лемою 2.20 існує послідовність β довжини $d(\beta) = d(\alpha) - n$, така, що $S_\beta^\upharpoonleft = S_\alpha^\upharpoonleft$. Якщо при цьому $\beta \notin \mathcal{P}_2(S)$, то знову застосуємо зазначені міркування і т. д. За скінчене число кроків ми прийдемо до потрібної послідовності γ. $\square$

За наслідком 2.21 для опису всіх ч. в. множин, min-еквівалентних фіксованій ч. в. множині S, досить обмежитися послідовностями з $\mathcal{P}_2$. Якщо врахувати викладене в 2.3., то такий опис можна проводити за наступною схемою:

I. Описати всі нижні підмножини $X \neq S$ в S і для кожної з них побудувати ч. в. множину $S_X^{\uparrow}$.

II. Описати всі пари (Y, X), що складаються із власної нижньої підмножини Y в S і непорожньої нижньої підмножини X в Y, такої, що $X < S \setminus Y$; для кожної такої пари побудувати ч. в. множину $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$.

III. Серед отриманих в I і II ч. в. множин вибрати по одному з кожного класу ізоморфних множин.

Назвемо дві вказані в I підмножини X і X' *сильно ізоморфними*, якщо існує автоморфізм $\varphi : S \to S$, такий, що $\varphi(X) = X'$ (як ч. в. підмножини). Аналогічно, дві вказані в II пари (Y, X) і (Y', X') назвемо *сильно ізоморфними*, якщо існує автоморфізм $\varphi : S \to S$, такий, що $\varphi(Y) = Y'$ і $\varphi(X) = X'$. Очевидно, що підмножини в I і пари підмножин в II досить описувати з точністю до сильного ізоморфізму.

Зауважимо, що якщо скористатися рівністю $S_X^{\uparrow} = (S_{S\setminus X}^{\mathrm{op}\uparrow})^{\mathrm{op}}$, то у випадку $S^{\mathrm{op}} = S$ число множин $S_X^{\uparrow}$, які потрібно обчислити, можна зменшити. Однак у нашому випадку обчислення не дуже громіздкі і ми цим користуватися не будемо.

Нагадаємо ще, що ч. в. множини S і T називаються *антиізоморфними*, якщо S ізоморфно T^{op}.

2.5. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються властивості (min, max)-еквівалентних ч. в. множин. Основним результатом є опис алгоритму, який дозволяє класифікувати всі ч. в. множини, min-еквівалентні фіксованій ч. в. множині.

Результати цього розділу опубліковані в роботі [48].

Розділ 3

P-КРИТИЧНІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ ТА ЇХ ЗВ'ЯЗОК ІЗ КРИТИЧНИМИ МНОЖИНАМИ КЛЕЙНЕРА

3.1. Формулювання основних теорем

Нагадаємо, що квадратична форма $f(z) : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ називається *слабо додатною*, якщо вона приймає додатне значення на будь-якому ненульовому векторі з невід'ємними координатами. Додатно визначену форму ми часто називаємо просто *додатною*.

Ч. в. множину S назвемо *P-критичною* (відповідно *WP-критичною*), якщо форма Тітса будь-якої її власної підмножини є додатною (відповідно слабо додатною), але форма Тітса самої S такою не є.

Основними результатами цього розділу є наступні дві теореми.

Теорема 3.1. *Для ч. в. множини S наступні умови еквівалентні:*

1) *Форма Тітса S додатна.*

2) *Форма Тітса довільної ч. в. множини, яка* (min, max)-*еквівалентна S, є слабо додатною.*

Теорема 3.2. *Ч. в. множина S є P-критичною тоді і лише тоді, коли вона* (min, max)-*еквівалентна деякій WP-критичній ч. в. множини.*

Зауважимо, що WP-критичні ч. в. множини — це в точності критичні множини Клейнера (див. 3.2.2).

Підкреслимо, що в умовах теорем 3.1 і 3.2 замість (min, max)-еквівалентності можна взяти (min, max)-ізоморфізм. Крім того, замість (min, max)-еквівалентності можна взяти min-еквівалентність або max-еквівалентність (відповідні означення, а також доведення цього факту див. в 2.3.).

3.2. Допоміжні твердження

У цьому параграфі ми доведемо деякі твердження про (min, max)-еквівалентні ч. в. множини і про квадратичні формі Тітса.

3.2.1. Деякі властивості частково впорядкованих множин, пов'язані з додатною визначеністю форми Тітса. Підкреслимо, що за твердженням 2.12 замість (min, max)-еквівалентності можна розглядати min-еквівалентність або max-еквівалентність (зокрема, це стосується теорем 3.1 і 3.2), але з формальних міркувань ми не завжди будемо це робити.

Як ми вже говорили в попередньому розділі, головною мотивацією вивчення (min, max)-еквівалентних ч. в. множин є твердження із [30] про те, що такі множини мають еквівалентні форми Тітса. Звідси, зокрема, маємо таке твердження.

Наслідок 3.3. *Нехай* $S \cong_{(\min,\max)} T$. *Тоді форми* $q_S(z)$ *і* $q_T(z)$ *одночасно є або не є додатними.*

Ми будемо користуватися тепер деякими означеннями із розділу 1 (див. останній пункт останнього параграфу) і сформулюємо одне твердження, яке маї місце згідно теореми 1.6.

Твердження 3.4. *Якщо ч. в. множина* S *є прямою сумою двох ланцюгів або ланцюга і майже ланцюга, то його форма Тітса є додатною.*

Надалі нам знадобиться також наступна лема (про додатну визначеність форми Тітса для конкретних ч. в. множин).

Лема 3.5. *Квадратична форма Тітса є додатною для наступних ч. в. множин:*

$T_1 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

$T_2 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5, 6 \prec 7, 4 \prec 7\}$;

$T_3 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 7\}$;

$T_4 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6, 3 \prec 7\}$.

Лема випливає з наступних рівностей:

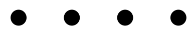
$q_{T_1}(z) = z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+z_5^2+z_6^2+z_7^2+z_2z_3+z_4z_5+z_4z_6+z_4z_7+z_5z_6+z_5z_7+z_6z_7-z_0(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6+z_7) = (z_1-1/2z_0)^2+(z_2+1/2z_3-1/2z_0)^2+3/4(z_3-1/3z_0)^2+(z_4+1/2z_5+1/2z_6+1/2z_7-1/2z_0)^2+3/4(z_5+1/3z_6+1/3z_7-1/3z_0)^2+2/3(z_6+1/4z_7-1/4z_0)^2+5/8(z_7-1/5z_0)^2+1/60z_0^2$,

$q_{T_2}(z) = z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+z_5^2+z_6^2+z_7^2+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3+z_4z_5+z_4z_7+z_6z_7-z_0(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6+z_7) = (z_1+1/2z_2+1/2z_3-1/2z_0)^2+3/4(z_2+1/3z_3-1/3z_0)^2+2/3(z_3-1/4z_0)^2+(z_4+1/2z_5+1/2z_7-1/2z_0)^2+3/4(z_5-1/3z_7-1/3z_0)^2+(z_6+1/2z_7-1/2z_0)^2+5/12(z_7-1/5z_0)^2+1/40z_0^2$,

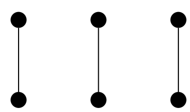
$q_{T_3} = z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+z_5^2+z_6^2+z_7^2+z_2z_3+z_2z_4+z_2z_7+z_3z_4+z_5z_6+z_5z_7+z_6z_7-z_0(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6+z_7) = (z_1-1/2z_0)^2+(z_2+1/2z_3+1/2z_4+1/2z_7-1/2z_0)^2+3/4(z_3+1/3z_4-1/3z_7-1/3z_0)^2+2/3(z_4-1/4z_7-1/4z_0)^2+(z_5+1/2z_6+1/2z_7-1/2z_0)^2+3/4(z_6+1/3z_7-1/3z_0)^2+7/24(z_7-1/7z_0)^2+1/28z_0^2$,

$q_{T_4} = z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+z_5^2+z_6^2+z_7^2+z_2z_3+z_2z_4+z_2z_6+z_2z_7+z_3z_4+z_3z_7+z_5z_6+z_5z_7+z_6z_7-z_0(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6+z_7) = (z_1-1/2z_0)^2+(z_2+1/2z_3+1/2z_4+1/2z_6+1/2z_7-1/2z_0)^2+3/4(z_3+1/3z_4-1/3z_6+1/3z_7-1/3z_0)^2+2/3(z_4-1/4z_6-1/2z_7-1/4z_0)^2+(z_5+1/2z_6+1/2z_7-1/2z_0)^2+3/8(z_6-1/3z_0)^2+1/4z_7^2+1/12z_0^2$.

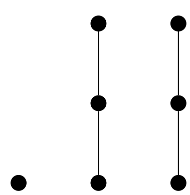
3.2.2. $\boldsymbol{WP}$**-критичні ч. в. множини.** З основних результатів робіт [62] і [2] випливає (див. останній параграф розділу 1), що ч. в. множина є WP-критичною тоді і лише тоді, коли вона ізоморфна одній з наступних ч. в. множин:

$\mathcal{K}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$:  ;

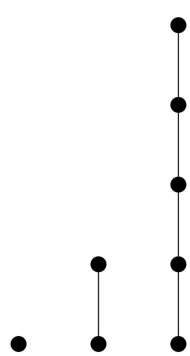
$\mathcal{K}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\}$:

 ;

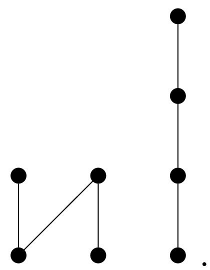
$\mathcal{K}_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$:

 ;

$\mathcal{K}_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$:

 ;

$\mathcal{K}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6, 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$:



Як уже говорилося в розділі 1, ч. в. множини $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$ часто називають критичними множинами Клейнера.

Нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.6. *Будь-яка WP-критична ч. в. множина є P-критичною.*

Доведення. Нехай S — WP-критична ч. в. множина. Очевидно, що S не є додатною. Покажемо, що будь-яка власна підмножина в S має додатну форму Тітса (для порожньої підмножини це очевидно).

Відповідно до сказаного вище WP-критичні ч. в. множини вичерпуються критичними множинами Клейнера $\mathcal{K}_s$ $(s = 1, \ldots, 5)$. Легко бачити, що кожна власна підмножина в $\mathcal{K}_s$ або є прямою сумою $L = L_1 \coprod L_2$ ланцюга L_1 і ланцюга або майже ланцюга L_2, або ізоморфна підмножині одній з наступних ч. в. множин:

$T_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$,

$T_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5, 6 \prec 7, 4 \prec 7\}$.

Отже, досить переконатися в тому, що форма Тітса є додатною для ч. в. множин L і $T = T_1, T_2$, а це випливає відповідно з твердження 3.4 і леми 3.5. $\square$

3.3. Доведення теорем 3.1 і 3.2

Нагадаємо, що ширину ч. в. множини S (максимальне число її попарно непорівняльних елементів) ми позначаємо через $w(S)$. Для елемента $a \in S$

позначимо через $S^{<}(a)$ або $\{a\}^{<}$ (якщо S фіксоване) підмножину всіх $x \in S$, таких, що $x < a$, і покладемо $S^{\leq}(a) = \{a\}^{\leq} = S^{<}(a) \cup a$.

Нагадаємо, що $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_5$ позначаються критичні множини Клейнера. Будемо говорити, що ч. в. множина T має вигляд $\mathcal{K} = \mathcal{K}_i$, якщо $T \cong \mathcal{K}$; якщо ж T містить підмножину, ізоморфну $\mathcal{K}$, то будемо просто говорити, що T містить $\mathcal{K}$.

Основним при доведенні теорем є наступне твердження.

Твердження 3.7. *Нехай S — така ч. в. множина, що будь-яка* (min, max)*-еквівалентна їй ч. в. множина не містить критичних множин Клейнера. Тоді S має додатно визначену форму Тітса.*

Зафіксуємо в S деякий максимальний елемент a. Тоді в $S' = S^{\uparrow}_{\{a\}^{<}}$ елемент a є як максимальним, так і мінімальним, а значить $S' = \{a\} \coprod (S' \setminus a)$. Звідси випливає, що існує ч. в. множина T, що задовольняє наступним умовам:

1) $T \cong_{(\min,\max)} S$;

2) $T = A \coprod B$, де $w(A) = 1$;

3) не існує T', A' і B', таких, що виконуються умови 1), 2) і $|A'| > |A|$.

Якщо при цьому $B = \varnothing$, то $w(T) = 1$, а якщо $w(B) = 1$, то T — пряма сума двох ч. в. множин ширини 1; в обох випадках відповідно до твердження 3.4 T має додатно визначену форму Тітса; а значить відповідно до твердження 2.3 такою ж є і форма Тітса ч. в. множини S. Випадок $w(B) \geq 3$ неможливий, тому що тоді T містить критичну множину $\mathcal{K}_1$. Таким чином, залишилося розглянути випадок, коли $w(B) = 2$.

Лема 3.8. *Нехай $w(B) = 2$. Тоді*

а) *B має два мінімальних елементи, наприклад b і c, і два максимальних елемента, наприклад f і g;*

b) *в* B *існують непорівняльні між собою мінімальний і максимальний елементи;*

c) *якщо* $b < x < f$ *та* $c < y < g$, *то* x *і* y *непорівняльні.*

Дійсно, якщо B має один мінімальний (відповідно максимальний) елемент, наприклад h, то $T' = T_h^{\uparrow}$ (відповідно $T' = T_h^{\downarrow}$) дорівнює $(B \setminus h) \coprod (A \cup h)$, де $w(A \cup h) = 1$, а це суперечить вибору T. Далі, якщо умова b) не виконується, то (з огляду на умову a)) маємо, що підмножина в $S_{bc}^{\uparrow\uparrow}$, що складається з елементів b, c, f, g, має вигляд $\mathcal{K}_1$, а це суперечить умові твердження. Нарешті, якщо не виконується умова c) (а a) і b) виконуються), то підмножина в $(S_{\{x\}\leq}^{\uparrow})_c^{\uparrow}$, що складається з елементів b, x, y, g, f, c, має вигляд $\mathcal{K}_2$ і знову приходимо до протиріччя.

Продовжуємо доведення твердження. Якщо B є прямою сумою двох підмножин ширини 1, то легко бачити, що T або є прямою сумою підмножини ширини 1 і підмножини, що складається з двох непорівняльних елементів, або містить підмножину Клейнера, або є власною підмножиною деякої множини Клейнера. Другий випадок неможливий, а в першому і третьому випадках T має додатно визначену форму Тітса (відповідно за твердженням 3.4 і лемою 3.6). У протилежному випадку за останньою лемою можливі (з точністю до ізоморфізму) тільки такі два випадки:

1) $T = A \coprod B$, де $A = \{z_1 < z_2 \ldots < z_r\}, r > 0$, і $B = \{x_1 < x_2 \ldots < x_p, y_1 < y_2 \ldots < y_q, x_i < y_j\}$; тут $i = 1, j > 1$ або $i < p, j = q$;

2) $T = A \coprod B$, де $A = \{z_1 < z_2 \ldots < z_r\}, r > 0$, і $B = \{x_1 < x_2 \ldots < x_p, y_1 < y_2 \ldots < y_q, x_1 < y_j, x_i < y_q\}$; тут $1 < i < p$, $1 < j < q$.

Помітимо, що у випадку 1) $p, q > 1$, а в у випадку 2) $p, q > 2$.

A) Розглянемо спочатку випадок 1) при $i = 1, j = q$. При цьому будемо вважати, що $p \leq q$ (випадок $p \geq q$ розглядається дуальним чином).

У цьому випадку $r < 4$, інакше T містить $\mathcal{K}_5$.

Якщо $r = 2, 3$, то $p = q = 2$, інакше T містить $\mathcal{K}_2$; а тоді за лемою 3.6

T має додатну форму Тітса. Якщо ж $r = 1$, то при $q = 2, 3$ форма Тітса множини T є додатною за лемою 3.5 (див. множину T_3), а при $p = 2, q = 4$ — в силу того, що $T^{\downarrow}_{y_4}$ ізоморфно T_2 (див. знову лему 3.5); інші випадки неможливі: якщо $p > 2, q = 4$, то T містить $\mathcal{K}_3$, а якщо $q > 4$, то $T^{\uparrow}_{y_q}$ містить $\mathcal{K}_5$.

B) Розглянемо тепер випадок 1) при $(i, j) \neq (1, q)$. Будемо вважати, що $i \neq 1, j = q$ (випадок $i = 1, j \neq q$ розглядається дуальним чином). Тоді $q > 2$, тому що в протилежному випадку підмножина в $T^{\downarrow}_{y_q}$, що складається з елементів $y_q, z_1, x_1, x_2, y_1, y_2$ має вигляд $\mathcal{K}_2$. І якщо $r = 1$, то $(T^{\uparrow}_{\{x_i\}_{\leq}})^{\uparrow}_{y_1}$ має вигляд, розглянутий в 1.1), а якщо $r > 1$, то $i = p - 1$ (інакше підмножина в T, що складається з точок $z_1, z_2, x_{p-1}, x_p, y_1, y_2$, має вигляд $\mathcal{K}_2$) і тоді вже $T^{\downarrow}_{y_2}$ має вигляд, розглянутий в A). Таким чином, усе зводиться до уже розглянутого випадку A).

C) Розглянемо тепер випадок 2). Будемо вважати, що $p \leq q$ (випадок $p \geq q$ розглядається дуальним чином).

У цьому випадку $r = 1$, тому що в протилежному випадку підмножина в T, що складається з елементів $z_1, z_2, x_i, x_p, y_1, y_j$ має вигляд $\mathcal{K}_2$. Далі, $p = 3$, інакше $T \setminus \{x_1, y_q\}$ містить $\mathcal{K}_3$. Крім того, і $q = 3$, тому що при $q > 4$ $T^{\downarrow}_{y_q}$ містить $\mathcal{K}_5$, а при $q = 4, j = 2$ (відповідно $q = 4, j = 3$) множина $T^{\uparrow}_{x_1}$ (відповідно $T^{\downarrow}_{y_q}$) містить $\mathcal{K}_2$.

Отже, ч. в. множина T ізоморфна множині T_4 з леми 3.5; відповідно до цієї леми вона має додатно визначену форму Тітса.

Твердження доведено.

Нам ще знадобиться наступна лема.

Лема 3.9. *Нехай $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}(S)$ і X — ч. в. підмножина S. Позначимо через α_X підпослідовність α, що складається із всіх $x_i \in X$. Тоді $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$ і $X^{\uparrow}_{\alpha_X}$ — повна ч. в підмножина $S^{\uparrow}_{\alpha}$.*

Доведення. Доведення будемо проводити індукцією по m. База індукції тривіальна.

Покажемо, що $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$. Очевидно, що $\alpha^{(2)} \in \mathcal{P}(S_{x_1}^{\uparrow})$. І якщо $x_1 \neq X$, то $\alpha_X^{(2)} = \alpha_X$ і X є підмножиною $S_{x_1}^{\uparrow}$. Тоді в силу індукційного припущення для $S' = S_{x_1}^{\uparrow}$, $\alpha' = \alpha^{(2)}$ і $X' = X$, по-перше, $\alpha_X^{(2)} \in \mathcal{P}(X)$, а значить $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$, і по-друге, $X^{\uparrow}_{\alpha_X^{(2)}}$ — повна підмножина в $(S_{x_1}^{\uparrow})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}}$, а значить $X^{\uparrow}_{\alpha_X}$ — повна підмножина в $S^{\uparrow}_{\alpha}$ (тому що $\alpha_X^{(2)} = \alpha_X$ і $(S_{x_1}^{\uparrow})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}} = S^{\uparrow}_{\alpha}$). А якщо $x_1 \in X$, то $X_{x_1}^{\uparrow}$ є підмножиною $S_{x_1}^{\uparrow}$, а тоді в силу індукційного припущення для $S' = S_{x_1}^{\uparrow}$, $\alpha' = \alpha^{(2)}$ і $X' = X_{x_1}^{\uparrow}$ маємо, що $\alpha_X^{(2)} \in \mathcal{P}(X_{x_1}^{\uparrow})$. І оскільки $\alpha_X = (x_1, \alpha_X^{(2)})$ і x_1 — мінімальний елемент S, то $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$. Далі, у силу того ж індукційного припущення $(X_{x_1}^{\uparrow})^{\uparrow}_{\beta}$ є повною ч. в підмножиною $(S_{x_1}^{\uparrow})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}}$, де $\beta = \alpha^{(2)}_{X_{x_1}^{\uparrow}}$. Тому що $\beta = \alpha_X^{(2)}$, то $(X_{x_1}^{\uparrow})^{\uparrow}_{\beta} = X^{\uparrow}_{\alpha_X}$; крім того, $(S_{x_1}^{\uparrow})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}} = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Отже, $X^{\uparrow}_{\alpha_X}$ — повна ч. в підмножина $S^{\uparrow}_{\alpha}$. $\square$

Тепер вже легко довести теореми 3.1 і 3.2.

Розглянемо спочатку теорему 3.2. Якщо ч. в. множина S (min, max)-еквівалентна WP-критичній множині $\mathcal{K}$, то за лемою 3.6 і наслідком 3.3 форма Тітса $q_S(z)$ не є додатною. Помітимо, що за твердженням 2.12 $\mathcal{K}$ і S min-еквівалентні, а тоді легко бачити, що з леми 3.9 (з врахуванням наслідку 3.3 і леми 3.6) випливає, що кожна власна підмножина $T \subset S$ має додатну форму Тітса; дійсно, у протилежному випадку $\mathcal{K}$ мало б власну підмножину Q (min-еквівалентну T) з недодатною формою Тітса, а це суперечило б тому факту, що множина $\mathcal{K}$ є P-критичною. Отже, S є P-критичною.

Навпаки, якщо S є P-критичною, то за твердженням 3.7 вона (min, max)-еквівалентна (а значить і min-еквівалентна) якійсь ч. в. множині S', яка містить WP-критичну множину $K \cong \mathcal{K}_i$. Але тоді (знов-таки за лемою 3.9 та наслідком 3.3) $S' = K$, тобто у підсумку S min-еквівалентна K.

Переходимо до теореми 3.1. Імплікація 1) $\Rightarrow$ 2) випливає з наслідку 3.3

і того факту, що додатна форма є слабо додатною. Якщо ж виконується 2), то довільна ч. в. множина, яка (min, max)-еквівалентна множині S, не містить WP-критичних підмножин. Отже, в силу твердження 3.7 S має додатно визначену форму Тітса.

3.4. Опис P-критичних ч. в. множин

За теоремою 3.2 будь-яка P-критична ч. в. множина (min, max)-еквівалентна деякій WP-критичній ч. в. множини. Тому одержати всі P-критичні множини можна в такий спосіб: взяти всі WP-критичні множини, які вичерпуються критичними множинами Клейнера, і для кожної з них описати всі (min, max)-еквівалентні їй ч. в. множини (говорячи "всі", ми маємо на увазі "всі з точністю до ізоморфізму"). За твердженням 2.12 замість (min, max)-еквівалентних множин можна розглядати min-еквівалентні, що формально більш зручно.

Переходимо до опису всіх P-критичних ч. в. множин. При цьому ми будемо користуватися нашим алгоритмом із пункту 2.4..

Теорема 3.10. *P-критичні ч. в. множини вичерпуються з точністю до ізоморфізму і антиізоморфізму ч. в. множинами* 1)–75)*, зазначеними у таблиці, яка розміщена в останньому параграфі (цього розділу).*

Перед доведенням теореми зробимо деякі зауваження до таблиці (яка розташована наприкінці розділу).

Зазначена в таблиці ч. в. множина під номером i позначається через C_i. Якщо множина C_i має ширину 2 і в таблиці написано $i = j'$, то це означає, що C_i можна одержати з C_j заміною єдиної її максимальної точки на єдину мінімальну точку; інакше кажучи, $C_j = T \cup a, T < a$, а $C_i = T \cup a, a < T$. Помітимо, що в цьому випадку $C_i \cong (C_j)^{\downarrow\downarrow}_{aa}$. Те ж саме стосується і випадку $i = j'' = (j')'$ (потрібно порівнювати C_i і $C_{j'}$). Якщо множина C_i має ширину 3 і в таблиці написано $i = j'$, то це означає, що сказане вище відноситься вже не до C_i і C_j, а до їхніх зв'язних компонентів (прямих доданків) ширини 2. Помітимо, що і у цьому випадку C_i і C_j (min, max)-еквівалентні: якщо a — максимальний елемент зазначеного компонента ширини 2 (множини C_j), а b — максимальний елемент компонента ширини 1, то $C_i \cong (C_j)^{\downarrow\downarrow}_{ab}$. Те ж саме стосується й випадку $i = j''$.

Довільні ч. в. множини S і T, які утворюються один з одного за допомогою подібних операцій назвемо 0-ізоморфними. І якщо з таблиці викинути множини з номерами $i = j'$ і $i = j''$, то одержимо опис P-критичних множин з точністю до 0-ізоморфізму і дуальності.

Доведення теореми. Доведення проводимо відповідно до зазначеної схеми з пункту 2.4..

Крок I. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в критичних множинах Клейнера $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$. Ними будуть:

для $\mathcal{K}_1$ — $A_{1,1} = \varnothing$, $A_{1,2} = \{1\}$, $A_{1,3} = \{1, 2\}$, $A_{1,4} = \{1, 2, 3\}$;

для $\mathcal{K}_2$ — $A_{2,1} = \varnothing$, $A_{2,2} = \{1\}$, $A_{2,3} = \{1, 2\}$, $A_{2,4} = \{1, 3\}$, $A_{2,5} = \{1, 2, 3\}$, $A_{2,6} = \{1, 3, 5\}$, $A_{2,7} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{2,8} = \{1, 2, 3, 5\}$, $A_{2,9} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

для $\mathcal{K}_3$ — $A_{3,1} = \varnothing$, $A_{3,2} = \{1\}$, $A_{3,3} = \{3\}$, $A_{3,4} = \{2, 3\}$, $A_{3,5} = \{1, 2\}$, $A_{3,6} = \{3, 5\}$, $A_{3,7} = \{2, 3, 4\}$, $A_{3,8} = \{1, 2, 3\}$, $A_{3,9} = \{2, 3, 5\}$, $A_{3,10} = \{1, 2, 5\}$, $A_{3,11} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{3,12} = \{2, 3, 4, 5\}$, $A_{3,13} = \{2, 3, 5, 6\}$, $A_{3,14} = \{1, 2, 3, 5\}$, $A_{3,15} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_{3,16} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_{3,17} = \{2, 3, 5, 6\}$, $A_{3,18} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A_{3,19} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

для $\mathcal{K}_4$ — $A_{4,1} = \varnothing$, $A_{4,2} = \{1\}$, $A_{4,3} = \{2\}$, $A_{4,4} = \{4\}$, $A_{4,5} = \{2, 3\}$, $A_{4,6} = \{4, 5\}$, $A_{4,7} = \{1, 2\}$, $A_{4,8} = \{1, 4\}$, $A_{4,9} = \{2, 4\}$, $A_{4,10} = \{4, 5, 6\}$, $A_{4,11} = \{1, 2, 3\}$, $A_{4,12} = \{1, 4, 5\}$, $A_{4,13} = \{2, 4, 5\}$, $A_{4,14} = \{2, 3, 4\}$, $A_{4,15} = \{1, 2, 4\}$, $A_{4,16} = \{4, 5, 6, 7\}$, $A_{4,17} = \{1, 4, 5, 6\}$, $A_{4,18} = \{2, 4, 5, 6\}$, $A_{4,19} = \{2, 3, 4, 5\}$, $A_{4,20} = \{1, 2, 4, 5\}$, $A_{4,21} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{4,22} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_{4,23} = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $A_{4,24} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $A_{4,25} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_{4,26} =$

$\{1,2,4,\ 5,6\}$, $A_{4,27} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{4,28} = \{1,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,29} = \{2,4,5,\ 6,7,8\}$, $A_{4,30} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{4,31} = \{1,2,4,5,6,7\}$, $A_{4,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{4,33} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,34} = \{1,2,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,35} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$;

для $\mathcal{K}_5$ — $A_{5,1} = \varnothing$, $A_{5,2} = \{1\}$, $A_{5,3} = \{5\}$, $A_{5,4} = \{7\}$, $A_{5,5} = \{1,2\}$, $A_{5,6} = \{5,6\}$, $A_{5,7} = \{1,5\}$, $A_{5,8} = \{1,7\}$, $A_{5,9} = \{5,7\}$, $A_{5,10} = \{1,2,3\}$, $A_{5,11} = \{1,5,6\}$, $A_{5,12} = \{1,2,5\}$, $A_{5,13} = \{1,2,7\}$, $A_{5,14} = \{5,7,8\}$, $A_{5,15} = \{5,6,7\}$, $A_{5,16} = \{1,5,7\}$, $A_{5,17} = \{1,2,3,4\}$, $A_{5,18} = \{1,2,5,6\}$, $A_{5,19} = \{1,2,3,5\}$, $A_{5,20} = \{1,2,3,7\}$, $A_{5,21} = \{5,6,7,8\}$, $A_{5,22} = \{1,5,6,7\}$, $A_{5,23} = \{1,5,7,\ 8\}$, $A_{5,24} = \{1,2,5,7\}$, $A_{5,25} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{5,26} = \{1,2,3,4,7\}$, $A_{5,27} = \{1,2,3,5,6\}$, $A_{5,28} = \{1,2,3,5,7\}$, $A_{5,29} = \{1,2,5,6,7\}$, $A_{5,30} = \{1,2,5,7,8\}$, $A_{5,31} = \{1,5,6,7,8\}$, $A_{5,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{5,33} = \{1,2,3,4,5,7\}$, $A_{5,34} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A_{5,35} = \{1,2,3,5,\ 7,8\}$, $A_{5,36} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $A_{5,37} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A_{5,38} = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $A_{5,39} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

Позначимо через $K_{i,j}$ ч. в. множину $S_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{K}_i$ і $X = A_{i,j}$. Тоді легко переконатися в тому, що $K_{1,1} \cong C_{75}$, $K_{1,2} \cong C_{30}$, $K_{1,3} \cong C_1$, $K_{1,4} \cong C_{30}^{\mathrm{op}}$, $K_{2,1} \cong C_{31}$, $K_{2,2} \cong C_{32}$, $K_{2,3} \cong C_3$, $K_{2,4} \cong C_{33}$, $K_{2,5} \cong C_2$, $K_{2,6} \cong C_{34}$, $K_{2,7} \cong C_3^{\mathrm{op}}$, $K_{2,8} \cong C_{33}^{\mathrm{op}}$, $K_{2,9} \cong C_{32}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,1} \cong C35$, $K_{3,2} \cong C_9$, $K_{3,3} \cong C_{38}$, $K_{3,4} \cong C_{36}$, $K_{3,5} \cong C_8^{\mathrm{op}}$, $K_{3,6} \cong C_{41}$, $K_{3,7} \cong C_5$, $K_{3,8} \cong C_7^{\mathrm{op}}$, $K_{3,9} \cong C_{39}$, $K_{3,10} \cong C_{40}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,11} \cong C_5^{\mathrm{op}}$, $K_{3,12} \cong C_7$, $K_{3,13} \cong C_{40}$, $K_{3,14} \cong C_{39}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,15} \cong C_8$, $K_{3,16} \cong C_{36}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,17} \cong C_{41}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,18} \cong C_9^{\mathrm{op}}$, $K_{3,19} \cong C_{38}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,1} \cong C_{42}$, $K_{4,2} \cong C_{17}$, $K_{4,3} \cong C_{46}$, $K_{4,4} \cong C_{53}$, $K_{4,5} \cong C_{13}$, $K_{4,6} \cong C_{51}$, $K_{4,7} \cong C_{15}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,8} \cong C_{19}$, $K_{4,9} \cong C_{56}$, $K_{4,10} \cong C_{49}$, $K_{4,11} \cong C_{10}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,12} \cong C_{20}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,13} \cong C_{57}$, $K_{4,14} \cong C_{16}$, $K_{4,15} \cong C_{55}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,16} \cong C_{43}$, $K_{4,17} \cong C_{18}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,18} \cong C_{60}$, $K_{4,19} \cong C_{18}$, $K_{4,20} \cong C_{60}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,21} \cong C_{43}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,22} \cong C_{10}$, $K_{4,23} \cong C_{16}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,24} \cong C_{55}$, $K_{4,25} \cong C_{20}$, $K_{4,26} \cong C_{57}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,27} \cong C_{49}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,28} \cong C_{13}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,29} \cong C_{15}$, $K_{4,30} \cong C_{19}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,31} \cong C_{56}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,32} \cong C_{51}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,33} \cong C_{17}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,34} \cong C_{46}^{\mathrm{op}}$, $K_{4,35} \cong C_{53}^{\mathrm{op}}$, $K_{5,1} \cong C_{54}$, $K_{5,2} \cong C_{71}$, $K_{5,3} \cong C_{48}$, $K_{5,4} \cong C_{58}^{\mathrm{op}}$, $K_{5,5} \cong C_{69}$, $K_{5,6} \cong C_{26}$, $K_{5,7} \cong C_{59}$, $K_{5,8} \cong C_{74}$, $K_{5,9} \cong C_{47}^{\mathrm{op}}$, $K_{5,10} \cong C_{67}$, $K_{5,11} \cong C_{28}$, $K_{5,12} \cong C_{61}$, $K_{5,13} \cong C_{73}$

$K_{5,14} \cong C_{25}^{\text{op}}$, $K_{5,15} \cong C_{63}^{\text{op}}$, $K_{5,16} \cong C_{65}^{\text{op}}$, $K_{5,17} \cong C_{21}$, $K_{5,18} \cong C_{29}$, $K_{5,19} \cong C_{62}$, $K_{5,20} \cong C_{72}$, $K_{5,21} \cong C_{21}^{\text{op}}$, $K_{5,22} \cong C_{62}^{\text{op}}$, $K_{5,23} \cong C_{72}^{\text{op}}$, $K_{5,24} \cong C_{66}$, $K_{5,25} \cong C_{63}$, $K_{5,26} \cong C_{25}$, $K_{5,27} \cong C_{28}^{\text{op}}$, $K_{5,28} \cong C_{65}$, $K_{5,29} \cong C_{61}^{\text{op}}$, $K_{5,30} \cong C_{73}^{\text{op}}$, $K_{5,31} \cong C_{67}^{\text{op}}$, $K_{5,32} \cong C_{26}^{\text{op}}$, $K_{5,33} \cong C_{47}$, $K_{5,34} \cong C_{59}^{\text{op}}$, $K_{5,35} \cong C_{74}^{\text{op}}$, $K_{5,36} \cong C_{69}^{\text{op}}$, $K_{5,37} \cong C_{48}^{\text{op}}$, $K_{5,38} \cong C_{58}$, $K_{5,39} \cong C_{71}^{\text{op}}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (Y, X) нижніх власних підмножин в критичних множинах Клейнера $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$, такі, що $X \subseteq Y$ і $X < S \setminus Y$. Ними будуть:

для $\mathcal{K}_2$ — $B_{2,1} = (A_{2,9}, \{5\})$;

для $\mathcal{K}_3$ — $B_{3,1} = (A_{3,16}, \{5\})$, $B_{3,2} = (A_{3,19}, \{5\})$, $B_{3,3} = (A_{3,19}, \{5,6\})$;

для $\mathcal{K}_4$ — $B_{4,1} = (A_{4,21}, \{4\})$, $B_{4,2} = (A_{4,27}, \{4\})$, $B_{4,3} = (A_{4,27}, \{4,5\})$, $B_{4,4} = (A_{4,32}, \{4\})$, $B_{4,5} = (A_{4,32}, \{4,5\})$, $B_{4,6} = (A_{4,32}, \{4,5,6\})$, $B_{4,7} = (A_{4,34}, \{2\})$, $B_{4,8} = (A_{4,35}, \{4\})$, $B_{4,9} = (A_{4,35}, \{4,5\})$, $B_{4,10} = (A_{4,35}, \{4,5,6\})$, $B_{4,11} = (A_{4,35}, \{4,5,6,7\})$;

для $\mathcal{K}_5$ — $B_{5,1} = (A_{5,31}, \{1\})$, $B_{5,2} = (A_{5,33}, \{5\})$, $B_{5,3} = (A_{5,36}, \{1\})$, $B_{5,4} = (A_{5,36}, \{1,2\})$, $B_{5,5} = (A_{5,37}, \{5\})$, $B_{5,6} = (A_{5,37}, \{7\})$, $B_{5,7} = (A_{5,37}, \{5,7\})$, $B_{5,8} = (A_{5,38}, \{5\})$, $B_{5,9} = (A_{5,39}, \{1\})$, $B_{5,10} = (A_{5,39}, \{1,2\})$, $B_{5,11} = (A_{5,39}, \{1,2,3\})$.

Помітимо, що для $\mathcal{K}_1$ таких пар немає.

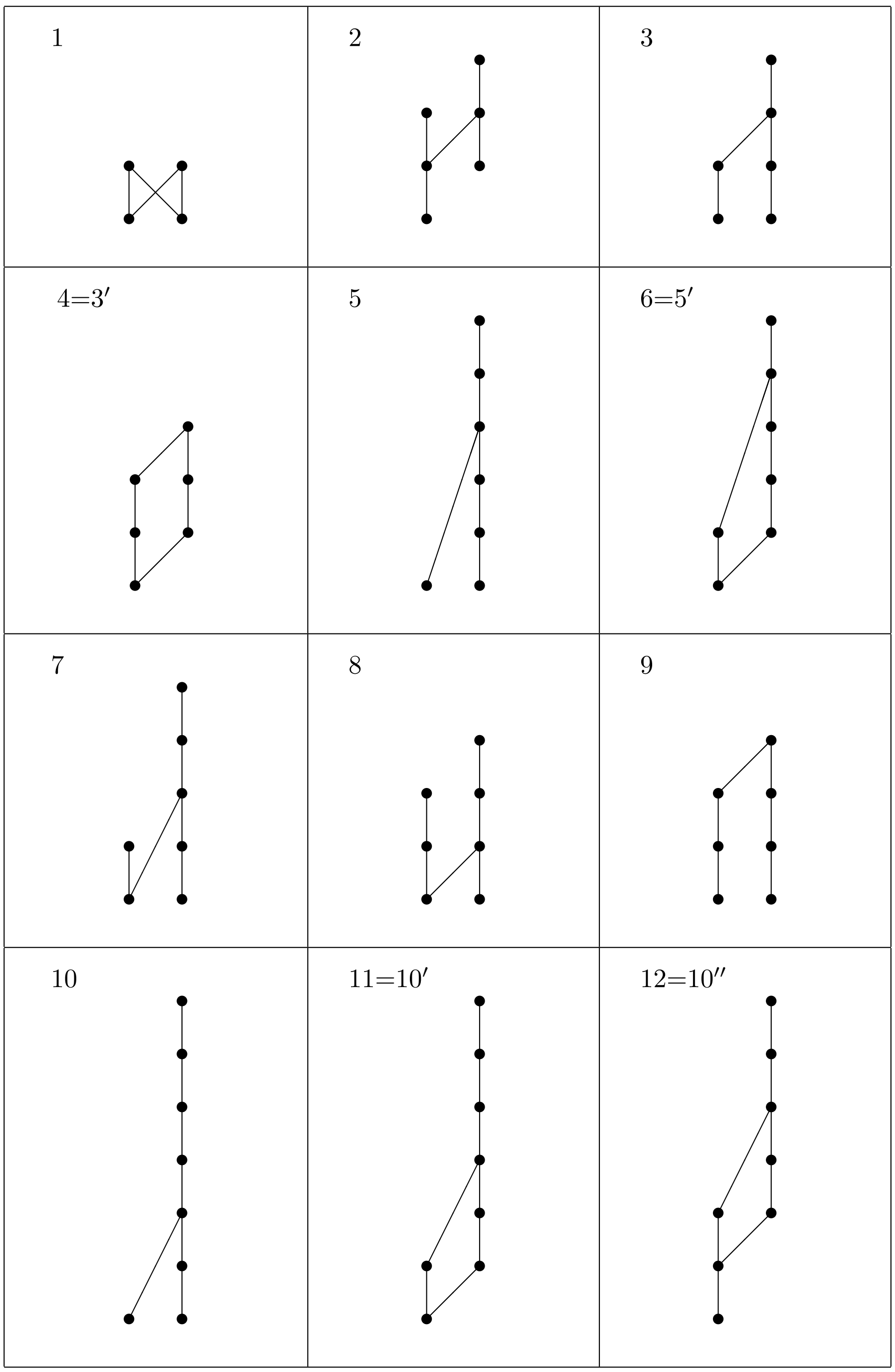
Позначимо через $K'_{i,j}$ ч. в. множину $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{K}_i$ і $(Y, X) = B_{i,j}$; очевидно, $K'_{i,j} = (K_{i,j})_X^{\uparrow}$. Тоді легко переконатися в тому, що $K'_{2,1} \cong C_4$, $K'_{3,1} \cong C_6^{\text{op}}$, $K'_{3,2} \cong C_{37}$, $K'_{3,3} \cong C_6$, $K'_{4,1} \cong C_{11}^{\text{op}}$, $K'_{4,2} \cong C_{44}^{\text{op}}$, $K'_{4,3} \cong C_{12}^{\text{op}}$, $K'_{4,4} \cong C_{50}^{\text{op}}$, $K'_{4,5} \cong C_{45}$, $K'_{4,6} \cong C_{12}$, $K'_{4,7} \cong C_{14}$, $K'_{4,8} \cong C_{52}$, $K'_{4,9} \cong C_{50}$, $K'_{4,10} \cong C_{44}$, $K'_{4,11} \cong C_{11}$, $K'_{5,1} \cong C_{22}^{\text{op}}$, $K'_{5,2} \cong C_{24}$, $K'_{5,3} \cong C_{68}^{\text{op}}$, $K'_{5,4} \cong C_{23}$, $K'_{5,5} \cong C_{64}$, $K'_{5,6} \cong C_{27}^{\text{op}}$, $K'_{5,7} \cong C_{24}^{\text{op}}$, $K'_{5,8} \cong C_{27}$, $K'_{5,9} \cong C_{70}$, $K'_{5,10} \cong C_{68}$, $K'_{5,11} \cong C_{22}$. Помітимо, що для спрощення обчислень можно скористатися рівністю $K'_{i,j} = (K_{i,j})_X^{\uparrow}$ або лемой 2.19.

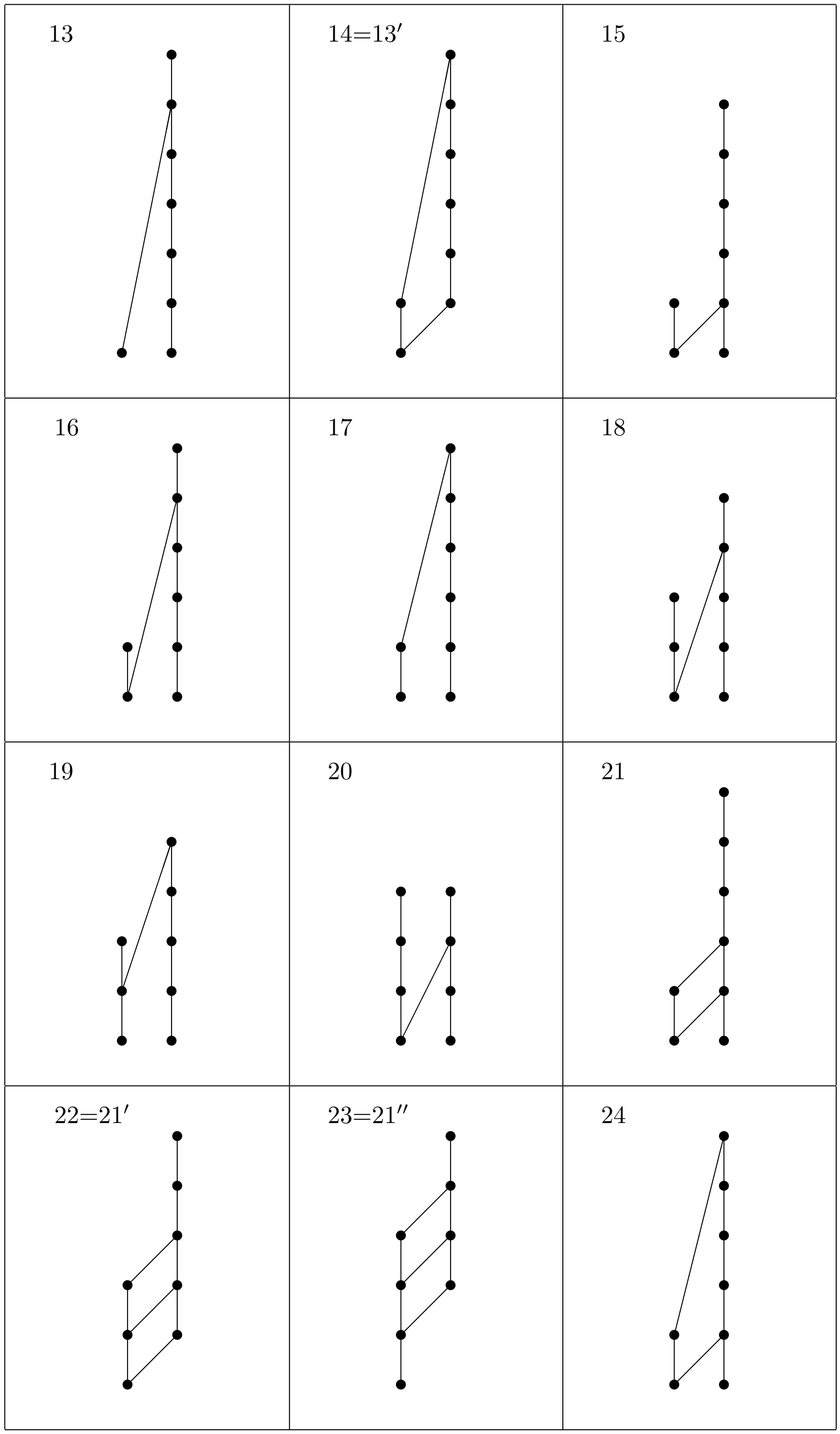
Крок III. Легко бачити, що в I і II кожна із ч. в. множин P_i і P_i^{op}, де $i = 1, 2, \ldots, 75$ зустрічається один раз (при цьому, якщо $P_i^{\text{op}} \cong P_i$, то P_i зустрічається, а P_i^{op} немає). І отже, теорема доведена. $\square$

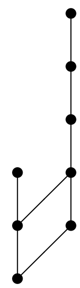
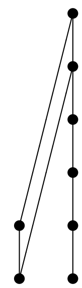
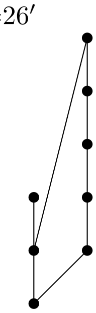
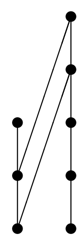
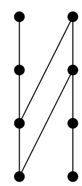
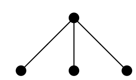
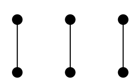
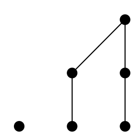
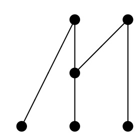
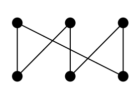
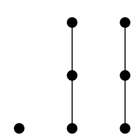
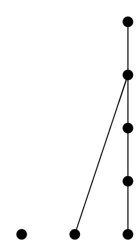
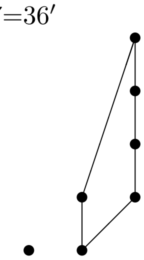
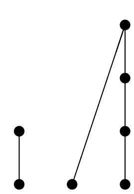
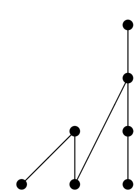
3.5. Таблиця всіх P-критичних частково впорядкованих множин

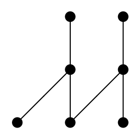
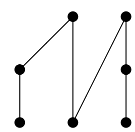
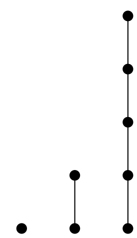
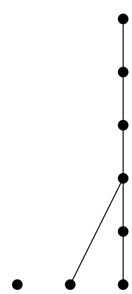
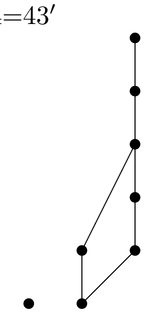
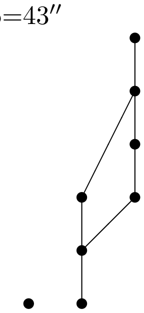
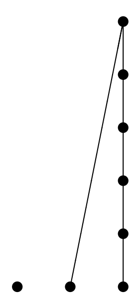
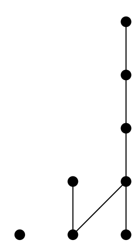
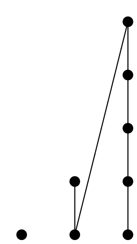
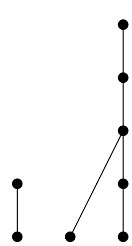
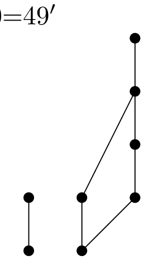
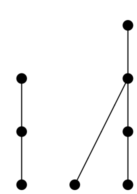
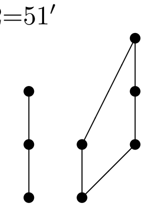
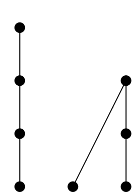
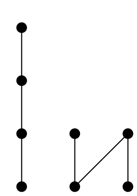
P-критичні множини вказані в таблиці 1 з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму (інші пояснення, що стосуються таблиці, див. у попередньому параграфі після формулювання теореми 3.10).

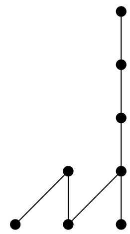
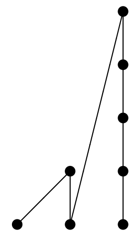
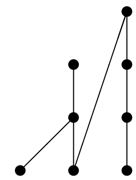
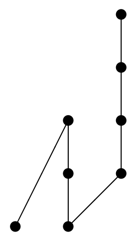
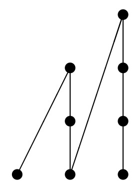
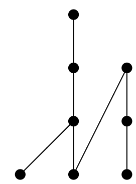
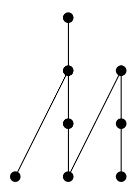
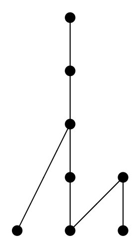
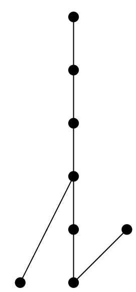
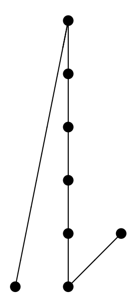
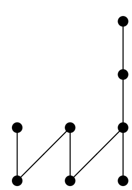
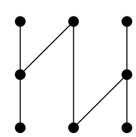
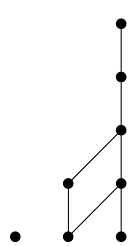
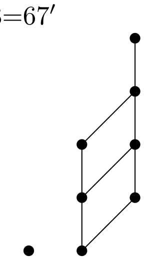
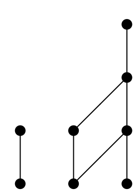
ТАБЛИЦЯ 1

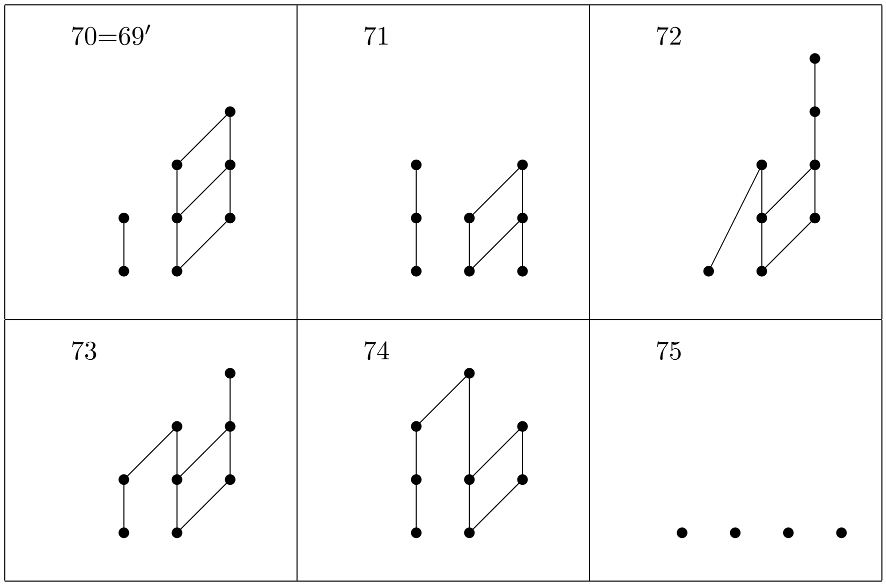



13
14=13′
15
16
17
18
19
20
21
22=21′
23=21″
24

25=24′ 	26 	27=26′ 
28 	29 	30 
31 	32 	33 
34 	35 	36 
37=36′ 	38 	39 

40 	41 	42 
43 	44=43′ 	45=43″ 
46 	47 	48 
49 	50=49′ 	51 
52=51′ 	53 	54 

55 	56 	57 
58 	59 	60 
61 	62 	63 
64 	65 	66 
67 	68=67′ 	69 



3.6. Висновки до розділу

У цьому розділі доведено, що ч. в. множина є P-критичною тоді і лише тоді, коли вона (min, max)-еквівалентна (а значить min-еквівалентна та max-еквівалентна) деякій критичній множині Клейнера. Як наслідок, отримано повний опис P-критичних ч. в. множин; таких множин (з точністю до ізоморфізму та дуальності) 75. Доведено, що форма Тітса ч. в. множини S додатна тоді і лише тоді, коли форма Тітса довільної ч. в. множини, яка (min, max)-еквівалентна S, є слабо додатною.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [49] та [48].

Розділ 4

ОПИС ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН ІЗ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОЮ ФОРМОЮ ТІТСА

4.1. Додаткові властивості квадратичної форми Тітса

Нагададаємо, що $X < Y$ для підмножин X і Y деякої ч. в. множини означає, що $x < y$ для довільних $x \in X, y \in Y$ (зокрема, $X < Y$, якщо X або Y порожня). Для ч. в. множин S і S' ми позначаємо через $[S < S']$ неперетинне об'єднання $S \cup S'$ з найменшим відношенням порядку, яке містить задані відношення на S та S', і таке, що $S < S'$. Очевидно, $[S < \varnothing] = S$ і $[\varnothing < S'] = S'$. Одноелементні множини $\{x\}$ часто ототожнюються із самими елементами x.

Нехай S — ч. в. множина. Елемент S назвемо вузловим, якщо він порівнянний з усіма іншими елементами. Множину всіх вузлових елементів множини S позначимо через S_0; очевидно, S_0 є ланцюгом. Покладемо $S^\circ = S \setminus S_0$. Для $x \in S$, ми позначимо через $N_S(x)$ (або просто через $N(x)$, якщо S фіксоване) підмножину всіх $y \in S$, непорівнянних із x; очевидно, x є вузловим елементом підмножини $S \setminus N_S(x)$. Ми говоримо, що ч. в. множини S і S' 0-*ізоморфні* і пишемо $S \cong_0 S'$, якщо $S \setminus S_0 \cong S' \setminus S'_0$ і $|S_0| = |S'_0|$ ($T \cong T'$ ознаяає звичайний ізоморфізм). Ч. в. множини S і S' назвемо 0-*антиізоморфними*, якщо S^{op} і S' 0-ізоморфні.

Безпосередньо з означення форми Тітса випливає наступна лема.

Лема 4.1. *Нехай S — ч. в. множина, $S^+ = [(S \setminus S_0) < S_0]$ і $S^- = [S_0 < (S \setminus S_0)]$. Тоді форма Тітса для $S^\pm$ довівнює (як многочлен) формі Тітса для S.*

Наступна лема узагальнює попередню (і також випливає з означення форми Тітса).

Лема 4.2. *Форми Тітса 0-ізоморфних або 0-антиізоморфних ч. в. множин є ізоморфними (тобто рівними з точністю до перенумерації змінних).*

Нам знадобиться також наступна лема, яка випливає із твердження 2.3.

Лема 4.3. *Нехай T — ч. в. множина і L — ланцюг. Тоді форми Тітса для ч. в. множин $T \coprod L$ і $[T < L]$ ($[L < T]$) одночасно додатні чи не додатні.*

Дійсно, якщо $L = \{a < b < \ldots < c\}$, то $(T \coprod L)^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{ab\ldots c} = [T < L]$ і $(T \coprod L)^{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{cb\ldots a} = [L < T]$. І залишається лише застосувати твердження 2.3.

4.2. Деякі твердження про односторонні суми

В цьому параграфі ми, говорячи про односторонні чи мінімаксні суми, не виключаємо випадку, коли сума є прямою. Ми користуємося означеннями із останнього параграфа розділу 1.

Нагадаємо, що підмножина X ч. в. множини S називається нижньою (відповідно верхньою), якщо $x \in X$ щораз, коли $x < y$ (відповідно $x > y$) і $y \in X$. Для непорожніх підмножин $X, Y \in S$ ми пишемо $X \lhd Y$, якщо $x < y$ для деяких $x \in X$, $y \in Y$, $X \not\lhd Y$ в іншому разі.

Нагадаємо, що ч. в. множина, зазначена в таблиці 1 під номером i позначається через C_i (див. розділ 3); її форма Тітса не є додатно визначеною. Нам поки що знадобляться множини C_1 і C_2.

Лема 4.4. *Нехай S — ч. в. множина ширини 2, яка не містить підмножини, ізоморфної C_1, і припустимо, що S_0 порожня. Тоді S є односторонньою сумою двох ланцюгів. Якщо до того ж S не містить підмножини, ізоморфної C_2, то вказана сума є напівмінімаксною.*

Лема очевидна, якщо врахувати, що в цьому випадку S має два мінімальних і два максимальних елемента і (як множина ширини 2) є сумою двох ланцюгів.

Для ч. в. множини ширини 2 ми маємо також таке твердження.

Лема 4.5. *Нехай S — ч. в. множина ширини 2, яка не містить підмножини, ізоморфної C_1. Тоді*

a) S_0 є об'єднанням вехньої і нижньої підмножин;

b) S є односторонньою сумою двох ланцюгів.

Доведення. Якби a) не виконувалося, тоді повинні існувати елементи $c \in S_0$ і $a, b, d, e \in S \setminus S_0$, такі, що a і b (відповідно d і e) є непорівнянними і $a < c, b < c, c < d, c < e$; а тоді підмножина $\{a, b, d, e\}$ була б ізоморфна C_1, і ми мали б протиріччя. Далі, згідно попередньої леми $S \setminus S_0$ є односторонньою сумою двох ланцюгів, скажімо A та B, де $B \ntriangleleft A$. Позначимо через S_{01} і S_{02} верхню та нижню "частини" S_0. Тоді S є односторонньою сумою підмножин $S_{01} \cup A = [S_{01} < A]$ і $B \cup S_{02} = [B < S_{02}]$, які є ланцюгами. □

Очевидно, що коли виконується b), то S не містить підмножини, ізоморфної C_1; далі, якщо при цьому вказана сума є напівмінімаксною, тоді S не містить підмножини, ізоморфної C_2. І значить ми маємо наступні наслідки із двох попередніх лем.

Наслідок 4.6. *Ч. в. множина S ширини 2 є односторонньою сумою двох ланцюгів тоді і лише тоді, коли вона не містить підмножини, ізоморфної C_1.*

Наслідок 4.7. *Підмножина S° ч. в. множини S ширини 2 є напівмінімаксною односторонньою сумою двох ланцюгів тоді і лише тоді, коли S° (еквівалентно, S) не містить підмножини, ізоморфної C_1 або C_2.*

4.3. Загальні теореми про (min, max)-еквівалентні частково впорядковані множини з додатно визначеною формою Тітса

Нехай S — ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса. Зафіксуємо в S деякий максимальний елемент a. Тоді в $S' = S^{\uparrow}_{\{a\}^<}$ елемент a є як максимальним, так і мінімальним, а значить $S' = \{a\} \coprod (S' \setminus a)$. Покладемо $B = S' \setminus a$. Оскільки згідно леми 3.6 випадок $w(B) \geq 3$ неможливий (бо в противному випадку S' містить критичну множину Клейнера $\mathcal{K}_1$), то $w(B) \leq 2$, і маємо, що $T = S^{\uparrow}_{\{a\}^\leq} = (S')^{\uparrow}_a$ — ч. в. множина ширини $w(T) \leq 2$.

Отже, ми довели наступну теорему.

Теорема 4.8. *Довільна ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса* (min, max)*-еквівалентна ч. в. множині ширини $w \leqslant 2$.*

Зіставимо ч. в. множині S (незорієнтований) граф $\overline{S}$ з множиною вершин S і ребрами $x - y$, де x і $y > x$ є сусідніми (тобто не існує z, такого, що $y > z > x$). S назвемо ч. в. множиною без циклів, якщо таким є граф $\overline{S}$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.9. *Довільна ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса* (min, max)*-еквівалентна ч. в. множині без циклів.*

Переходимо до доведення теореми.

Із доведення теореми 4.8 випливає, що існує ч. в. множина T, для якої виконані наступні умови:

1) $T \cong_{(\min,\max)} S$;

2) $T = A \coprod B$, де $w(A) = 1$;

3) не існує T', A' і B', таких, що виконані умови 1), 2) і $|A'| > |A|$.

Зауважимо, що оскільки за умовою теореми форма Тітса $q_S(z)$ додатно визначена, то такою ж є форма $q_T(z)$, а значить і форма $q_B(z)$.

Якщо $B = \varnothing$, то $w(T) = 1$ і твердження теореми очевидне. Будемо тепер вважати, що $B \neq \varnothing$. Покажемо спочатку, що B не містить вузлових точок. Допустимо протилежне. Тоді згідно твердження а) леми 4.5 вузловою є або мінімальна точка B, або максимальна точка B; позначимо цю точку через x і покладемо в першому випадку $T' = T_x^{\uparrow}$ та $T' = T_x^{\downarrow}$ в другому випадку. і оскільки $T' = (B \setminus \{x\}) \coprod (A \cup \{a\})$, де $A \cup \{a\}$ — ланцюг, то $T', B' = B \setminus \{x\}$ і $A' = A \cup \{a\}$ задовольняють умовам 1) та 2) і при цьому $|A'| > |A|$, а це протирічить вибору T. Значить $w(B) = 2$ (випадок $w(B) \geq 3$ неможливий, бо тоді $w(T) \geq 4$ і форма Тітса S не є додатною).

Згідно леми 4.4 S є односторонньою мінімаксною сумою двох ланцюгів. Якщо B є прямою сумою двох підмножин ширини 1, то твердження теореми очевидне. В іншому разі можливі (з точністю до ізоморфізму) лише такі два випадки: 1) $B = \{x_1 < x_2 \ldots < x_p, y_1 < y_2 \ldots < y_q, x_i < y_j\}$, де або $i = 1, j > 1$, або $i < p, j = q$; 2) $B = \{x_1 < x_2 \ldots < x_p, y_1 < y_2 \ldots < y_q, x_1 < y_j, x_i < y_q\}$, де $1 < i < p$, $1 < j < q$. І в першому випадку циклів не має сама ч. в. множина T, а в другому — ч. в. множина $T_{x_1}^{\uparrow}$. Теорему доведено.

4.4. Серійні частково впорядковані множини з додатно визначеною формою Тітса

Скінченну чи нескінченну ч. в. множину S із додатно визначеною формою Тітса називатимемо *серійною*, якшо для будь-якого натурального m існує ч. в. множина T, така, що

а) S є підмножиною T;

б) $|T \setminus S| = m$;

в) форма Тітса множини T додатно визначена.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.10. *Ч. в. множина S з додатно визначеною формою Тітса є серійною тоді і лише тоді, коли виконана одна із таких умов:*

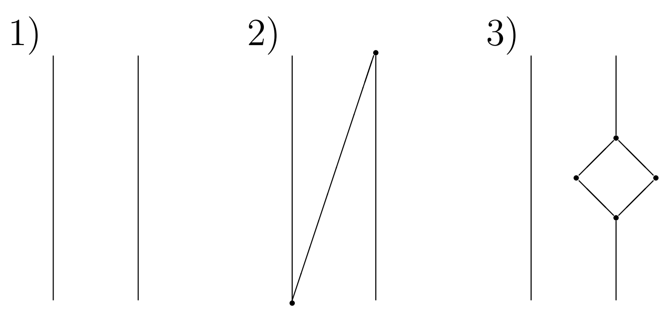
1) S *— пряма сума двох ланцюгів;*

2) S *— одностороння мінімаксна сума двох ланцюгів;*

3) S *— пряма сума ланцюга і майже ланцюга.*

Зауважимо, що в умовах 1) і 3) ланцюги можуть бути порожніми.

Геометрично умови 1) – 3) мають такий вигляд:



(тут вертикальні лінії є ланцюгами, а похилі відрізки не містять проміжних точок).

Ця теорема випливає по суті із результатів роботи [29]. А саме, згідно основної теореми цієї роботи нескінченна ч. в. множина має додатно визначену форму Тітса тоді і лише тоді, коли вона має вигляд 1), 2) або 3); це означає, що теорема 4.10 справедлива для нескінченних ч. в. множин.

Безпосередньо із доведення теореми із роботи [29] випливає, що існує деяке натуральне число N, таке, що будь-яка скінченна ч. в. множина порядку більшого за N із додатно визначеною формою Тітса має вигляд 1), 2) або 3) (див. коментар до теореми 1.6 в останньому параграфі першого розділу). Звідси випливає теорема 4.10 для скінченних ч. в. множин.

Якщо користуватися теоремою 4.10, то легко побачити, що ч. в. множина порядку $n \leq 7$ з додатно визначеною формою Тітса може не бути серійною. Наприклад, не є серійною ч. в. множина (порядку 5) $T = \{a, b_1, b_2, c_1, c_2 \,|\, b_1 < b_2, c_1 < c_2\}$.

4.5. Частково впорядковані множини ширини ≤ 2 і порядку < 8 з додатно визначеною формою Тітса

Легко показати, що частково впорядковані множини ширини ≤ 1 мають додатно визначену форму Тітса (див., наприклад, [29]). Тому надалі (в цьому параграфі) ми будемо розглядати лише ч. в. множини ширини 2.

Згідно теореми 4.10 ч. в. множина S ширини 2 з додатно визначеною формою Тітса є серійною тоді і лише тоді, коли S — пряма сума двох ланцюгів, або одностороння мінімаксна сума двох ланцюгів, або майже ланцюг.

Позначимо через $\langle m \rangle_i$ ланцюг $\{1{+}i < 2{+}i < \cdots < m{+}i\}$ (для $m, i \geqslant 0$) і покладемо $\langle m \rangle = \langle m \rangle_0$, $\langle m, n \rangle_i = \langle m \rangle_i \coprod \langle n \rangle_{m+i}$. Далі, для не порожніх ланцюгів L і L' позначимо через $L \nearrow L'$ їх праву мінімаксну суму (що не є прямою сумою), і для довільних ч. в. множин X, Y і Z покладемо

$[X < Y < Z] = [[X < Y] < Z]$. Нарешті, покладемо $D_{ij} = \langle i, j\rangle_0$, $M_{ij} = \langle i\rangle \nearrow \langle j\rangle_i$ і $Q_{ij} = [\langle i\rangle < \langle 1, 1\rangle_i < \langle j\rangle_{i+2}]$.

Легко бачити, що ч. в. множина ширини 2 і порядку < 8 є серійною тоді і лише тоді, коли вона ізоморфна одній із наступних ч. в. множин: D_{ij} для $i, j \geqslant 0$ і $i + j < 8$, або M_{ij} для $i, j > 0$ і $2 < i + j < 8$, або Q_{ij} для $i, j \geqslant 0$ і $i + j < 6$.

У цьому параграфі ми опишемо не серійні ч. в. множини ширини 2 і порядку < 8 з додатно визначеною формою Тітса. При цьому із леми 4.2 випливає, що це достатньо робити з точністю до 0-ізоморфізму і дуальності; той факт, що ч. в. множини X і Y є 0-ізоморфними, ми записуватимемо — $X \cong_0 Y$,

Такі ч. в. множини описує наступна теорема.

Теорема 4.11. *Нехай S — не серійна ч. в. множина ширини 2 і порядку < 8. Тоді форма Тітса для S є додатно визначеною тоді і лише тоді, коли S_0 є об'єднанням верхньої та нижньої підмножин і S 0-ізоморфна або 0-антиізоморфна одній з наступних ч. в. множин (яка складаєтьса із елементів $1, \ldots, n$ і є правою сумою ланцюгів $\{1 \prec \ldots \prec i\}$ та $\{i + 1 \prec \ldots \prec n\}$, де $i \leqslant n/2$) :*

A) (*порядку* 5)

$$R_1 = \{2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 1 \prec 4\},$$
$$R_2 = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5\},$$
$$R_3 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 1 \prec 4\},$$
$$R_4 = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 1 \prec 4\};$$

B) (*порядку* 6)

$$
\begin{aligned}
R_5 &= \{2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 5\},\\
R_6 &= \{2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 4\},\\
R_7 &= \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6\},\\
R_8 &= \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 5\},\\
R_9 &= \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 4\},\\
R_{10} &= \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 5\},\\
R_{11} &= \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 4\},\\
R_{12} &= \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 4\},\\
R_{13} &= \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 6\},\\
R_{14} &= \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 5, 2 \prec 6\},
\end{aligned}
$$

C) (*порядку* 7)

$$
\begin{aligned}
R_{15} &= \{2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 6\},\\
R_{16} &= \{2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 4\},\\
R_{17} &= \{1 \prec 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\},\\
R_{18} &= \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 6\},\\
R_{19} &= \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 4\},\\
R_{20} &= \{1 \prec 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 6\},\\
R_{21} &= \{1 \prec 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 5\},\\
R_{22} &= \{1 \prec 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 4\},\\
R_{23} &= \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 4\},\\
R_{24} &= \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 4\},\\
R_{25} &= \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 7\},\\
R_{26} &= \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 6\},\\
R_{27} &= \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 6, 2 \prec 7\},\\
R_{28} &= \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 5, 2 \prec 7\},\\
R_{29} &= \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 6\},\\
R_{30} &= \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 5, 2 \prec 6\}.
\end{aligned}
$$

Необхідність випливає із наступного твердження.

Твердження 4.12. *Нехай S — ч. в. множина ширини 2 і порядку < 8, яка не містить в собі підмножини 0-ізоморфної C_1, C_2 або C_3 (див. таблицю 1 у попередньому разділі). Тоді S 0-ізоморфна або 0-антиізоморфна одній з наступних ч. в. множин: D_{ij} для $j \geqslant i \geqslant 0$ і $i + j < 8$, M_{ij} для $j \geqslant i > 0$ і $2 < i + j < 8$, Q_{0j} для $0 \leqslant j < 6$, R_i для $i = 1, 2, \dots, 30$, C_i для $i = 5, 7, 8, 9$.*

Зауважимо, що кожна з ч. в. множин D_{ij}, M_{ij}, Q_{ij}, R_{ij} і C_i $(i \neq 1)$ є правою сумою ланцюгів $\{1 \prec \dots \prec i\}$ і $\{i + 1 \prec \dots \prec n\}$. Твердження 4.12 можна довести перебором, з точністю до 0-ізоморфізму, всіх правих сум S двох ланцюгів у випадку, коли $n = |S| < 8$ (див. лему 4.5).

Назвемо пару елементів (x, y) сусідньою, якщо x, y належать різним ланцюгам множини S, $x < y$, не існує елемента $z \neq x, y$ такого, що $x < z < y$. Кількість сусідніх пар позначимо r.

Тоді для $n = m = 1$ умові твердження задовільняє лише один випадок D_{11}.

Для $n = 1, m = 2$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{12}, при $r = 1$ - M_{12}.

Для $n = 1, m = 3$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{13}, при $r = 1$ - M_{13}, Q_{02}.

Для $n = 1, m = 4$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{14}, при $r = 1$ - M_{14}, R_1, Q_{03}.

Для $n = 1, m = 5$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{15}, при $r = 1$ - M_{15}, R_5, R_6, Q_{04}.

Для $n = 1, m = 6$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{16}, при $r = 1$ - $M_{16}, R_{15}, R_{16}, C_5, Q_{05}$.

Для $n = 2, m = 2$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{22}, при $r = 1$ - M_{22}.

Для $n = 2, m = 3$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{23}, при $r = 1$ - M_{23}, R_2, R_3, при $r = 2$ - R_4.

Для $n = 2, m = 4$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{24}, при $r = 1$ - M_{24}, R_7, R_8, R_9, при $r = 2$ - R_{10}, R_{11}, R_{12}.

Для $n = 2, m = 5$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{25}, при $r = 1$ - $M_{25}, R_{17}, R_{18}, R_{19}, C_7$, при $r = 2$ - $R_{20}, R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}$.

Для $n = 3, m = 3$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{33}, при $r = 1$ - M_{33}, R_7, R_{13}, при $r = 2$ - R_{14}. Зауважимо, що множина $\{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 5\} \cong_0 R_{11}^{op}$, а множина $\{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 5\} \cong_0 R_{10}^{op}$.

Для $n = 3, m = 4$ можливі такі випадки: при $r = 0$ - D_{34}, при $r = 1$ - $M_{34}, R_{25}, R_{26}, C_8, C_9$, при $r = 2$ - R_{27}, R_{28}, R_{29}, при $r = 3$ - R_{30}. Зауважимо, що множина $\{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 5\} \cong_0 R_{23}^{op}$.

Щоб довести достатність теореми 4.11, треба показати, що ч. в. множини R_1–R_{30} мають додатну форму Тітса. Оскільки кожна множина R_j порядку 5 або 6 і підмножиною деякого R_i порядку 7, це достатньо розглянути лише для множин порядку 7, тобто $R_{15}, R_{16}, \dots, R_{30}$.

Ми маємо наступні рівності: $(R_{15})_2^{\uparrow} \cong R_{18}$, $(R_{18})_3^{\uparrow} \cong R_{26}$, $(R_{26})_4^{\uparrow} \cong R_{25}^{\mathrm{op}}$, $(R_{25})_3^{\downarrow} \cong R_{17}$, $(R_{17})_1^{\uparrow} \cong R_{19}^{\mathrm{op}}$ і $(R_{19})_2^{\downarrow} \cong R_{16}$; $(R_{24})_3^{\uparrow} \cong_0 R_{22}$, $(R_{22})_3^{\uparrow} \cong_0 R_{20}$ і $(R_{20})_3^{\uparrow} \cong R_{27}$; $(R_{23})_3^{\uparrow} \cong_0 R_{21}$, $(R_{21})_3^{\uparrow} \cong R_{28}$ і $(R_{28})_4^{\uparrow} \cong_0 R_{29}$.

Таким чином, кожна із множин $\mathcal{S}_1 = \{R_i \,|\, i = 15, 16, 17, 18, 19, 25, 26\}$, $\mathcal{S}_2 = \{R_i \,|\, i = 20, 22, 24, 27\}$ і $\mathcal{S}_3 = \{R_i \,|\, i = 21, 23, 28, 29\}$ складається із попарно 0-ізоморфних або 0-антиізоморфних ч. в. множин і тому достатньо показати (згідно леми 4.2), що R_{30} і, наприклад, R_{15}, R_{23} та R_{24} мають додатну форму Тітса. А це випливає із наступних рівностей:

$q_{R_{15}} = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_1x_6+x_1x_7+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_2x_6+x_2x_7+x_3x_4+x_3x_5+x_3x_6+x_3x_7+x_4x_5+x_4x_6+x_4x_7+x_5x_6+x_5x_7+x_6x_7-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) = (x_1+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7-\frac{1}{2}x_0)^2+(x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_3+\frac{1}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5+\frac{1}{3}x_6+\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{2}{3}(x_4+\frac{1}{4}x_5+\frac{1}{4}x_6+\frac{1}{4}x_7-\frac{1}{4}x_0)^2+\frac{5}{8}(x_5+\frac{1}{5}x_6+\frac{1}{5}x_7-\frac{1}{5}x_0)^2+\frac{7}{20}(x_6-\frac{3}{7}x_7+\frac{3}{7}x_0)^2+\frac{2}{7}(x_7+\frac{3}{4}x_0)^2+\frac{1}{8}x_0^2$

$q_{R_{23}} = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_1x_2+x_1x_4+x_1x_5+x_1x_6+x_1x_7+x_2x_6+x_2x_7+x_3x_4+x_3x_5+x_3x_6+x_3x_7+x_4x_5+x_4x_6+x_4x_7+x_5x_6+$

$x_5x_7+x_6x_7-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)=(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_2-\frac{1}{3}x_4-\frac{1}{3}x_5+\frac{1}{3}x_6+\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{3}x_0)^2+(x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{5}{12}(x_4-\frac{1}{5}x_5+\frac{1}{5}x_6+\frac{1}{5}x_7-\frac{1}{5}x_0)^2+\frac{2}{5}(x_5+\frac{1}{4}x_6+\frac{1}{4}x_7-\frac{1}{4}x_0)^2+\frac{3}{8}(x_6-\frac{1}{3}x_7+\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{1}{3}(x_7+\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{1}{4}x_0^2$

$q_{R_{24}}=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_1x_2+x_1x_4+x_1x_5+x_1x_6+x_1x_7+x_2x_5+x_2x_6+x_2x_7+x_3x_4+x_3x_5+x_3x_6+x_3x_7+x_4x_5+x_4x_6+x_4x_7+x_5x_6+x_5x_7+x_6x_7-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)=(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_2-\frac{1}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5+\frac{1}{3}x_6+\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{3}x_0)^2+(x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{5}{12}(x_4+\frac{1}{5}x_5+\frac{1}{5}x_6+\frac{1}{5}x_7-\frac{1}{5}x_0)^2+\frac{2}{5}(x_5-\frac{1}{4}x_6-\frac{1}{4}x_7+\frac{1}{4}x_0)^2+\frac{3}{8}(x_6-\frac{1}{3}x_7+\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{1}{3}(x_7+\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{1}{4}x_0^2$

$q_{R_{30}}=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_5+x_1x_6+x_1x_7+x_2x_3+x_2x_6+x_2x_7+x_3x_7+x_4x_5+x_4x_6+x_4x_7+x_5x_6+x_5x_7+x_6x_7-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)=(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_5+\frac{1}{3}x_6+\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{2}{3}(x_3-\frac{1}{4}x_5-\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{4}x_7-\frac{1}{4}x_0)^2+(x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{8}(x_5+\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{1}{4}x_6^2+\frac{1}{3}(x_7+\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{1}{4}x_0^2$

Теорема 4.11 доведена.

Доведену теорему можна переформулювати наступним чином.

Теорема 4.13. *Ч. в. множина S ширини 2 і порядку < 8 має додатно визначену форму Тітса тоді і лише тоді, коли вона ізоморфна або антиізоморфна одній із зазначених в таблиці 2 ч. в. множин 1–45.*

Зауважимо, що таблиця 2 розташована в останньому параграфі цього розділу; запис $i = j'$ або $i = j''$ в цій таблиці означає те ж саме, що і в таблиці 1 (див. коментарі до таблиці 1 у попередньому розділі).

4.6. Частково впорядковані множини ширини ≤ 2 і порядку 8 з додатно визначеною формою Тітса

У цьому параграфі ми доведемо наступну теорему.

Теорема 4.14. *Довільна ч. в. множина ширини ≤ 2 і порядку 8 з додатно визначеною формою Тітса є серійною.*

Як ми вже говорили в попередньому параграфі, частково впорядковані множини ширини ≤ 1 мають додатно визначену форму Тітса [29]. Тому надалі (в цьому параграфі) ми будемо розглядати лише ч. в. множини ширини 2.

Серійні множини описує теорема 4.10. Надалі під умовами 1) – 3) ми будемо розуміти саме умови цієї теореми. При цьому в умові 3) ланцюг треба вважати порожнім (бо ми розглядаємо лише ч. в. множини ширини 2), тобто маємо майже ланцюг.

Нехай S — ч. в. множина ширини 2 і порядку 8 з додатно визначеною формою Тітса. Доведення теореми 4.14 залежить від числа $s = |S_0|$ (чим менше s, тим більш складне доведення).

Із леми 4.1 і факту, що ч. в. множина, 0-ізоморфна деякому майже лагцюгу, є також майже ланцюгом, випливає, що підмножину S_0 можна вважати верхньою. Зауважимо, що із $w(S) = 2$ маємо $s \neq 7, 8$.

Доведемо спочатку, що коли $s = 6, 5, 4, 3, 2$, то S задовольняє умові 2), тобто є майже ланцюгом.

Нам будуть потрібні P-критичні частково впорядковані множини ширини 2, які в таблиці 1 є основними, тобто ті, що занумеровані натуральним числом (а не i' чи i”). Позначимо $T_1 = C_1$, $T_2 = C_2$, $T_3 = C_3$, $T_4 = C_5$, $T_5 = C_7$, $T_6 = C_8$, $T_7 = C_9$, $T_8 = C_{13}$, $T_9 = C_{10}$, $T_{10} = C_{17}$, $T_{11} = C_{24}$, $T_{12} = C_{26}$, $T_{13} = C_{21}$, $T_{14} = C_{16}$, $T_{15} = C_{15}$, $T_{16} = C_{19}$, $T_{17} = C_{18}$, $T_{18} = C_{28}$, $T_{19} = C_{20}$, $T_{20} = C_{29}$ (T_i із статті [46]).

Згідно твердження 4.12 можуть бути (з точністю до ізоморфізму і дуальності) наступні можливості для ч. в. множини S° порядку $8 - s$: у випадку $s = 6$, $S_1^\circ = D_{11}$; у випадку $s = 5$, $S_1^\circ = D_{12}$; у випадку $s = 4$, $S_1^\circ = D_{13}$, $S_2^\circ = D_{22}$, $S_3^\circ = M_{22}$; у випадку $s = 3$, $S_1^\circ = D_{14}$, $S_2^\circ = D_{23}$, $S_3^\circ = M_{23}$, $S_4^\circ = R_3$; у випадку $s = 2$, $S_1^\circ = D_{15}$, $S_2^\circ = D_{24}$, $S_3^\circ = D_{33}$,

$S_4^\circ = M_{24}$, $S_5^\circ = M_{33}$, $S_6^\circ = R_8$, $S_7^\circ = R_9$, $S_8^\circ = R_{13}$, $S_9^\circ = R_{14}$.

Зауважимо, що оскільки ч. в. множини T_i $(i = 1, 2, \dots, 20)$ розглядаються з точністю до 0-ізоморфізму і 0-антиізоморфізму, то S° можна описувати з точністю до ізоморфізму і дуальності; при цьому ми не розглядаємо ті S°, які містять підмножину, що 0-ізоморфна або 0-антиізоморфна деякому T_i).

Розглянемо кожний із випадків.

У випадку $s = 6$, $S^\circ \cong S_1^\circ$ і тому S є майже ланцюгом. Випадки $s = 5, 4, 3, 2$ неможливі, оскільки для кожного s всі ч. в. множини $S_{si} = [S_i^\circ < L_s]$, де S_i° пробігає вказані вище множини, а $L_s = \{8 - s + 1 \prec 8 - s + 2 \prec \dots \prec 8\}$ є ланцюгом порядку s, містить (власну чи не власну) підмножину, ізоморфну деякому T_j: для $(s, i) = (4, 2), (3, 2), (3, 3)$, $(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)$, $(2, 6), (2, 8)$, $(2, 9)$ S_{si} містить підмножину $T \cong T_3$; для $(s, i) = (4, 1), (3, 1), (3, 4)$ S_{si} містить підмножину $T \cong T_4$; для $(s, i) = (5, 1)$, $(4, 3)$, $(2, 1)$ маємо відповідно: $S_{si} \cong T_9, T_{13}, T_8$; для $(s, i) = (2, 7)$ S_{si} містить підмножину $T \cong_0 T_4$ $(T = S_{si} \setminus \{3\})$.

Тепер ми доведемо, що якщо $s = 1$, то S задовольняє умову 2), причому один із ланцюгів складається із одного елемента.

Згідно твердження 4.12 у цьому випадку можуть бути наступні можливості для ч. в. множини S° порядку 7: $S_1^\circ = D_{16}$, $S_2^\circ = D_{25}$, $S_3^\circ = D_{34}$, $S_4^\circ = M_{25}$, $S_5^\circ = M_{34}$, $S_6^\circ = R_{18}$, $S_7^\circ = R_{19}$, $S_8^\circ = R_{25}$, $S_9^\circ = R_{26}$, $S_{10}^\circ = R_{27}$, $S_{11}^\circ = R_{28}$.

У випалку $S^\circ = S_1^\circ$ ч. в. множина S задовольняє умову 2), де один із ланцюгів складається із одного елемента. Усі інші випадки неможливі, оскільки кожна множина $S_i = [S_i^\circ < L_1]$, де $L_1 = \{8\}$ є одноелементною множиною і $i = 2, 3, \dots, 11$, містить (власну чи ні) підмножину, яка 0-ізоморфна деякому $T = T_j$ $(j = 1, 2, \dots, 20)$: для $i = 3, 5, 8$ S_i містить підмножину $T \cong T_7$; для $i = 6$ S_i містить підмножину $T \cong T_4$; для $i = 2, 4, 7$ $S_i \cong T_{10}, T_{12}, T_{11}$ відповідно; для $i = 9, 10, 11$, S_i містить підмножину

$T \cong_0 T_3$ ($T = S_9 \setminus \{4, 5\}, S_{10} \setminus \{3, 6\}, S_{11} \setminus \{4, 7\}$, відповідно).

Нарешті ми доведемо, що якщо $s = 0$, то S задовольняє умову 1) або 2).

Нам знадобиться наступне твердження, яке є аналогом твердження 4.12 на випадок ч. в. множин порядку 8 без вузлових елементів.

Твердження 4.15. *Нехай S — ч. в. множина ширини 2 і порядку 8, яка не містить підмножини, ізоморфної ч. в. множині T_1 або T_2, і нехай S не має вузлових елементів.*

Тоді S ізоморфне або антиізоморфне одному із наступних ч. в. множин:

$$S_1 = D_{17},\ S_2 = D_{26},\ S_3 = D_{35},\ S_4 = D_{44},$$
$$S_5 = M_{26},\ S_6 = M_{35},\ S_7 = M_{44},$$
$$S_8 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6\},$$
$$S_9 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5\},$$
$$S_{10} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6\},$$
$$S_{11} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5\},$$
$$S_{12} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 2 \prec 8\},$$
$$S_{13} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5, 2 \prec 8\},$$
$$S_{14} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 8\},$$
$$S_{15} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 2 \prec 8\},$$
$$S_{16} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 3 \prec 8\},$$
$$S_{17} = T_{14},\ S_{18} = T_{15},\ S_{19} = T_{16},\ S_{20} = T_{17},$$
$$S_{21} = T_{18},\ S_{22} = T_{19},\ S_{23} = T_{20}.$$

Твердження можна довести перебором, з точністю до ізоморфізму, всіх напівмінімаксних правих сум (без вузлових елементів) S двох ланцюгів у випадку, коли $n = |S| = 8$ (див. лему 4.4). Це можна зробити аналогічно розглянутому вище доведенню твердження 4.12.

Таким чином, для доведення теореми 4.14 ми повинні розглянути випадки, коли $S = S_i$, $i = 1, 2, \ldots, 16$.

Ч. в. множина S задовольняє умову 1) у випадках $S = S_1, S_2, S_3, S_4$ і умову 2) у випадках $S = S_5, S_6, S_7$. Усі інші випадки неможливі, оскільки кожна ч. в. множина S_i, $i = 8, 9, \ldots, 16$, містить (власну) підмножину, 0-ізоморфну (в дійсності ізоморфну, якщо $i \neq 16$) ч. в. множині $T = T_{p(i)}$. А саме, треба покласти $p(i) = 4$ для $i = 8$, $p(i) = 5$ для $i = 9, 10, 12$, $p(i) = 6$ для $i = 11, 13, 15$, $p(i) = 7$ для $i = 14$ і $p(i) = 3$ для $i = 16$ (в останньому випадку $T = S \setminus \{4, 5\}$).

Теорема 4.14 доведена.

4.7. Частково впорядковані множини ширини 3 і порядку < 8 з додатно визначеною формою Тітса

У цьому параграфі ми доведемо наступну теорему.

Теорема 4.16. *Ч. в. множина S ширини 3 і порядку < 8 має додатно визначену форму Тітса тоді і лише тоді, коли вона ізоморфна або антиізоморфна одній із зазначених в таблиці 2 ч. в. множин 46–108.*

Таблиця 2 розташована в останньому параграфі цього розділу. Запис $i = j'$ або $i = j''$ в цій таблиці означає те ж саме, що і в таблиці 1 (див. коментарі до таблиці 1 у попередньому розділі).

Ч. в. множину, зазначену в таблиці 2 під номером i, будемо позначати через P_i. Його точки будемо нумерувати числами $1, 2, \ldots, |P_i|$ таким чином, що якщо частковий порядок на ньому позначити символом $\prec$, то $i < j$ щоразу, коли $i \prec j$ або i перебуває (на малюнку) лівіше j.

Переходимо до доведення теореми 4.16.

Нехай S — ч. в. множина ширини 3 з додатно визначеною формою Тітса. Зафіксуємо в S деякий максимальний елемент a. Тоді в $S^{\uparrow}_{\{a\}^<}$ елемент a є як максимальним, так і мінімальним, а значить $S' = \{a\} \coprod (S' \setminus a)$. Покладемо $B = S' \setminus a$. Оскільки випадок $w(B) \geq$

3 неможливий (тому що в противному випадку S' містить критичну множину Клейнера $\mathcal{K}_1$), то $w(B) \leq 2$, і виходить, ч. в. множина $T = S^{\uparrow}_{\{a\}^{\leq}} = (S')^{\uparrow}_{\{a\}}$ має ширину $w(T) \leq 2$; більш того, оскільки $w(S) = 3$, то $w(T) = 2$ (оскільки довільна ч. в. множина, (min, max)-еквівалентна множині ширини 1, також має ширину 1). Отже, описати всі (з точністю до ізоморфізму) ч. в. множини ширини 3 з додатною формою Тітса можна в такий спосіб: спочатку описати такі ч. в. множини ширини $w = 2$, а потім для кожної з них описати всі (min, max)-еквівалентні їй ч. в. множини ширини 3. За твердженням 2.12 замість (min, max)-еквівалентних множин можна розглядати min-еквівалентні, що ми часто й будемо робити.

Ч. в. множини ширини 2 з додатною формою Тітса описані в параграфі 4.5. (див. теорему 4.13). Оскільки наведені в таблиці 2 ч. в. множини ширини 2 вичерпуються множинами P_1–P_{45}, то для доведення теореми 4.16 залишилося показати, що якщо для кожної із ч. в. множин P_1–P_{45} і P_1^{op}–P_{45}^{op} описати всі (min, max)-еквівалентні йому ч. в. множини ширини 3, то в результаті одержимо (з точністю до ізоморфізму) всі ч. в. множини P_{46}–P_{108} і P_{46}^{op}–P_{108}^{op}. До того ж робити це не обов'язково для всіх множина P_1–P_{45} і P_1^{op}–P_{45}^{op} — їх досить розглядати з точністю до (min, max)-еквівалентності. Крім того, їх досить розглядати і з точністю до дуальності (тому що $(S^{\mathrm{op}})^{\uparrow}_X = (S^{\uparrow}_{S\setminus X})^{\mathrm{op}}$), але тоді і множини P_{46}–P_{108}, P_{46}^{op}–P_{108}^{op} ми повинні одержати з точністю до дуальності. Оскільки

1) $(P_2)^{\uparrow\uparrow}_{11} \cong P_1$, $(P_3)^{\downarrow}_{2} \cong P_1$, $(P_4)^{\uparrow}_{1} \cong P_3^{\mathrm{op}}$,

2) $(P_7)^{\uparrow\uparrow}_{11} \cong P_6$, $(P_8)^{\uparrow}_{1} \cong P_6^{\mathrm{op}}$, $(P_9)^{\uparrow\uparrow}_{11} \cong P_8$, $(P_{10})^{\downarrow}_{2} \cong P_6$, $(P_{11})^{\downarrow}_{2} \cong P_8$, $(P_{12})^{\downarrow}_{3} \cong P_{11}$, $(P_{13})^{\uparrow}_{1} \cong P_{12}^{\mathrm{op}}$,

3) $(P_{15})^{\uparrow\uparrow}_{11} \cong P_{14}$, $(P_{16})^{\downarrow\downarrow}_{66} \cong P_{17}$, $(P_{17})^{\downarrow}_{3} \cong P_{14}$, $(P_{18})^{\downarrow\downarrow}_{66} \cong P_{19}$, $(P_{19})^{\downarrow}_{3} \cong P_{16}$, $(P_{20})^{\downarrow}_{3} \cong P_{18}$,

4) $(P_{22})^{\uparrow\uparrow}_{11} \cong P_{21}$, $(P_{23})^{\uparrow\uparrow}_{11} \cong P_{22}$, $(P_{24})^{\uparrow}_{1} \cong P_{21}^{\mathrm{op}}$, $(P_{25})^{\uparrow\uparrow}_{11} \cong P_{24}$, $(P_{26})^{\downarrow}_{2} \cong P_{21}$, $(P_{27})^{\downarrow}_{2} \cong P_{24}$, $(P_{28})^{\uparrow}_{1} \cong P_{26}^{\mathrm{op}}$, $(P_{29})^{\downarrow}_{3} \cong P_{27}$, $(P_{30})^{\downarrow}_{3} \cong P_{28}$,

5) $(P_{32})_{11}^{\uparrow\uparrow} \cong P_{31}$, $(P_{36})\downarrow\downarrow_{77} \cong P_{37}$, $(P_{37})_3^{\downarrow} \cong P_{31}$, $(P_{40})_{12}^{\uparrow\uparrow} \cong P_{31}^{\mathrm{op}}$, $(P_{41})_{11}^{\uparrow\uparrow} \cong P_{40}$, $(P_{43})_3^{\downarrow} \cong P_{40}$,

6) $(P_{34})_{11}^{\uparrow\uparrow} \cong P_{33}$, $(P_{35})_{11}^{\uparrow\uparrow} \cong P_{34}$, $(P_{38})_{77}^{\downarrow\downarrow} \cong P_{39}$, $(P_{39})_3^{\downarrow} \cong P_{33}$, $(P_{42})_3^{\downarrow} \cong P_{38}$, $(P_{44})_4^{\uparrow} \cong P_{42}^{\mathrm{op}}$,

то досить обмежитися, наприклад, ч. в. множинами P_1, P_5, P_6, P_{14}, P_{21}, P_{31}, P_{33}, P_{45}.

Перед тим, як продовжити доведення, розглянемо деякі допоміжні твердження. При цьому будемо розглядати довільні ч. в. множини, а не лише ті, які мають додатну форму Тітса.

Нехай S — ч. в. множина. Точку $x \in S$ назвемо *біланцюговою*, якщо обидві підмножини $S(x)$ і $S^{\not\lessgtr}(x)$ є ланцюговими. Для $y \in S$ позначимо через $S^{>}(y)$ підмножину всіх $z \in S$ таких, що $z > y$, і покладемо $S^{\geq}(y) = S^{>}(y) \cup y$.

Лема 4.17. *Якщо X — нижня ланцюгова підмножина в S, така, що $S \setminus X$ також є ланцюговою, то $S_X^{\uparrow}$ має (як і S) ширину 2.*

Дійсно, за твердженням 2.7 X і $S \setminus X$ є ланцюговими і в $S_X^{\uparrow}$, а тому, $S_X^{\uparrow}$ має ширину 2.

Лема 4.18. *а) Якщо $X \neq \varnothing$ — нижня ланцюгова підмножина в S, складається з біланцюгових точок, то $S_X^{\uparrow}$ має ширину 2.*

а$'$) Якщо $X \neq S$ — нижня підмножина в S така, що $S \setminus X$ є ланцюговою і складається з біланцюгових точок, то $S_X^{\uparrow}$ має ширину 2.

Доведення. Розглянемо спочатку твердження а). Позначимо через a і b відповідно мінімальну і максимальну точку X. Так як точка b біланцюгова, то підмножина $L = X \cup S^{>}(b)$ є ланцюговою. Ч. в. підмножина $L' = S \setminus L$ також є ланцюговою, інакше вона містила б непорівняльні точки x і y, і якщо при цьому $x, y \in S^{\not\lessgtr}(a)$, то $S^{\asymp}(a)$ не є ланцюговою, а якщо $a < x$ або $a < y$, то $S(a) = S^{\geq}(a)$ не є ланцюговою; в обох випадках одержуємо протиріччя. Далі, оскільки будь-яка точка $x \in X$ непорівняльна з будь-якою точкою $y \in L'$ (інакше $S(x)$ не була б ланцюговою), то в $S_X^{\uparrow}$ виконується нерівність $X > L'$ і тому підмножина $L'' = L' \cup X$ множини $S_X^{\uparrow}$ є ланцюговою. Отже, $S_X^{\uparrow}$ є сумою ланцюгових підмножин L'' і $L \setminus X$, а тому, має ширину 2.

Твердження a') доводиться дуальним чином з урахуванням леми 2.18.

$\square$

Зауважимо, що з доведення випливає, що в цьому випадку і сама множина S має ширину 2.

У всіх наступних лемах Y — нижня підмножина S і X — нижня підмножина Y, — такі, що $X < S \setminus Y$. При цьому доведенні будемо користуватися рівністю $S_{YX}^{\uparrow\uparrow} = S_{XZ}^{\uparrow\downarrow}$ (див. лему 2.19), а також твердженням 2.7 і дуальним до нього твердженням (часто не посилаючись на них).

Лема 4.19. *Якщо X, $Y_0 = Y \setminus X$ і $Z = S \setminus Y$ є ланцюговими, то $T = S_{YX}^{\uparrow\uparrow}$ має (як і S) ширину 2.*

Дійсно, оскільки $X \cup Z$ і Y_0 — ланцюгові підмножини S, і $S = (X \cup Z) \cup Y_0$, то $X \cup Z$ і Y_0 є ланцюговими і в T, причому $T = (X \cup Z) \cup Y_0$.

Лема 4.20. b) *Нехай X має ширину 2, $Y_0 = Y \setminus X$ — непорожня ланцюгова підмножина і a — максимальна точка Y_0. Якщо ланцюговими є $Z = S \setminus Y$ і $S(a) \cap X$, то $T = S_{YX}^{\uparrow\uparrow}$ має ширину 2.*

b') *Нехай Z має ширину 2, $Y_0 = Y \setminus X$ — непорожня ланцюгова підмножина і a — мінімальна точка Y_0. Якщо ланцюговими є X і $S(a) \cap Z$, то $T = S_{YX}^{\uparrow\uparrow}$ має ширину 2.*

Зауважимо, що S може мати ширину $w > 2$.

Доведення. Розглянемо спочатку твердження b). Очевидно, що Y_0 і Z є ланцюговими і в T, причому $Z < X$; крім того, і $K = T^{\not\lessgtr}(a) \cap X$ є ланцюговою. Представимо X у вигляді об'єднання (що попарно не перетинаються) ланцюгових підмножин L_0, L_1 і L_2 таких, що $L_0 < L_1 \cup L_2$ (можливо, $L_0 = \varnothing$), і позначимо через b і c мінімальні точки множин $L_1 \cup L_2$. Оскільки K є ланцюговою, то в T або $a < b$, або $a < c$; нехай, наприклад, $a < b$. Тоді T є об'єднанням ланцюгових підмножин $Y_0 \cup L_1$ і $Z \cup L_0 \cup L_2$.

Твердження b') виходить із твердження b) шляхом переходу від S до S^{op} з урахуванням рівності $S^{\uparrow\downarrow}_{XZ} = S^{\downarrow\uparrow}_{ZX}$ (див. лему 2.19). □

Лема 4.21. *Нехай Y задовольняє умові леми* 4.17, *тобто Y і $Z = S \setminus Y$ є ланцюговими. Тоді $T = S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ має ширину* 2.

Дійсно, у цьому випадку ланцюговою є і підмножина X, і лема випливає з леми 4.19.

Лема 4.22. *Нехай Y задовольняє умові твердження a) леми* 4.18, *тобто Y — непорожня ланцюгова підмножина, складаєтьcя з біланцюгових точок. Тоді $T = S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ має ширину* 2.

Доведення. Будемо вважати, що $X \neq \varnothing$ (інакше маємо твердження a) леми 4.18). Очевидно, що Y_0, Z і X є ланцюговими в S (Y_0 і X ланцюгові, тому що Y ланцюгова, а Z ланцюгова, оскільки $X < Z$ і кожна точка з X є біланцюговою), а тому, і в T; крім того, $Z < X$ в T. Тоді T має ширину 2, тому що воно є об'єднанням підмножин Y_0 і $Z \cup X$. □

Лема 4.23. *Нехай Y задовольняє умові твердження a') леми* 4.18, *тобто $Z = S \setminus Y$ — непорожня ланцюгова підмножина, що складаєтьcя з біланцюгових точок. Тоді $T = S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ має ширину* 2.

Доведення. Можна вважати, що $X \neq \varnothing$ (інакше маємо твердження a') леми 4.18). Позначимо через b мінімальну точку Z. Так як b біланцюговая, то ланцюговою є підмножина $L = Z \cup S^{<}(b)$ (а тому, і X). Крім того, ланцюговою є підмножина $L' = S \setminus L$ (див. доведення леми 4.18). Позначимо через L_1 ланцюгову підмножину $S^{<}(b) \setminus X$. Тоді S є об'єднанням ланцюгових підмножин $L = X \cup L_1 \cup Z$ і L', причому $X < L_1 < Z$. Оскільки X, L_1, Z і L' є ланцюговими підмножинами і в T, і при цьому $Z < L_1 < X$, то T має ширину 2. $\square$

За сказаним вище, для завершення доведення теореми 4.16 нам залишилося показати, що якщо для кожної з ч. в. множин P_1, P_5, P_6, P_{14}, P_{21}, P_{31}, P_{33}, P_{45} описати всі min-еквівалентні їй ч. в. множини ширини 3, то в результаті одержимо, з точністю до ізоморфізму і антиізоморфізму, усі ч. в. множини P_{46}–P_{108}. При цьому будемо користуватися схемою, описаною у попередньому параграфі, з урахуванням лем 4.17–4.23.

Якщо говорити більш докладно, доведення будемо проводити по наступній схемі:

A) Для ч. в. множин $S = P_1$, P_5, P_6, P_{14}, P_{21}, P_{31}, P_{33}, P_{45} описати всі нижні власні підмножини X і побудувати всі ч. в. множини виду $T = S^{\uparrow}_{X}$. При цьому не розглядаються X, які задовольняють умові леми 4.17, умові твердження a) або умові твердження a') леми 4.18.

B) Для зазначених в A) ч. в. множин S описати всі пари (Y, X), що складаються із власної нижньої підмножини Y в S і нижньої непорожньої підмножини X в Y, такої, що $X < S \setminus Y$, і побудувати всі ч. в. множини виду $T = S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$. При цьому за лемою 4.21 -і 4.23 у якості Y не потрібно брати ті підмножини, які виключені з розгляду в A). Не потрібно також розглядати випадок $X = Y$, тому що для розглянутих ч. в. множин S нерівність $Y < S \setminus Y$ можлива лише для ланцюгових $S \setminus Y$, а тоді $S^{\uparrow\uparrow}_{YY}$ має ширину 2.

C) Переконатися в тому, що в A)–B) ч. в. множина P_i або P_i^{op} зустрічається в якості T хоча б один раз для кожного $i = 46, 47, \dots, 108$.

Використаємо зазначену схему.

Крок $\boldsymbol{A}$). Опишемо всі нижні підмножини в ч. в. множинах P_1, P_5, P_6, P_{14}, P_{21}, P_{31}, P_{33}, P_{45} (які задовольняють зазначеним при описі схеми умовам). Ними будуть:

для P_1 — $A_{1,1} = \{1, 2\}$, $A_{1,2} = \{1, 2, 3\}$, $A_{1,3} = \{1, 2, 3, 4\}$;

для P_5 — $A_{5,1} = \{1\}$, $A_{5,2} = \{1, 3\}$, $A_{5,3} = \{1, 2, 3\}$, $A_{5,4} = \{1, 3, 4\}$, $A_{5,5} = \{1, 2, 3, 4\}$;

для P_6 — $A_{6,1} = \{1, 2\}$, $A_{6,2} = \{1, 2, 3\}$, $A_{6,3} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{6,4} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

для P_{14} — $A_{14,1} = \{1\}$, $A_{14,2} = \{1, 3\}$, $A_{14,3} = \{1, 2, 3\}$, $A_{14,4} = \{1, 3, 4\}$, $A_{14,5} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{14,6} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

для P_{21} — $A_{21,1} = \{1, 2\}$, $A_{21,2} = \{1, 2, 3\}$, $A_{21,3} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{21,4} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_{21,5} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

для P_{31} — $A_{31,1} = \{1\}$, $A_{31,2} = \{1, 3\}$, $A_{31,3} = \{1, 2, 3\}$, $A_{31,4} = \{1, 3, 4\}$, $A_{31,5} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{31,6} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_{31,7} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

для P_{33} — $A_{33,1} = \{1\}$, $A_{33,2} = \{1, 3\}$, $A_{33,3} = \{1, 2, 3\}$, $A_{33,4} = \{1, 3, 4\}$, $A_{33,5} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{33,6} = \{1, 3, 4, 5\}$, $A_{33,7} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_{33,8} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

для P_{45} — $A_{45,1} = \{1\}$, $A_{45,2} = \{1, 4\}$, $A_{45,3} = \{1, 2\}$, $A_{45,4} = \{1, 2, 4\}$, $A_{45,5} = \{1, 4, 5\}$, $A_{45,6} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{45,7} = \{1, 2, 4, 5\}$, $A_{45,8} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_{45,9} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $A_{45,10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Позначимо через $Q_{i,j}$, де $i = 1, 5, 6, 14, 21, 31, 33, 45$, ч. в. множину $S_X^{\uparrow}$ при $S = P_i$ і $X = A_{i,j}$. Тоді легко переконатися в тому, що $Q_{1,1} \cong P_{47}^{\mathrm{op}}$, $Q_{1,2} \cong P_{46}$, $Q_{1,3} \cong P_{47}$, $Q_{5,1} \cong P_{50}$, $Q_{5,2} \cong P_{48}$, $Q_{5,3} \cong P_{48}$, $Q_{5,4} \cong P_{50}$, $Q_{5,5} \cong P_{48}$, $Q_{6,1} \cong P_{54}^{\mathrm{op}}$, $Q_{6,2} \cong P_{51}$, $Q_{6,3} \cong P_{57}$, $Q_{6,4} \cong P_{52}$, $Q_{14,1} \cong P_{64}$, $Q_{14,2} \cong P_{55}$, $Q_{14,3} \cong P_{56}^{\mathrm{op}}$, $Q_{14,4} \cong P_{62}$, $Q_{14,5} \cong P_{58}$, $Q_{14,6} \cong P_{59}$, $Q_{21,1} \cong P_{71}^{\mathrm{op}}$, $Q_{21,2} \cong P_{68}$, $Q_{21,3} \cong P_{79}$, $Q_{21,4} \cong P_{76}$, $Q_{21,5} \cong P_{69}$, $Q_{31,1} \cong P_{96}$, $Q_{31,2} \cong P_{72}$,

$Q_{31,3} \cong P_{74}^{\mathrm{op}}$, $Q_{31,4} \cong P_{90}$, $Q_{31,5} \cong P_{80}$, $Q_{31,6} \cong P_{86}$, $Q_{31,7} \cong P_{81}$, $Q_{33,1} \cong P_{97}$, $Q_{33,2} \cong P_{73}$, $Q_{33,3} \cong P_{73}^{\mathrm{op}}$, $Q_{33,4} \cong P_{91}$, $Q_{33,5} \cong P_{100}^{\mathrm{op}}$, $Q_{33,6} \cong P_{93}$, $Q_{33,7} \cong P_{78}$, $Q_{33,8} \cong P_{83}$, $Q_{45,1} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q_{45,2} \cong P_{85}$, $Q_{45,3} \cong P_{105}$, $Q_{45,4} \cong P_{101}$, $Q_{45,5} \cong P_{105}$, $Q_{45,6} \cong P_{85}$, $Q_{45,7} \cong P_{101}$, $Q_{45,8} \cong P_{101}$, $Q_{45,9} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q_{45,10} \cong P_{85}$.

Крок *B*). Опишемо всі пари (Y, X) нижніх власних підмножин в ч. в. множинах P_1, P_5, P_6, P_{14}, P_{21}, P_{31}, P_{33}, P_{45} (які задовольняють зазначеним при описі схеми умовам). Ними будуть:

для P_1 — $B_{1,1} = (A_{1,2}, \{2\})$, $B_{1,2} = (A_{1,3}, \{2\})$, $B_{1,3} = (A_{1,3}, \{1,2\})$, $B_{1,4} = (A_{1,3}, \{1,2,3\})$;

для P_5 — $B_{5,1} = (A_{5,3}, \{1\})$, $B_{5,2} = (A_{5,3}, \{1,3\})$, $B_{5,3} = (A_{5,5}, \{1\})$, $B_{5,4} = (A_{5,5}, \{3\})$, $B_{5,5} = (A_{5,5}, \{1,3\})$, $B_{5,6} = (A_{5,5}, \{1,2,3\})$;

для P_6 — $B_{6,1} = (A_{6,2}, \{2\})$, $B_{6,2} = (A_{6,3}, \{2\})$, $B_{6,3} = (A_{6,3}, \{1,2\})$, $B_{6,4} = (A_{6,3}, \{1,2,3\})$, $B_{6,5} = (A_{6,4}, \{2\})$, $B_{6,6} = (A_{6,4}, \{1,2\})$, $B_{6,7} = (A_{6,4}, \{1,2,3\})$, $B_{6,8} = (A_{6,4}, \{1,2,3,4\})$;

для P_{14} — $B_{14,1} = (A_{14,3}, \{1\})$, $B_{14,2} = (A_{14,5}, \{1\})$, $B_{14,3} = (A_{14,5}, \{3\})$, $B_{14,4} = (A_{14,5}, \{1,3\})$, $B_{14,5} = (A_{14,5}, \{1,2,3\})$, $B_{14,6} = (A_{14,6}, \{1\})$, $B_{14,7} = (A_{14,6}, \{3\})$, $B_{14,8} = (A_{14,6}, \{1,3\})$, $B_{14,9} = (A_{14,6}, \{1,2,3\})$, $B_{14,10} = (A_{14,6}, \{1,3,4\})$, $B_{14,11} = (A_{14,6}, \{1,2,3,4\})$;

для P_{21} — $B_{21,1} = (A_{21,2}, \{2\})$, $B_{21,2} = (A_{21,3}, \{2\})$, $B_{21,3} = (A_{21,3}, \{1,2\})$, $B_{21,4} = (A_{21,3}, \{1,2,3\})$, $B_{21,5} = (A_{21,4}, \{2\})$, $B_{21,6} = (A_{21,4}, \{1,2\})$, $B_{21,7} = (A_{21,4}, \{1,2,3\})$, $B_{21,8} = (A_{21,4}, \{1,2,3,4\})$, $B_{21,9} = (A_{21,5}, \{2\})$, $B_{21,10} = (A_{21,5}, \{1,2\})$, $B_{21,11} = (A_{21,5}, \{1,2,3\})$, $B_{21,12} = (A_{21,5}, \{1,2,3,4\})$, $B_{21,13} = (A_{21,5}, \{1,2,3,4,5\})$;

для P_{31} — $B_{31,1} = (A_{31,3}, \{1\})$, $B_{31,2} = (A_{31,5}, \{1\})$, $B_{31,3} = (A_{31,5}, \{3\})$, $B_{31,4} = (A_{31,5}, \{1,3\})$, $B_{31,5} = (A_{31,5}, \{1,2,3\})$, $B_{31,6} = (A_{31,6}, \{1\})$, $B_{31,7} = (A_{31,6}, \{3\})$, $B_{31,8} = (A_{31,6}, \{1,3\})$, $B_{31,9} = (A_{31,6}, \{1,2,3\})$, $B_{31,10} = (A_{31,6}, \{1,3,4\})$, $B_{31,11} = (A_{31,6}, \{1,2,3,4\})$, $B_{31,12} = (A_{31,7}, \{1\})$, $B_{31,13} = (A_{31,7}, \{3\})$, $B_{31,14} = (A_{31,7}, \{1,3\})$, $B_{31,15} = (A_{31,7}, \{1,2,3\})$, $B_{31,16} = (A_{31,7}, \{1,3,4\})$, $B_{31,17} = (A_{31,7}, \{1,2,3,4\})$, $B_{31,18} = (A_{31,7}, \{1,2,3,4,5\})$;

для P_{33} — $B_{33,1} = (A_{33,3}, \{1\})$, $B_{33,2} = (A_{33,5}, \{1\})$, $B_{33,3} = (A_{33,5}, \{3\})$, $B_{33,4} = (A_{33,5}, \{1,3\})$, $B_{33,5} = (A_{33,7}, \{1\})$, $B_{33,6} = (A_{33,7}, \{3\})$, $B_{33,7} = (A_{33,7}, \{1,3\})$, $B_{33,8} = (A_{33,7}, \{1,2,3\})$, $B_{33,9} = (A_{33,7}, \{1,3,4\})$, $B_{33,10} = (A_{33,7}, \{1,2,3,4\})$, $B_{33,11} = (A_{33,8}, \{1\})$, $B_{33,12} = (A_{33,8}, \{3\})$, $B_{33,13} = (A_{33,8}, \{1,3\})$, $B_{33,14} = (A_{33,8}, \{1,2,3\})$, $B_{33,15} = (A_{33,8}, \{1,3,4\})$, $B_{33,16} = (A_{33,8}, \{1,2,3,4\})$, $B_{33,17} = (A_{33,8}, \{1,3,4,5\})$, $B_{33,18} = (A_{33,8}, \{1,2,3,4,5\})$;

для P_{45} — $B_{45,1} = (A_{45,4}, \{1\})$, $B_{45,2} = (A_{45,6}, \{1\})$, $B_{45,3} = (A_{45,7}, \{1\})$, $B_{45,4} = (A_{45,8}, \{1\})$, $B_{45,5} = (A_{45,8}, \{4\})$, $B_{45,6} = (A_{45,8}, \{1,4\})$, $B_{45,7} = (A_{45,8}, \{1,2\})$, $B_{45,8} = (A_{45,8}, \{1,2,4\})$, $B_{45,9} = (A_{45,9}, \{1\})$, $B_{45,10} = (A_{45,10}, \{1\})$, $B_{45,11} = (A_{45,10}, \{4\})$, $B_{45,12} = (A_{45,10}, \{1,4\})$, $B_{45,13} = (A_{45,10}, \{1,2\})$, $B_{45,14} = (A_{45,10}, \{1,2,4\})$, $B_{45,15} = (A_{45,10}, \{1,4,5\})$, $B_{45,16} = (A_{45,10}, \{1,2,3,4\})$, $B_{45,17} = (A_{45,10}, \{1,2,4,5\})$, $B_{45,18} = (A_{45,10}, \{1,2,3,4,5\})$.

Позначимо через $Q'_{i,j}$, де $i = 1,5,6,14,21,31,33,45$, ч. в. множину $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{P}_i$ і $(Y,X) = B_{i,j}$. Тоді легко переконатися в тому, що $Q'_{1,1} \cong P_{47}$, $Q'_{1,2} \cong P_{49}$, $Q'_{1,3} \cong P_{49}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{1,4} \cong P_{47}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{5,1} \cong P_{50}$, $Q'_{5,2} \cong P_{48}$, $Q'_{5,3} \cong P_{48}$, $Q'_{5,4} \cong P_{50}$, $Q'_{5,5} \cong P_{48}$, $Q'_{5,6} \cong P_{50}$, $Q'_{6,1} \cong P_{54}$, $Q'_{6,2} \cong P_{61}$, $Q'_{6,3} \cong P_{60}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{6,4} \cong P_{52}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{6,5} \cong P_{60}$, $Q'_{6,6} \cong P_{61}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{6,7} \cong P_{57}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{6,8} \cong P_{53}$, $Q'_{14,1} \cong P_{65}$, $Q'_{14,2} \cong P_{56}$, $Q'_{14,3} \cong P_{62}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,4} \cong P_{55}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,5} \cong P_{64}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,6} \cong P_{63}$, $Q'_{14,7} \cong P_{67}$, $Q'_{14,8} \cong P_{66}$, $Q'_{14,9} \cong P_{63}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,10} \cong P_{67}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,11} \cong P_{59}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,1} \cong P_{71}$, $Q'_{21,2} \cong P_{88}$, $Q'_{21,3} \cong P_{87}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,4} \cong P_{69}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,5} \cong P_{89}$, $Q'_{21,6} \cong P_{89}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,7} \cong P_{76}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,8} \cong P_{70}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,9} \cong P_{87}$, $Q'_{21,10} \cong P_{88}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,11} \cong P_{79}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,12} \cong P_{77}$, $Q'_{21,13} \cong P_{70}$, $Q'_{31,1} \cong P_{98}$, $Q'_{31,2} \cong P_{74}$, $Q'_{31,3} \cong P_{90}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,4} \cong P_{72}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,5} \cong P_{96}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,6} \cong P_{92}$, $Q'_{31,7} \cong P_{108}$, $Q'_{31,8} \cong P_{99}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,9} \cong P_{94}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,10} \cong P_{103}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,11} \cong P_{81}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,12} \cong P_{94}$, $Q'_{31,13} \cong P_{103}$, $Q'_{31,14} \cong P_{99}$, $Q'_{31,15} \cong P_{92}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,16} \cong P_{108}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,17} \cong P_{86}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,18} \cong P_{82}$, $Q'_{33,1} \cong P_{97}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,2} \cong P_{95}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,3} \cong P_{104}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,4} \cong P_{83}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,5} \cong P_{75}$, $Q'_{33,6} \cong P_{102}$, $Q'_{33,7} \cong P_{78}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,8} \cong P_{93}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,9} \cong P_{84}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,10} \cong P_{106}$, $Q'_{33,11} \cong P_{95}$, $Q'_{33,12} \cong P_{104}$, $Q'_{33,13} \cong P_{100}$, $Q'_{33,14} \cong P_{91}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,15} \cong P_{107}^{\mathrm{op}}$,

$Q'_{33,16} \cong P_{107}$, $Q'_{33,17} \cong P^{\mathrm{op}}_{106}$, $Q'_{33,18} \cong P_{84}$, $Q'_{45,1} \cong P^{\mathrm{op}}_{105}$, $Q'_{45,2} \cong P_{105}$, $Q'_{45,3} \cong P_{85}$, $Q'_{45,4} \cong P_{101}$, $Q'_{45,5} \cong P^{\mathrm{op}}_{105}$, $Q'_{45,6} \cong P^{\mathrm{op}}_{105}$, $Q'_{45,7} \cong P_{85}$, $Q'_{45,8} \cong P_{105}$, $Q'_{45,9} \cong P_{105}$, $Q'_{45,10} \cong P_{101}$, $Q'_{45,11} \cong P_{105}$, $Q'_{45,12} \cong P_{85}$, $Q'_{45,13} \cong P_{101}$, $Q'_{45,14} \cong P_{101}$, $Q'_{45,15} \cong P^{\mathrm{op}}_{105}$, $Q'_{45,16} \cong P^{\mathrm{op}}_{105}$, $Q'_{45,17} \cong P_{85}$, $Q'_{45,18} \cong P_{105}$.

Зауважимо, що для спрощення обчислень можна скористатися рівністю $Q'_{i,j} = (Q_{i,j})^{\uparrow}_{X}$ або лемою 2.19.

Крок *C*). Легко бачити, що P_i або P_i^{op} зустрічається в A)–B) для кожного $i = 46, 47, \ldots, 108$.

Доведення закінчене.

4.8. Частково впорядковані множини ширини 3 і порядку 8 з додатно визначеною формою Тітса

У цьому параграфі ми доведемо наступну теорему.

Теорема 4.24. *Довільна ч. в. множина ширини 3 і порядку 8 з додатно визначеною формою Тітса є серійною.*

Нехай S — ч. в. множина ширини 3 і порядку 8 з додатно визначеною формою Тітса.

На початку параграфа 4.7. ми довели, що S min-еквівалентна деякій частково впорядкованій множині P, яка має ширину 2: $P = S^{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow}_{y_1 y_2 \cdots y_s a}$. Тоді, зауважимо, $S = P^{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\downarrow}_{a y_s \cdots y_2 y_1}$. Якщо врахувати теорему 4.14 (згідно якої довільна ч. в. множина ширини ≤ 2 і порядку 8 з додатно визначеною формою Тітса є серійною), то звідси маємо, що завершити доведення теореми 4.14 можна наступним чином: показати, що якщо ч. в. множина S ширини $w \leq 3$ і порядку $n > 7$ має вигляд 1), 2) або 3) і x — максимальний елемент S, то $S^{\downarrow}_{x}$ є або ч. в. множиною ширини $w' \leq 2$ (а тоді згідно I) вона матиме вигляд 1), 2) або 3)), або ч. в. множиною ширини 3, що має вигляд 3).

Переходимо до доведення.

Нехай S — ч. в. множина ширини $w \leq 3$ і порядку $n > 7$, яка має вигляд 1), 2) або 3). У другому випадку будемо для визначеності вважати, що мінімальний елемент 1-го ланцюга менший за максимальний елемент 2-го ланцюга. Нехай x — максимальний елемент S і $T = S_x^{\downarrow}$. Тоді

1.1) якщо S має вигляд 1), то $w(T) \leq 2$ (а саме, T має також вигляд 1));

2.1) якщо S має вигляд 2) і x належить 1-му ланцюгу, то $w(T) \leq 2$ (а саме, T має також вигляд 2));

2.2) якщо S має вигляд 2) і x належить 2-му ланцюгу, то T має вигляд 3) (при цьому можливий як випадок $w(T) = 2$, так і випадок $w(T) = 3$);

3.1) якщо S має вигляд 3) і x належить ланцюгу, то T має вигляд 3) (при цьому можливий як випадок $w(T) = 2$, так і випадок $w(T) = 3$);

3.2) якщо S має вигляд 3) і x належить майже ланцюгу, причому майже ланцюг має 1 максимальний елемент, то $w(T) = 3$ і T має вигляд 3);

3.3) якщо S має вигляд 3) і x належить майже ланцюгу, причому майже ланцюг має 2 максимальних елемента, то $w(T) \leq 2$ (а саме, T має також вигляд 2)).

Теорема 4.24 доведена.

4.9. Частково впорядковані множини порядку ≥ 8, які мають додатно визначену форму Тітса

У цьому параграфі ми доведемо наступну теорему.

Теорема 4.25. *Довільна ч. в. множина порядку ≥ 8 з додатно визначеною формою Тітса є серійною.*

Якщо порядок множини дорівнює 8, то теорема доведена раніше (див.

теореми 4.14 та 4.24).

Розглянемо випадок, коли порядок множини більший за 8.

Теорема випливає, очевидно, з наступного чисто комбінаторного твердження.

Твердження 4.26. *Нехай S - частково впорядкована множина порядку $n > 8$, кожна власна підмножина якої є серійною. Тоді і сама S є серійною.*

Зазначимо, що умова, вказана в першій частині твердження, виконується тоді і лише тоді, коли вона виконується для підмножин порядку n. Крім того, умова $n > 8$ (в формулюванні твердження) є істотною.

Переходимо до доведення твердження 4.26.

Нехай S - частково впорядкована множина порядку $n > 8$, для кожної власної підмножини якої виконується одна з умов 1)—3) (з означення серійних множин). Доведемо, що і для самої множини S виконується одна з умов 1)—3).

Введемо спочатку деякі позначення.

Сукупність усіх ч. в. множин виду i), де $i \in \{1, 2, 3\}$, позначимо через $\mathcal{P}_i$. Покладемо $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \bigcup \mathcal{P}_2 \bigcup \mathcal{P}_3$, та позначимо через $\overline{\mathcal{P}}$ - сукупність усіх ч. в. множин, які не належать $\mathcal{P}$. При заданні конкретних частково впорядкованих множин відношення часткового порядку вказується з точністю до транзитивності. Відношення часткового порядку на S позначимо через $\prec$ ($<$ означає відношення лінійного порядку на множині цілих чисел).

Перейдемо безпосередньо до доведення твердження, яке для наочності супроводжується геометричними поясненнями.

Зафіксуємо деяку максимальну точку в S. Позначимо її через x_0 та покладемо $T = S \setminus x_0$. За умовою твердження T має вид 1), 2) або 3).

I. Розглянемо спочатку випадок, коли частково впорядкована множина T має вид 1):

$$T_1 = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q\},$$

где $p + q = n - 1 \geq 8$ (тоді $p \geq q$, $q \geq 0$ або $p \geq q$, $q \geq 0$).

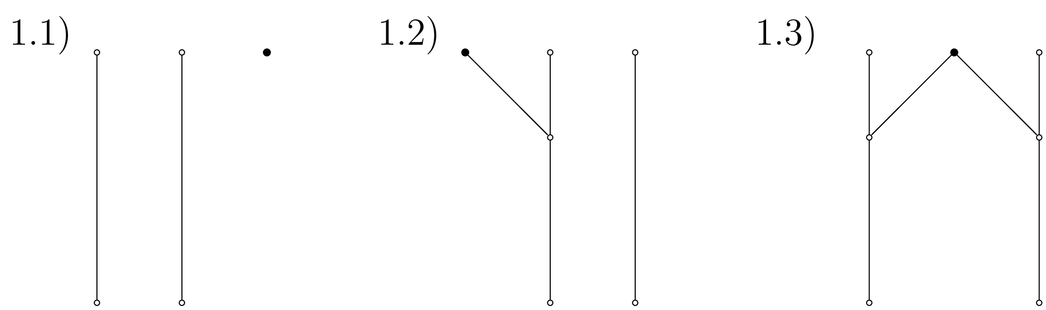
Легко бачити, що тоді для частково впорядкованої множини має місце один з наступних випадків:

1.1) $S_{1.1} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, x_0\}$ (тобто x_0 - точка, не порівняна з будь-якою точкою із T);

1.2) $S_{1.2} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_r \prec x_0\}$, де $1 \leq r \leq p$;

1.3) $S_{1.3} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_r \prec x_0, b_s \prec x_0\}$, де $1 \leq r \leq p, 1 \leq s \leq q$.

Геометрично ці множини мають відповідно наступний вид:



Відмітимо, що тут і надалі ми для простоти вказуємо лише основні точки; при цьому номери цих точок не вказуються, але вони легко встановлюються. Точка x_0 на малюнках відмічена.

Розглянемо окремо кожний з випадків 1.1) - 1.3). Зазначимо, що на малюнках ланцюг $A = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p\}$ розташований зліва, а ланцюг $B = \{b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q\}$ - справа.

1.1) Якщо $p = 0$ або $q = 0$, то отримаємо випадок 1), а якщо $p = 1$ або $q = 1$ - випадок 3). В інших випадках, якщо $p \geq 4$ відкинемо a_p-ю точку, а якщо $q \geq 4$ - b_q-ю точку; в обох випадках одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

1.2) Якщо $r = p$, то отримаємо випадок 1), а якщо $r = p - 1$ - випадок 3). Тепер будемо вважати, що $r \neq p-1, p$. Якщо при цьому $q = 0$ і $r = 1$, то отримаємо випадок 2). Якщо ж $q = 0$ і $r \neq 1$, то відкинемо a_3-ю точку, якщо $q \neq 0$ і $p \geq 4$ - a_2-ю точку, якщо ж $q \geq 4$ - b_q-ю точку. В кожному з випадків одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

1.3) Якщо $r = p$ і $s = 1$ або $r = 1$ і $s = q$, то отримаємо випадок 2). В інших випадках якщо $r \geq 3$, відкинемо a_r-ю точку, якщо $s \geq 3$ - b_s-ю точку, якщо $r < 3$, $s < 3$ і $p \geq 4$ - a_p-ю точку, якщо ж $r < 3$, $s < 3$ і $q \geq 4$ - b_q-ю точку. В кожному з цих чотирьох випадків одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

II. Розглянемо тепер випадок, коли частково впорядкована множина T має вид 2):

$$T_2 = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q\, a_1 \prec b_q\},$$

де $p + q = n - 1 \geq 8$ (тоді $p \geq 4$ або $q \geq 4$).

Легко побачити, що тоді для частково впорядкованої множини S має місце один із наступних випадків:

2.1) $S_{2.1} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_1 \prec b_q, x_0\}$;

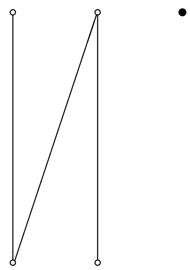
2.2) $S_{2.2} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_1 \prec b_q, a_r \prec x_0\}$, де $1 \leq r \leq p$;

2.3) $S_{2.3} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_1 \prec b_q, b_r \prec x_0\}$, де $1 \leq r \leq q$;

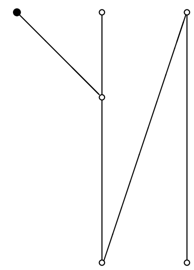
2.4) $S_{2.4} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_1 \prec b_q, a_r \prec x_0, b_s \prec n\}$, де $1 \leq r \leq p, 1 \leq s \leq q$, $(r, s) \neq (1, q)$.

Геометрично ці множини мають відповідно наступний вид:

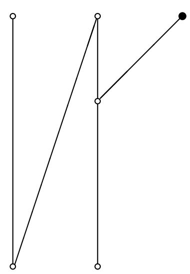
2.1)



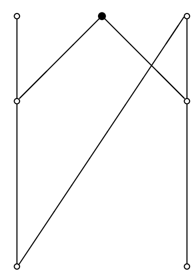
2.2)



2.3)



2.4)



Розглянемо окремо кожний із випадків 2.1) - 2.4). Зазначимо, що на малюнках ланцюг $A = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p\}$ розташований зліва, а ланцюг $B = \{b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q\}$ - справа.

2.1, 2.3) Якщо $p \geq 4$, то відкинемо a_p-ю точку, якщо $q \geq 4$ - b_1-ю точку. В обох випадках одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

2.2) Якщо $r = p$, то отримаємо випадок 2). Нехай $r \neq p$. Якщо $q > 1$, то відкинемо b_1-ю точку, якщо $q = 1$ - a_2-ю точку. В обох випадках одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

2.4) Якщо $p \geq 4$, то відкинемо a_p-ю точку, якщо $q \geq 4$ - b_2-ю точку. В обох випадках одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

III. Нарешті розглянемо випадок, коли частково впорядкована множина T має вид 3):

$$T_3 = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r\},$$

де $p + q + r = n - 1 \geq 8$ (тоді $p \geq 2$, $q \geq 2$ або $r \geq 2$).

Легко побачити, що тоді для частково впорядкованої множини S має місце один із наступних випадків

3.1) $S_{3.1} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, x_0\}$

3.2) $S_{3.2} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, a_s \prec x_0\}$, де $1 \leq s \leq p$

3.3) $S_{3.3} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, a \prec x_0\}$

3.4) $S_{3.4} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, b_s \prec x_0\}$, де $1 \leq s \leq q$

3.5) $S_{3.5} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, c_s \prec x_0\}$, де $1 \leq s \leq r$

3.6) $S_{3.6} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, a \prec x_0, b \prec x_0\}$

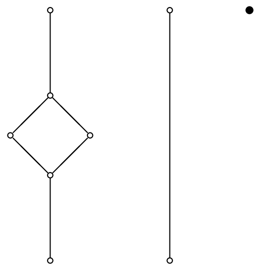
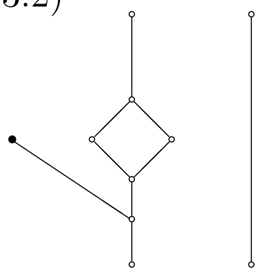
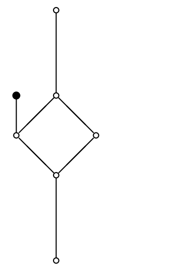
3.7) $S_{3.7} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, a_s \prec x_0, c_t \prec x_0\}$, де $1 \leq s \leq p, 1 \leq t \leq r$

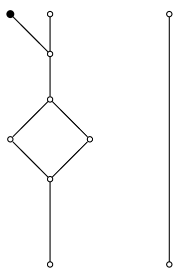
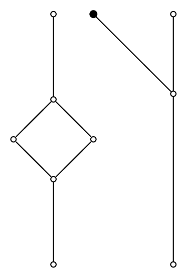
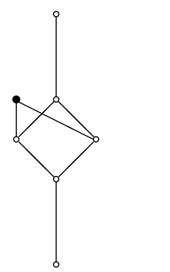
3.8) $S_{3.8} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, b \prec x_0, c_s \prec x_0\}$, де $1 \leq s \leq r$

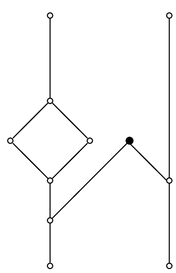
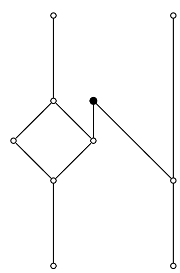
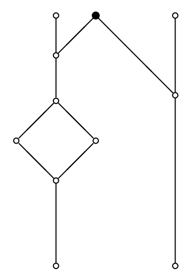
3.9) $S_{3.9} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, b_s \prec x_0, c_t \prec x_0\}$, де $1 \leq s \leq q, 1 \leq t \leq r$

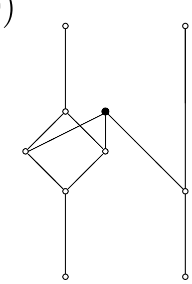
3.10) $S_{3.10} = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r, a \prec x_0, b \prec x_0, c \prec x_0\}$, де $1 \leq s \leq r$

Геометрично ці множини мають відповідно наступний вид:

3.1)

3.2)

3.3)


3.4)

3.5)

3.6)


3.7)

3.8)

3.9)


3.10)


Розглянемо окремо кожний із випадків 3.1) - 3.10). Зазначимо, що на малюнках ланцюг $A = \{a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_p\}$ частина майже ланцюга, яка розташована нижче єдиної пари непорівнянних елементів a, b; ланцюг $B = \{b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_q\}$ частина майже ланцюга, яка розташована вище елементів a, b; а ланцюг $C = \{c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_r\}$ - розташований на малюнках справа.

3.1) Якщо $r = 0$, то отримаємо випадок 3). Нехай $r \neq 0$. Якщо $p \geq 2$, то відкинемо a_p-ю точку, якщо $q \geq 2$ - b_q-ю точку, якщо ж $r \geq 2$ - c_r-ю точку. В кожному з цих трьох випадків одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

3.2, 3.3, 3.7, 3.8, 3.10) Якщо $p \geq 2$, то відкинемо a_p-ю точку, якщо $q \geq 2$ - b_q-ю точку, якщо ж $r \geq 2$ - c_r-ю точку. В кожному з цих трьох випадків одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

3.4) Якщо $s = q$, то отримаємо випадок 3). Нехай $s \neq q$. Якщо $p \geq 2$, то відкинемо a_p-ю точку, якщо $q \geq 2$ - b_q-ю точку, якщо ж $r \geq 2$ - c_r-ю точку. В кожному з цих трьох випадків одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

3.5) Якщо $s = r$ (зокрема $r = 0$), то отримаємо випадок 3). Нехай $s \neq r$. Якщо $p \geq 2$, то відкинемо a_p-ю точку, якщо $q \geq 2$ - b_q-ю точку, якщо ж $r \geq 2$ - c_r-ю точку. В кожному з цих трьох випадків одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

3.6) Якщо $q = 0$, то отримаємо випадок 3). Нехай $q \neq 0$. Якщо $p \geq 2$, то відкинемо a_p-ю точку, якщо $q \geq 2$ - b_q-ю точку, якщо ж $r \geq 2$ - c_r-ю точку. В кожному з цих трьох випадків одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

3.9) Якщо $r = 0$ і $s = q$, то отримаємо випадок 3). В інших випадках, якщо $p \geq 2$, то відкинемо a_p-ю точку, якщо $q \geq 2$ - b_q-ю точку, якщо ж $r \geq 2$ - c_r-ю точку. В кожному з цих трьох випадків одержимо підмножину з $(n-1)$-ї точки, яке належить $\overline{\mathcal{P}}$, що суперечить умові твердження.

Отже, розглянувши всі можливі випадки, ми довели, що ч. в. множина із $n > 8$ точок належить $\mathcal{P}$, якщо будь-яка її підмножина з $(n-1)$-ї точки належить $\mathcal{P}$, а тому твердження доведено.

4.10. Формулювання основного результату

Отже, із результатів попередніх параграфів цього розділу випливає наступна теорема, яка описує скінченні ч. в. множини з додатно визначеною формою Тітса.

Теорема 4.27. *Ч. в. множина S має додатно визначену форму Тітса тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *S — одностороння мінімаксна сума двох ланцюгових підмножин (зокрема, пряма сума двох ланцюгових підмножин);*

2) *S — пряма сума ланцюгової і майже ланцюгової підмножин;*

3) *S ізоморфно або антиізоморфно одній з зазначених в таблиці* 2 *ч. в. множин* 1–108.

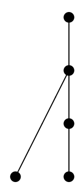
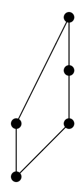
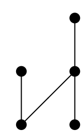
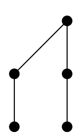
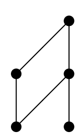
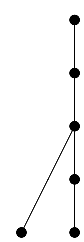
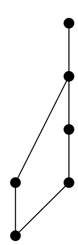
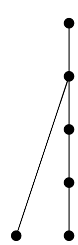
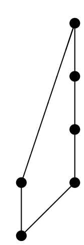
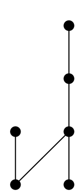
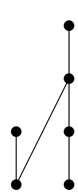
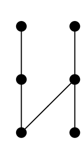
Зауважимо, що в 1) і 2) деякі з зазначених ланцюгових підмножин можуть бути порожніми.

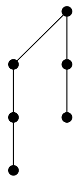
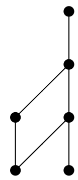
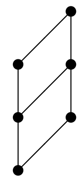
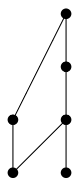
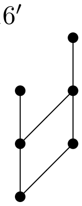
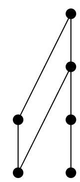
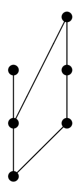
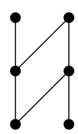
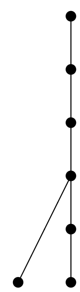
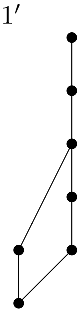
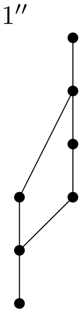
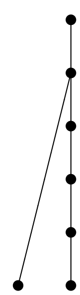
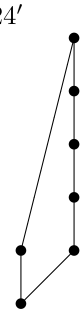
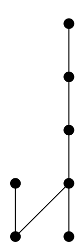
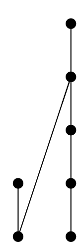
Таблиця 2 наведена в наступному параграфі цього розділу.

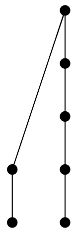
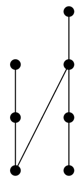
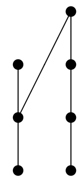
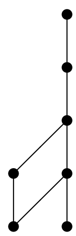
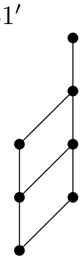
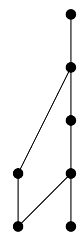
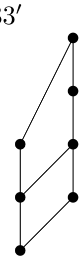
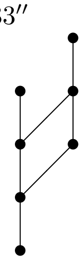
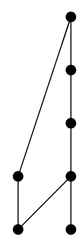
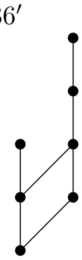
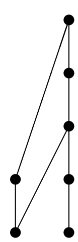
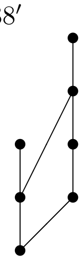
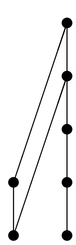
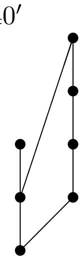
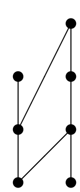
4.11. Таблиця не серійних частково впорядкованих множин з додатно визначеною формою Тітса

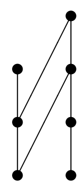
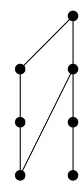
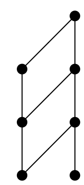
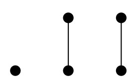
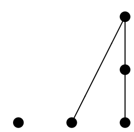
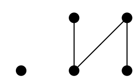
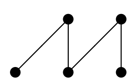
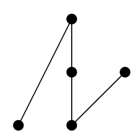
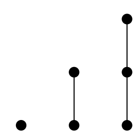
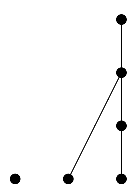
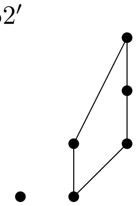
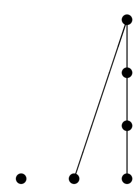
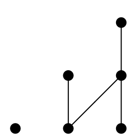
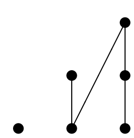
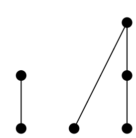
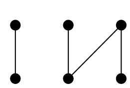
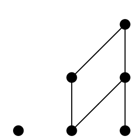
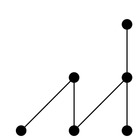
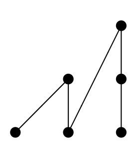
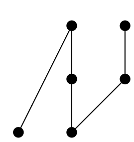
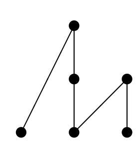
Частково впорядковані множини з додатно визначеною формою Тітса вказані в таблиці 2 з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму (інші пояснення, що стосуються таблиці, див. у попередньому параграфі після формулювання теореми 4.27).

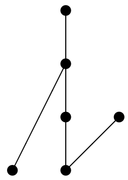
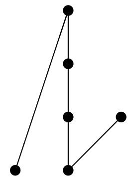
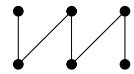
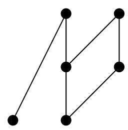
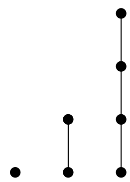
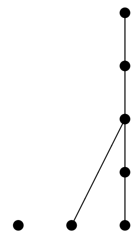
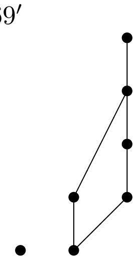
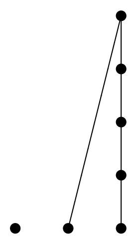
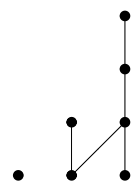
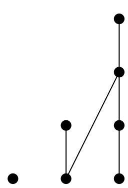
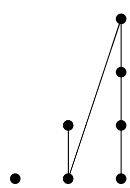
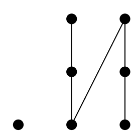
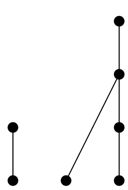
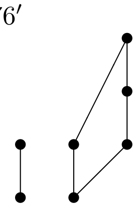
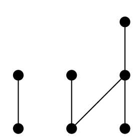
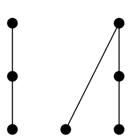
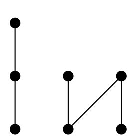
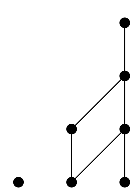
ТАБЛИЦЯ 2

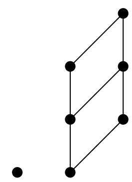
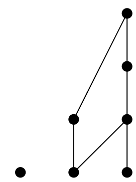
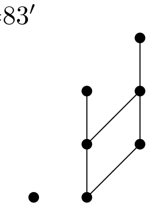
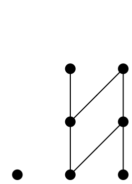
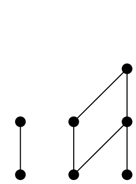
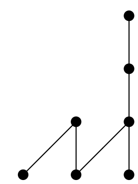
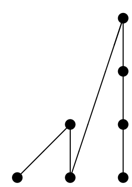
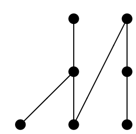
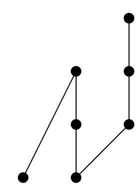
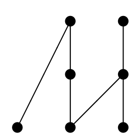
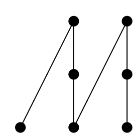
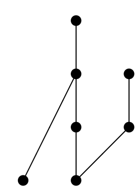
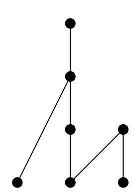
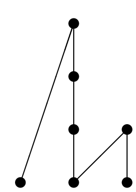
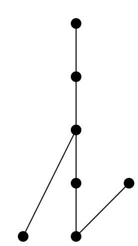
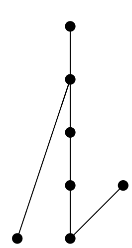
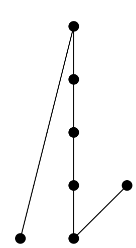
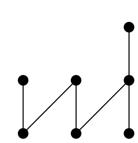
1 	2=1′ 	3 
4 	5 	6 
7=6′ 	8 	9=8′ 
10 	11 	12 

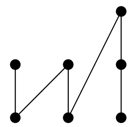
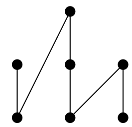
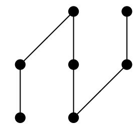
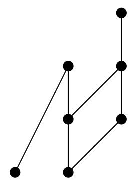
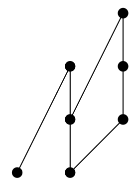
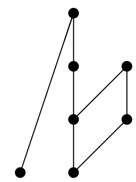
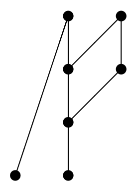
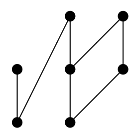
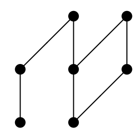
13 	14 	15=14′ 
16 	17=16′ 	18 
19=18′ 	20 	21 
22=21′ 	23=21′′ 	24 
25=24′ 	26 	27 

28 	29 	30 
31 	32=31′ 	33 
34=33′ 	35=33′′ 	36 
37=36′ 	38 	39=38′ 
40 	41=40′ 	42 

43 	44 	45 
46 	47 	48 
49 	50 	51 
52 	53=52′ 	54 
55 	56 	57 
58 	59 	60 
61 	62 	63 

64 	65 	66 
67 	68 	69 
70=69′ 	71 	72 
73 	74 	75 
76 	77=76′ 	78 
79 	80 	81 

82=81′ 	83 	84=83′ 
85 	86 	87 
88 	89 	90 
91 	92 	93 
94 	95 	96 
97 	98 	99 

100 	101 	102 
103 	104 	105 
106 	107 	108 

4.12. Висновки до розділу

Основним результатом цього розділу є опис ч. в. множин із додатною формою Тітса; таких множин нескінченне число. Показано, що не серійні множини існують лише тоді, коли її порядок дорівнює 5, 6 або 7; загальна їх кількість (з точністю до ізоморфізму та дуальності) дорівнює 108. Опис не серійних множин отримано методом “(min, max)-еквівалентності”.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [45], [46], [48], [50], [51], та [53].

Розділ 5

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗДІЛІВ 3 ТА 4 В ТЕОРІЇ ЗОБРАЖЕНЬ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН

5.1. Ін'єктивні зображення частково впорядковані множин

Нехай A — (скінченна) частково впорядкована множина.

Нагадаємо, що категорію зображень A ми позначаємо через $RepA$. Для морфізму $\alpha = (\mu, \nu) : X \to Y$ в $RepA$, ми пишемо

$$0 \Rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y$$

якщо μ і всі ν_{xx} є ін'єктивними.

Зображення X ч. в. множини A називається ін'єктивним, якщо будь-яка діаграма

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \Rightarrow & R' & \to & R \\ & & \downarrow & & \\ & & X & & \end{array}$$

продовжується до комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \Rightarrow & R' & \to & R \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & X & & \end{array} .$$

Категорію ін'єктивних зображень ч. в. множини A (тобто повну підкатегорію в $RepA$, що складається з усіх ін'єктивних зображень) будемо позначати через $InjA$. Будемо говорити, що A є ч. в. множиною inj-скінченного типу, якщо $InjA$ має rep-скінченний тип.

Серед нерозкладних зображень ч. в. множини A найбільш простими є наступні зображення, які називаються елементарними:

a) $I_{a0} = (0, U, 0)$, де $U = U_a = k$ $(a \in A)$;

b) $I_0 = (k, 0, 0)$;

c) $I_{a1} = (k, U, 1)$, де $U = U_a = k$, $1 = 1_k$ $(a \in A)$.

Будова ін'єктивних об'єктів категорії $RepA$ добре відомо (див. [63], [64]). Вони описуються наступним твердженням, просте доведення якого наведено в роботі [47] (ми не приводимо цього доведення тут, тому що воно належить першому авторові, а не дисертантові).

Твердження 5.1. *Нехай $X = (V, U, \gamma)$ — зображення ч. в. множини A. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) *зображення X є ін'єктивним;*

2) *відображення γ сюр'єктивне;*

3) *зображення X ізоморфне прямій сумі зображень виду I_0 і I_{a1}:*

$$X \cong (I_0)^s \oplus \left(\bigoplus_{a \in A} (I_{a1})^{s_a} \right)$$

(s, s_a — цілі невід'ємні числа).

У силу визначення форми Тітса категорії Крулля-Шмідта ми можемо замість категорії $InjA$ розглядати її головний спектроїд $\Lambda = Inj_0A$. Опишемо цю категорію.

Її об'єктами є елементарні зображення I_{a1} (a пробігає A) і I_0. Одиничний морфізм об'єкта I_{a1} (відповідно I_0) позначаємо через 1_{a1} (відповідно 1_0), а тотожне відображення $k \to k$ позначаємо (як і раніше) через 1_k. Далі, легко бачити, що $\Lambda(I_{a1}, I_{a1}) = 1_{a1}k$, $\Lambda(I_0, I_0) = 1_0k$, $\Lambda(I_0, I_{a1}) = 0$ і $\Lambda(I_{a1}, I_{b1}) = 0$ для будь-яких $a \not\leq b$. Якщо ж $a < b$, то $\Lambda(I_{a1}, I_{b1}) = \alpha_{ab}k$, де $\alpha_{ab} = (1_k, 1_k)$. Нарешті, $\Lambda(I_{a1}, I_0) = \alpha_{a0}k$, де

$\alpha_{a0} = (1_k, 0)$. Зауважимо, що нульовий морфізм — це морфізм $(0, 0)$. Оскільки відповідно до визначення категорії $RepA$ морфізми множаться покоординатно — $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$, то маємо $\alpha_{ab}\alpha_{bc} = \alpha_{ac}$ і $\alpha_{ab}\alpha_{b0} = \alpha_{a0}$; в інших випадках композиція неодиничних морфізмів дорівнює нулю.

Безпосередньо з опису категорії Λ випливає, її сагайдаком є наступний сагайдак $Q = Q_\Lambda = (Q_0, Q_1)$: $Q_0 = A \cup \infty$, а Q_1 складається зі стрілок виду $(a, 0) : a \to 0$, де a — максимальний елемент A, і стрілок виду $(a, b) : a \to b$, де a і b — сусідні елементи A і при цьому $a < b$ (зображенню I_{a1} відповідає елемент $a \in A$, а зображенню I_0 — елемент ∞); позначимо через $\overrightarrow{A \cup \infty}$ відповідний комутативний сагайдак (див. визначення й позначення з розділу 1). З опису категорії Λ маємо наступне твердження.

Твердження 5.2. *Категорія Λ ізоморфна категорії шляхів комутативного сагайдака $\overrightarrow{A \cup \infty}$.*

5.2. Формулювання основних теорем

Основні теореми цього розділу вивчають зв'язок між inj-скінченністю типу та додатною визначеністю форми Тітса (для ч. в. множин).

Поставимо у відповідність ч. в. множині A сагайдак $\overrightarrow{A} = (\overrightarrow{A}_0, \overrightarrow{A}_1)$ із множиною вершин $\overrightarrow{A}_0 = A$ і множиною стрілок

$$\overrightarrow{A}_1 = \{i \to j \,|\, i < j,\ i \text{ і } j \text{ — сусідні}\}$$

(нагадаємо, що елементи i і $j > i$ називаються сусідніми, якщо не існує елемента s, такого, що $j > s > i$). Ми розглядаємо $\overrightarrow{A}$ як комутативний колчан.

Зауважимо, що введене в попередньому пункті позначення $\overrightarrow{A \cup \infty}$ є частинним випадком позначення, яке ми щойно ввели. Для цього треба розглянути $A \cup \infty$ як ч. в. множину, де $a < \infty$ для довільного елемента $a \in A$.

Ч. в. множину A назвемо квазіпримітивною, якщо $\overrightarrow{A}$ є неперетинним об'єднанням ланцюгів (у випадку, коли всі стрілки кожного із ланцюгів мають один і той же напрямок, ч. в. множина називається примітивною), і без циклів, якщо граф $\overrightarrow{A}$ не має циклів.

Сформулюємо тепер основні теореми цього розділу.

Теорема 5.3. *Нехай S — частково впорядкована множина з додатно визначеною формою Тітса. Тоді S має inj-скінченний тип.*

Теорема 5.4. *Нехай S — квазіпримитивна частково впорядкована множина, що не є самодуальною. Тоді S і S^{op} одночасно мають inj-скінченний тип в тому і лише в тому випадку, коли форма Тітса S є додатно визначеною.*

Зауважимо, що твердження, яке є оберненим до твердження теореми 5.3, не має місця. Наприклад, ч. в. множина $A = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$ має inj-скінченний тип, а її форма Тітса не є додатно визначеною.

5.3. Доведення теорем

Для доведення теорем ми будемо користуватися наступною теоремою, яка випливає із теореми 1.4 і твердження 5.2.

Теорема 5.5. *Частково впорядкована множина A має inj-скінченний тип тоді і лише тоді, коли комутативний сагайдак $\overrightarrow{A \cup \infty}$ не містить (з точністю до антиізоморфізму) підсагайдаків виду* I–XII, *вказаних в умові теореми 1.4.*

Переходимо до доведення теорем 5.3 та 5.4.

Теорема 5.3 випливає із теорем 4.27, 5.5: треба розглянути кожну із частково впорядкованих множин A із додатно визначеною формою Тітса (такі множини описує теорема 4.27) і безпосередньо впевнитися в тому, що комутативний сагайдак $\overrightarrow{A \cup \infty}$ не містить підсагайдаків I–XII, про які йде мова в теоремі 5.5.

Доведемо тепер теорему 5.4.

Необхідність. Нехай форма Тітса ч. в. множини S не є додатною. Ми доведемо, що S або S^{op} не є inj-скінченного типу. За теоремою 3.10 S містить (з точністю до ізоморфізму і антиізоморфізму) одну із наступних ч. в. множин:

1) $1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7$;

2) $1 \prec 2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8$;

3) $1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6$;

4) $2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6$;

5) $2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7$;

6) $1 \prec 2, 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7$;

7) $1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7$;

8) $2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8$;

9) $2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8$;

10) $2 \prec 3, 2 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8$;

11) $1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8$;

12) $1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6, 5 \prec 8, 7 \prec 8$;

13) $1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8$;

14) $1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8$;

15) $1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8$;

16) $1 \prec 7, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 8$;

17) чотири елемента $1, 2, 3, 4$ попарно непорівняльні.

Зауважимо, що ч. в. множини 1)–16) складаються із елементів $1, 2, \ldots, p$, де в кожному випадку p — найбільше із вказаних чисел.

За теоремою 5.5 кожна з множин $A = 1)–13), 14^{\mathrm{op}}), 15), 17)$ не є inj-скінченного типу (навіть коли вона самодуальна). А саме $\overrightarrow{A \cup \infty}$ містить в собі відповідно підсагайдак IV, V, III, III, IV, IV, IX, V, V, VIII, V, VII, VI, XI, X, II.

Ч. в. множина $P = 16)$ є самодуальною і має inj-скінченний тип. Але якщо S містить P, то воно містить ч. в. множину $Q = P \cup 9$, де або 9 є непорівняльним з будь-яким $i \in P$, або 9 є непорівняльним з будь-яким $i \in P \setminus 8$ і $9 \prec 8$, або 9 є непорівняльним з будь-яким $i \in P \setminus \{2, 8\}$ і $9 \succ 8$ (випадок $S = P$ неможливий, оскільки S не є згідно умови теореми самодуальною); в першому випадку Q містить ч. в. множину 17), а в другому і третьому випадках Q не є ч. в. множиною inj-скінченного типу, бо $\overrightarrow{Q \cup \infty}$ містить підсагайдак IV. Отже, S або S^{op} не має inj-скінченний тип.

Достатність випливає із відповідної частини теореми 5.3.

Теорема 5.4 доведена.

5.4. Висновки до розділу

У цьому розділі доведено, що ч. в. множина S має inj-скінченний тип, якщо її форма Тітса додатно визначена. У випадку, коли S є квазіпримітивною, описано всі ч. в. множини S inj-скінченного типу; при цьому доведено, що ч. в. множина S має inj-скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса є додатно визначеною.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [47], [52], [55], [56].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню квадратичної форми Тітса скінченних частково впорядкованих множин та застосуванню отриманих результатів в теорії зображень.

Основними результатами дисертації є повний опис ч. в. множин з додатно визначеною формою Тітса (розділ 4) та P-критичних ч. в. множин (розділ 3). Доведено, що будь-яка ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса порядку $n > 7$ та $n < 5$ є серійною. Число несерійних множин (порядку 5, 6 і 7), з точністю до ізоморфізму та дуальності, дорівнює 108. Доведено, що ч. в. множина є P-критичною тоді і лише тоді, коли (min, max)-еквівалентна деякій критичній множині Клейнера. Число таких множин (з точністю до ізоморфізму та дуальності) дорівнює 75.

Опис несерійних ч. в. множин з додатно визначеною формою Тітса та P-критичних ч. в. множин отримано методом "(min, max)-еквівалентності", який запропонував науковий керівник. Детальне вивчення властивостей (min, max)-еквівалентних ч. в. множин проводиться у розділі 2. Доведено, що (min, max)-еквівалентність множин рівнозначна min-еквівалентності. Описано алгоритм, який дозволяє класифікувати всі ч. в. множини, min-еквівалентні фіксованій ч. в. множині; саме він ефективно використовується в розділах 3 і 4.

Вказані результати застосовуються в останньому розділі дисертації для вивчення ч. в. множин inj-скінченного типу.

Доведено, що ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса має inj-скінченний тип. Доведено, що для квазіпримитивної ч. в. множини S, що не є самодуальною, категорії ін'єктивних зображень множин S та S^{op} мають (одночасно) inj-скінченний тип тоді і лише тоді, коли форма Тітса

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – Vol. 6. – P. 71–103,309.

2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8. – С. 34–42.

3. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. Int. Conf. Representations Algebras. – Ottawa: Carleton Univ., 1974. – Paper N5.

4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, N5. – С. 776–788.

5. *Кочубей А. Н.* Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p-адическими квадратичными формами // Изв. Росс. Акад. наук. – 1998. – Т. 62, N6. – С. 103–124.

6. *Crandall M. G.* Semidifferentials, quadratic forms and fully nonlinear elliptic equations of second order // Ann. Just. H. Poincaré Anal Non Linéare. – 1989. – Vol. 6, N6. – P. 419–435.

7. *Corovei I.* Some functional equations connected with quadratic forms // Anal. Numér. Théor. Approx. – 1990. – Vol. 19, N2. – P. 123–127.

8. *Al-Naggar I.*, Pearson D. B. Quadratic forms and solutions of the Schrödinger equation // J. Phys. A29. – 1996. – N20. – P. 6581–6584.

9. *Alsina M., Bayer P.* Quaternion orders, quadratic forms, and Shimura curves. CRN Monograph Series, 22 – AMS, Providence, RI, 2004, 196pp.

10. *Shimura G.* Arithmetic and analytic theories of quadratic forms and Clifford groups. Mathematical Surveys and Monographs, 109 – AMS, Providence, RI, 2004, 275pp.

11. *Hoffmann D. W., Lanhribi A.* Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2 // Trans. Amer. Math. Soc. – 2004. – N10. – P. 4019–4052.

12. *Ateiwi A.M.* A study of dichotomy of linear systems of difference equations using the quadratic forms // J. Fract. Calc. – 2004. – Vol. 25. – P. 93–100.

13. *Fang F., Pan J.* Secondary Brown-Kervaire quadratic forms and π-manifolds // Forem Math. – 2004. – Vol. 16, N4. – P. 459–481.

14. *Ueno T.* Modular forms arising from zeta functions in two variables attached to prehomogeneous vector spaces related to quadratic forms // Nagoya Math. J. – 2004. – Vol. 175. – P. 1–37.

15. *Chan W. K., Peters M.* Quaternary quadratic forms and Hilbert modular surfaces // Contemp. Math. – 2004. – Vol. 344. – P. 85–97.

16. *Kohnen W.* Special Siegel modular forms and singular series polynomials of quadratic forms // Contemp. Math. – 2004. – Vol. 344. – P. 229–236.

17. *Laghribi A.* Quasi-hyperbolicity of totally singular quadratic forms // Contemp. Math. – 2004. – Vol. 344. – P. 237–248.

18. *Schulze-Pillot R.* Representation by integral quadratic forms — a survey // Contemp. Math. – 2004. – Vol. 344. – P. 303–321.

19. *Fitzgerald R. W., Yucas J. L.* Pensils of quadratic forms over finite fields // Discrete. Math. – 2004. – Vol. 283. – P. 71–79.

20. *Li M., Dezhong C.* Systems of Hermitian quadratic forms // Canad. Math. Byll. – 2004. – Vol. 47, N1. – P. 73–81.

21. *Car M.* Quadratic forms with polynomial coefficients // Acta Arith. – 2004. – Vol. 113, N2. – P. 131–155.

22. *Bevelacqua A. J.* Four dimensional quadratic forms over $F(X)$ where $I_t^3F(X) = 0$ and a failure of the strong Hasse principle // Comm. Algebra – 2004. – Vol. 32, N3. – P. 855–877.

23. *Teksan A.* Representations of positive integers by a direct sum of quadratic forms // Results. Math. – 2004. – Vol. 46. – P. 146–163.

24. *Jaschke S., Keúppelberg C., Lindner A.* Asymptotic behavior of tails and quantiles of quadratic forms of Gaussian vectors // J. Multivariate Anal. – 2004. – Vol. 88, N2. – P. 252–273.

25. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. 28. – С. 5–31.

26. *Завадский А. Г., Шкабара А. С.* Коммутативные колчаны и матричные алгебры типа. – Киев, 1976. – 52 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 76.3).

27. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 5–70.

28. *Bongartz K.* Algebras and quadratic forms // J. London Math. Soc. – 1983. – Vol. 28, N3. – P. 461-469.

29. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. – 2003. – Т. 6, N1 – С. 3–14.

30. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms// Вісник Київського університету (серія: фізика і математика). – 2005. – N1. – С. 24–25.

31. *Бондаренко В. М., Д. С. Чеботарьов* О положительно определенных формах Титса для неограниченных частично упорядоченных множеств с инволюцией // Нелінійні коливання. – 2005. – Т. 8, N1. – С. 9–17

32. *Bondarenko V. M.* On a conjecture on the Tits quadratic form // Вісник Київського університету (серія: фізика і математика). – 2005. – N3. – С. 20–23.

33. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadratic forms. – Lectures Noths in Math. – **1099**. – Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer-Verlag, 1984. – 376 p.

34. *Dräxler P., de la Peña J. A.* Tree algebras with non-negative Tits form // Comm. Algebra. – 2000. – N8. – P. 3993-4012.

35. *Dräxler P., Drozd Yu. A., Golovachtchuk N. S., Ovsienko S. A., Zeldich M. V.* Towads the classification of sincere weakly positive unit forms // Europ. J. Combinatorics – 1995. – Vol. 16. – P. 1–16.

36. *Dräxler P., Golovachtchuk N., Ovsienko S, de la Peña J. A.* Coordinates of maxinal roots of weakly non-negative unit forms // Colloq. Math. – 1998. – Vol. 78, N2. – P. 163–193.

37. *de la Peña J. A.* The Tits forms of a tame algebra // Representation theory of algebras and related topics, CMS Conf. Proc. – 1996. – Vol. 19. – P. 159–183.

38. *Marmaridis N.* Strongly indefinite quadratic forms and wild algebras // Banach Center Publ. – 1990. – Vol. 26, Part 1. – P. 341–351.

39. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1973. – Т. 37. – N4. – С. 752–791.

40. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1975. – Т. 39. – N5. – С. 963–991.

41. *Овсиенко С. А.* Ограниченность корней целых слабо положительных форм // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 106–123.

42. *Ройтер А. В.* Корни целых квадратичных форм // Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. – 1978. – Т. 148. – С. 201–210.

43. *Simson D.* A reduction functor, tameness and Tits form for a class of orders // J. Algebra. – 1995. – Vol. 174, N2. – P. 430-452.

44. *Завадский А. Г.* Серии представлений и форма Титса. – Киев, 1981. – 32 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 81.27).

45. *Степочкина М. В.* Об одном свойстве положительно определенных квадратичных форм, соответствующих конечным частично упорядоченным множествам // Нелінійні коливання. – 2005. – Т. 8, N4. – С. 544–552.

46. *Bondarenko V. M. , Styopochkina M. V.*. On posets of width two with positive Tits form // Algebra Duscrete Math. – 2005. – N2. – P. 20–35.

47. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно конечного типа // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 22–33.

48. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, N3. – С. 18–58.

49. *Styopochkina M. V.* On positive (non-negative) Tits form and (min, max)-equivalence of posets// 5th Int. Algebraic Conf. in Ukraine (Odessa, July 20 – 27, 2005): Abstr. – Odessa, 2005. – P. 207–208.

50. *Степочкина М. В.* О положительно определенных формах для одного класса биграфов// Тез. докл. 6-й междунар. конф. по геометрии и топологии (Черкассы, 5 – 10 сент. 2005г.). – Черкаси, 2005. – С. 87–88.

51. *Бондаренко В.М., Степочкина М. В.* О классификации положительно определенных квадратичных форм специального вида. Тез. докл. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры" (Брест, 5 – 8 окт. 2005г.). – Минск, 2005. – Ч.1. – С. 65–68.

52. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On finite posets of inj-finite type and their Tits forms // Algebra Duscrete Math. – 2006. – N2. – P. 17–21.

53. *Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно означеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, N3. – P. 320–325.

54. *Степочкина М. В.* Об инъективных представлениях частично упорядоченных множеств// V науч. конф. "Ломоносовские чтения":

Тез. докл. (Севастополь, 3 – 5 мая 2006г.). – Севастополь, 2006. – С. 166.

55. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* О конечных частично упорядоченных множествах inj-конечного типа// XI Міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука: Тези доп. (Київ, 18 – 20 трав. 2006р.). – Київ, 2006. – С. 336.

56. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.*. On injective representations of posets and the quadratic Tits form// Int. Conf. Radicals ICOR-2006 (Kyiv, July 30 – August 5, 2006). Abstr. – Kyiv, 2006. – P. 24–25.

57. *MacLane S.* An algebra of additive relations// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1961. – Vol. 47. – P. 1043 – 1051.

58. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras. – Encyclopaedia of Math. Sci. (Algebra Vlll). – Vol. 73. – Springer-Verlag, Berlin, 1992, 177 p.

59. *Loupias M.* Indecomposable representations of finite ordered sets // Lectures Noths in Math. – 1984. – Vol. 488. – P. 201–209.

60. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces// Linear algebra Appl. – 2003. – Vol. 365. – P. 45 – 90.

61. *Дрозд Ю. А.* Матричные задачи и категории матриц // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. 28. – С. 144–153.

62. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. 28. – С. 32–41.

63. *Gabriel P.* Representations indecomposables des ensembles ordonnes. Seminaire P.Dubreil (26e annee: 1972/73), Algebre, Exp. No. 13, 4pp. Secretariat Mathematique, Paris, 1973.

64. *Dräxler P., Reiten I., Smal∅ S., Solberg O.* Exact categories and vector space categories // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 351, N2. – P.647–682.