УДК 629.7.534.14.001

В.С. Ловейкін
д.т.н., професор
Ю.В. Човнюк
к.т.н., доцент
О.Ю. Костина
аспірантка
Національний університет біоресурсів і природокористування України
Рецензент – член редколегії “Вісник ЖНАЕУ”, д.т.н. Лось Л.В.

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ АНІЗОТРОПНОГО ШАРУВАЛЬНОГО НАПІВПРОСТОРУ ПРИ ДІЇ РУХЛИВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Проведено динамічний аналіз напруженого стану анізотропного шаруватого напівпростору при дії на нього рухливого навантаження. Отримано точні аналітичні результати у вигляді скінченних рядів по плоских хвилях.

Постановка проблеми

Динамічні задачі механіки деформівних середовищ належать до розряду досить важких задач, які досліджуються методами математичної фізики. Вивченню розповсюдження хвиль у суцільних середовищах присвячена велика кількість теоретичних та експериментальних досліджень. Слід зазначити, що постановка і розв’язок задач опису хвильових явищ у суцільних середовищах і тілах завжди пов’язані із введенням схематизованих моделей та ідеальних процесів, які відповідають певним спостереженням та дослідам з реальними тілами.

Складність розв’язку задач, що присвячені аналізу неусталених коливань суцільних середовищ, обумовлена багатьма причинами, наприклад, великим розмаїттям реологічних властивостей реальних середовищ (анізотропія, в’язкість, повзучість, пластичність, неоднорідність та ін.), що призводить до великого розмаїття схематизованих моделей для опису у тому чи іншому наближенні реальних явищ й не дозволяє створити єдину математичну модель суцільного середовища, складністю рівнянь, які описують динамічну поведінку стискуваного суцільного середовища тощо.

Недивлячись на велику кількість математичних моделей суцільних середовищ, математичні методи розв’язку динамічних задач розроблено, в основному, для таких середовищ, як акустичне, пружне й в’язкопружне, рух котрих описується лінійними диференціальними або інтегро-диференціальними рівняннями.

Однак слід зазначити, що навіть для вказаних середовищ у лінійній постановці проблема дуже далека від повного вирішення.

Аналіз останніх публікацій з теми дослідження

Найбільш простим класом динамічних задач у вказаних середовищах є усталені процеси, котрим присвячена велика кількість різних досліджень [1–4].

Математичні методи, які застосовуються при вирішенні нестаціонарних коливань суцільних акустичних та пружних середовищ, досить різноманітні. Основними є такі: метод інваріантно-функціональних рішень, запропонований В.І. Смирновим і С.Л. Соболєвим; метод Вінера-Хопфа; метод інтегральних перетворень; узагальнені методи Вольтерра та Адамара; метод плоских хвиль; метод променевої оптики; метод розділення змінних; різноманітні чисельні методи.

У даній роботі наведені лише ті результати щодо динаміки акустичних, пружних середовищ та тіл, котрі отримані аналітичними методами. Саме ці результати дозволяють визначити параметри хвильового поля у різних точках фізичного простору та у будь-який момент часу в усіх розглянутих задачах.

Мета роботи полягає у встановленні основних параметрів напруженого стану анізотропного шаруватого напівпростору при дії на останній рухливого навантаження. При цьому динамічний аналіз об'єкта дослідження проведений суто аналітичними методами.

Виклад основного змісту дослідження

Розглянемо задачу про вплив рухливих навантажень на анізотропний півпростір та анізотропний прошарок.

Оскільки для анізотропних середовищ потенціалів поздовжніх і поперечних хвиль не існує, то задачі для анізотропного середовища будемо розв'язувати методом розділення змінних, тобто методом Фур'є.

Нехай на поверхні анізотропного прошарку, який лежить на анізотропному півпросторі, переміщується з постійною швидкістю D навантаження у вигляді дельта-функції П. Дірака. Для довільно розподіленого навантаження розв'язок неважко отримати, застосовуючи інтеграл Дюамеля.

У припущенні, що матеріал прошарку та напівпростору є трансверсально-ізотропним, рух у прошарку і напівпросторі можна описати такими рівняннями:

$$\begin{cases} \left(C_{13}+C_{44}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial y}+C_{44}\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+C_{11}\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\rho_1\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \left(C_{13}+C_{44}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+C_{33}\cdot\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+C_{44}\cdot\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}=\rho_1\cdot\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{1}$$

При цьому $0 \geq y \geq -h$, $-\infty < x < +\infty$.

$$\begin{cases} \left(E_{13}+E_{44}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial y}+E_{44}\cdot\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+E_{11}\cdot\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\rho_2\cdot\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \left(E_{13}+E_{44}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+E_{33}\cdot\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+E_{44}\cdot\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}=\rho_2\cdot\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Для рівнянь системи (2) $y \le -h$, $-\infty < x < +\infty$, де C_{13}, C_{11}, C_{33}, C_{44}, E_{13}, E_{11}, E_{33}, E_{44} – пружні постійні прошарку товщиною h та напівпростору відповідно; ρ_1, ρ_2 – їх щільності; (u_1, V_1) та (u_2, V_2) – складові вектора переміщень у прошарку та у напівпросторі.

Зручніше перейти до рухливих координат x', y' за формулами:

$$x' = x + Dt, \quad y' = y, \qquad (3)$$

причому, з метою спрощення, штрихи у подальшому будемо опускати.

У рухливих координатах рівняння (1) та (2) набудуть вигляду:

$$\begin{cases} \left(\tilde{N}_{13}+\tilde{N}_{44}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial y}+C_{44}\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\left(\tilde{N}_{11}-\rho_1 D^2\right)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0; \\ \left(\tilde{N}_{13}+\tilde{N}_{44}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+C_{33}\cdot\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\left(\tilde{N}_{44}-\rho_1 D^2\right)\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}=0; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \left(E_{13}+E_{44}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial y}+E_{44}\cdot\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\left(E_{11}-\rho_2 D^2\right)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=0; \\ \left(E_{13}+E_{44}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+E_{33}\cdot\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+\left(E_{44}-\rho_2 D^2\right)\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Компоненти тензора напруження у прошарку та у напівпросторі виражаються такими формулами:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{(1)}=C_{11}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+C_{13}\cdot\dfrac{\partial V_1}{\partial y};\ \sigma_{yy}^{(1)}=C_{33}\cdot\dfrac{\partial V_1}{\partial y}+C_{13}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x};\ \tau_{xy}^{(1)}=C_{44}\cdot\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+\dfrac{\partial V_1}{\partial x}\right); \\ \sigma_{xx}^{(2)}=E_{11}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+E_{13}\cdot\dfrac{\partial V_2}{\partial y};\ \sigma_{yy}^{(2)}=E_{33}\cdot\dfrac{\partial V_2}{\partial y}+E_{13}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x};\ \tau_{xy}^{(2)}=\tau_{yx}^{(2)}=E_{44}\cdot\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+\dfrac{\partial V_2}{\partial x}\right). \end{cases} \qquad (6)$$

Граничні умови задачі такі (початкові умови у даній постановці відсутні):

$$\begin{cases} \sigma_{yy}^{(1)}=-P\cdot\sin\theta\cdot\delta(x),\ \tau_{yx}^{(1)}=P\cdot\cos\theta\cdot\delta(x) \quad \text{при } y=0; \\ u_1=u_2,\ V_1=V_2,\ \sigma_{yy}^{(1)}=\sigma_{yy}^{(2)},\ \tau_{xy}^{(1)}=\tau_{xy}^{(2)} \quad \text{при } y=-h, \end{cases} \qquad (7)$$

де θ – кут нахилу навантаження до осі OX.

Розіб'ємо задачу (4), (5), (7) на дві, коли при $y = 0$

1) $\sigma_{yy}^{(1)} = -P \cdot \sin\theta \cdot \delta(x), \quad \tau_{yx}^{(1)} = 0;$ (8)

2) $\sigma_{yy}^{(1)} = 0, \quad \tau_{yx}^{(1)} = P \cdot \cos\theta \cdot \delta(x).$ (9)

Розглянемо першу задачу, коли при $y = 0$ маємо умови (8). Задача (9) буде розв'язуватись аналогічно.

Частинні розв'язки рівнянь (4), (5) шукаємо у вигляді:

$$\begin{cases} u_1 = A \cdot e^{kqy} \cdot \sin kx, \quad V_1 = B \cdot e^{kqy} \cdot \cos kx; \\ u_2 = C \cdot e^{k\eta y} \cdot \sin kx, \quad V_2 = G \cdot e^{k\eta y} \cdot \cos kx. \end{cases} \tag{10}$$

Підставляючи (10) у рівняння (4), (5) й прирівнюючи визначники систем до нуля, для визначення q та η отримаємо рівняння:

$$\begin{cases} q^4 + \dfrac{C_{44}\cdot(\rho_1 D^2 - C_{44}) + C_{33}\cdot(\rho_1 D^2 - C_{11}) + (C_{13}+C_{44})^2}{C_{33}\cdot C_{44}} \cdot q^2 + \dfrac{(\rho_1 D^2 - C_{11})(\rho_1 D^2 - C_{44})}{C_{33}\cdot C_{44}} = 0; \\ \eta^4 + \dfrac{E_{44}\cdot(\rho_2 D^2 - E_{44}) + E_{33}\cdot(\rho_2 D^2 - E_{11}) + (E_{13}+E_{44})^2}{E_{33}\cdot E_{44}} \cdot \eta^2 + \dfrac{(\rho_2 D^2 - E_{11})(\rho_2 D^2 - E_{44})}{E_{33}\cdot E_{44}} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Серед чотирьох коренів η обираємо лише ті, реальна частина яких більше нуля.

Отже,

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{4} \int_0^{\infty} A_n \cdot e^{kq_n y} \cdot \sin(kx) dk;$$
$$V_1(x,y) = \sum_{n=1}^{4} \int_0^{\infty} \alpha_n \cdot A_n \cdot e^{kq_n y} \cdot \cos(kx) dk; \tag{12}$$

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{2} \int_0^{\infty} C_n \cdot e^{k\eta_n y} \cdot \sin(kx) dk;$$
$$V_2(x,y) = \sum_{n=1}^{2} \int_0^{\infty} \beta_n \cdot C_n \cdot e^{k\eta_n y} \cdot \cos(kx) dk; \tag{13}$$

де

$$\alpha_n = \frac{C_{44} q_n^2 + \rho_1 D^2 - C_{11}}{q_n \cdot (C_{13} + C_{44})}, \qquad \beta_n = \frac{E_{44} \eta_n^2 + \rho_2 D^2 - E_{11}}{\eta_n \cdot (E_{13} + E_{44})}. \tag{14}$$

Невідомі A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2 визначаємо з умов (7), (8), що набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{4} (C_{33}\alpha_n \cdot q_n + C_{13})A_n = -\frac{P \cdot \sin\theta}{\pi k}; \quad \sum_{n=1}^{4} (\alpha_n - q_n) \cdot A_n = 0; \\ \sum_{n=1}^{4} (C_{33}\alpha_n \cdot q_n + C_{13}) \cdot e^{-kq_n h} \cdot A_n = \sum_{n=1}^{2} (E_{33} \cdot \beta_n \cdot \eta_n + E_{13}) \cdot e^{-k\eta_n h} \cdot C_n; \\ \sum_{n=1}^{4} (\alpha_n - \beta_n) \cdot e^{-kq_n h} \cdot A_n = \frac{E_{44}}{C_{44}} \cdot \sum_{n=1}^{2} (\beta_n - \eta_n) \cdot e^{-k\eta_n h} \cdot C_n; \\ \sum_{n=1}^{4} A_n \cdot e^{-kq_n h} = \sum_{n=1}^{2} C_n \cdot e^{-k\eta_n h}; \\ \sum_{n=1}^{4} \alpha_n \cdot A_n \cdot e^{-kq_n h} = \sum_{n=1}^{2} \beta_n \cdot C_n \cdot e^{-k\eta_n h}. \end{cases} \tag{15}$$

При виведенні рівнянь (15) дельта-функція представляється у вигляді:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \cos(kx) dk. \tag{16}$$

Виключаючи невідомі $C_1 \cdot e^{-k\eta_1 h}$, $C_2 \cdot e^{-k\eta_2 h}$ з системи (15), приведемо її до такого вигляду:

$$\sum_{m=1}^{4} (C_{33} \cdot \alpha_n \cdot q_n + C_{13}) \cdot A_n = -\frac{P \cdot \sin\theta}{\pi k}; \quad \sum_{n=1}^{4} (\alpha_n - q_n) \cdot A_n = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{4} \left\{ (C_{33}\alpha_n \cdot q_n + C_{13}) - \frac{E_{44}}{C_{44}} \cdot \left[\frac{(\beta_2 - \alpha_n)}{(\beta_2 - \beta_1)} \cdot (E_{33} \cdot \beta_1 \cdot \eta_1 + E_{13}) - \frac{(\beta_1 - \alpha_n)}{(\beta_2 - \beta_1)} \cdot (E_{33} \cdot \beta_2 \cdot \eta_2 + E_{13}) \right] \right\} \times \tag{17}$$

$$\times A_n \cdot e^{-kq_n h} = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{4} \left\{ (\alpha_n - q_n) - \frac{E_{44}}{C_{44}} \cdot \left[\frac{(\beta_1 - \eta_1)(\beta_2 - \alpha_n)}{(\beta_2 - \beta_1)} - \frac{(\beta_2 - \eta_2)(\beta_2 - \alpha_n)}{(\beta_2 - \beta_1)} \right] \right\} \cdot A_n \cdot e^{-kq_n h} = 0.$$

Розв’язок системи (17) має вигляд:

$$A_1 = -\frac{P \cdot \sin\theta}{\pi \cdot k} \cdot \frac{\Delta_1(k)}{\Delta(k)}, \quad A_2 = \frac{P \cdot \sin\theta}{\pi \cdot k} \cdot \frac{\Delta_2(k)}{\Delta(k)}, \quad A_3 = -\frac{P \cdot \sin\theta}{\pi \cdot k} \cdot \frac{\Delta_3(k)}{\Delta(k)},$$

$$A_4 = \frac{P \cdot \sin\theta}{\pi \cdot k} \cdot \frac{\Delta_4(k)}{\Delta(k)}, \tag{18}$$

де

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1(k)=\omega_7\cdot(\omega_{12}\cdot\omega_{14}-\omega_{10}\cdot\omega_{16})\cdot e^{-kh(q_2+q_4)}+\omega_8\cdot(\omega_{10}\cdot\omega_{15}-\omega_{11}\cdot\omega_{14})\cdot e^{-kh(q_2+q_3)}+\\
&+\omega_6\cdot(\omega_{11}\cdot\omega_{16}-\omega_{12}\cdot\omega_{15})\cdot e^{-kh(q_3+q_4)};\\
&\Delta_2(k)=\omega_8\cdot(\omega_9\cdot\omega_{15}-\omega_{11}\cdot\omega_{13})\cdot e^{-kh(q_1+q_3)}+\omega_7\cdot(\omega_{12}\cdot\omega_{13}-\omega_9\cdot\omega_{16})\cdot e^{-kh(q_1+q_4)}+\\
&+\omega_5\cdot(\omega_{11}\cdot\omega_{16}-\omega_{12}\cdot\omega_{15})\cdot e^{-kh(q_3+q_4)};\\
&\Delta_3(k)=\omega_8\cdot(\omega_9\cdot\omega_{14}-\omega_{10}\cdot\omega_{13})\cdot e^{-kh(q_1+q_2)}+\omega_6\cdot(\omega_{12}\cdot\omega_{13}-\omega_9\cdot\omega_{16})\cdot e^{-kh(q_1+q_4)}+\\
&+\omega_5\cdot(\omega_{10}\cdot\omega_{16}-\omega_{12}\cdot\omega_{14})\cdot e^{-kh(q_2+q_4)};\\
&\Delta_4(k)=\omega_7\cdot(\omega_9\cdot\omega_{14}-\omega_{10}\cdot\omega_{13})\cdot e^{-kh(q_1+q_2)}+\omega_6\cdot(\omega_{11}\cdot\omega_{13}-\omega_9\cdot\omega_{15})\cdot e^{-kh(q_1+q_3)}+\\
&+\omega_5\cdot(\omega_{10}\cdot\omega_{15}-\omega_{11}\cdot\omega_{14})\cdot e^{-kh(q_2+q_3)}.\\
&\Delta(k)=(\omega_3\cdot\omega_8-\omega_4\cdot\omega_7)(\omega_9\cdot\omega_{14}-\omega_{10}\cdot\omega_{13})\cdot e^{-kh(q_1+q_2)}+(\omega_9\cdot\omega_{15}-\omega_{11}\cdot\omega_{13})(\omega_4\cdot\omega_6-\omega_2\cdot\omega_8)\cdot e^{-kh(q_1+q_3)}+\\
&+(\omega_{12}\cdot\omega_{13}-\omega_9\cdot\omega_{16})(\omega_3\cdot\omega_6-\omega_2\cdot\omega_7)\cdot e^{-kh(q_1+q_4)}+(\omega_{10}\cdot\omega_{15}-\omega_{11}\cdot\omega_{14})(\omega_1\cdot\omega_8-\omega_4\cdot\omega_9)\cdot e^{-kh(q_2+q_3)}+\\
&+(\omega_{12}\cdot\omega_{14}-\omega_{10}\cdot\omega_{16})(\omega_1\cdot\omega_7-\omega_3\cdot\omega_5)\cdot e^{-kh(q_2+q_4)}+(\omega_{11}\cdot\omega_{16}-\omega_{12}\cdot\omega_{15})(\omega_1\cdot\omega_6-\omega_2\cdot\omega_5)\cdot e^{-kh(q_3+q_4)};\\
&\omega_i=(C_{13}+C_{33}\cdot\alpha_i\cdot q_i);\\
&\omega_{i+4}=\alpha_i-q_i;\\
&\omega_{i+8}=\left\{(C_{13}+\alpha_i\cdot q_i\cdot C_{33})-\frac{E_{44}}{C_{44}}\cdot\left[\frac{(\beta_2-\alpha_i)}{(\beta_2-\beta_1)}\cdot(E_{33}\cdot\beta_1\cdot\eta_1+E_{13})-\frac{(\beta_1-\alpha_i)}{(\beta_2-\beta_1)}\cdot(E_{33}\cdot\beta_2\cdot\eta_2+E_{13})\right]\right\};\\
&\omega_{i+12}=\left\{(\alpha_i-a_i)-\frac{E_{44}}{C_{44}}\cdot\left[\frac{(\beta_1-\eta_1)(\beta_2-\alpha_i)}{(\beta_2-\beta_1)}-\frac{(\beta_2-\alpha_i)(\beta_2-\eta_2)}{(\beta_2-\beta_1)}\right]\right\}\quad \text{при } i=1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Знаючи (u, V), напруження σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} у прошарку визначаємо за формулами:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}=\sum_{n=1}^{4}\int_0^\infty k(C_{11}+C_{13}\cdot\alpha_n\cdot q_n)\cdot A_n\cdot e^{kq_ny}\cdot\cos(kx)dk;\\
&\sigma_{yy}=\sum_{n=1}^{4}\int_0^\infty k(C_{13}+C_{33}\cdot\alpha_n\cdot q_n)\cdot A_n\cdot e^{kq_ny}\cdot\cos(kx)dk;\\
&\tau_{xy}=\sum_{n=1}^{4}\int_0^\infty k(\alpha_n-q_n)\cdot C_{44}\cdot A_n\cdot e^{kq_ny}\cdot\sin(kx)dk.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Обчислити квадратуру у виразах (20) в загальному випадку досить складно. Тому аналіз цих виразів будемо здійснювати для частинних випадків.

Перш ніж проводити аналіз величин напружень (20), розглянемо рівняння (11) для визначення q та η:

$$q_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}, \quad q_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}},$$
$$\eta_{1,2} = -\sqrt{-\frac{a_0}{2} \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{4} - b_0}}, \tag{21}$$

де

$$a = \frac{C_{44} \cdot \left(\rho_1 D^2 - C_{44}\right) + C_{33} \cdot \left(\rho_1 D^2 - C_{11}\right) + \left(C_{13} - C_{44}\right)^2}{C_{33} \cdot C_{44}}; \quad b = \frac{\left(\rho_1 D^2 - C_{11}\right) \cdot \left(\rho_1 D^2 - C_{44}\right)}{C_{33} \cdot C_{44}};$$

$$a_0 = \frac{E_{44} \cdot \left(\rho_2 D^2 - E_{44}\right) + E_{33} \cdot \left(\rho_2 D^2 - E_{11}\right) + \left(E_{13} - E_{44}\right)^2}{E_{33} \cdot E_{44}}.$$

Залежно від співвідношень між a, b, a_0, b_0 може виникати таке:

1) при $a^2/4 \ge b > 0$, $a_0^2/4 \ge b_0 > 0$ q_n та η_n – суто уявні при $a > 0$, $a_0 > 0$ та дійсні при $a < 0$, $a_0 < 0$ відповідно;

2) при $0 < a^2/4 \le b$, $0 < a_0^2/4 \le b_0$, q_2, q_4, $\eta_{1,\,2}$ – комплексні з від'ємною дійсною частиною відповідно;

3) при $b_0 < 0$, $b < 0$, $a <> 0$, $a_0 <> 0$ всі, q_1, q_2, η_1, η_2 – дійсні числа, а $q_{3,\,4}$ – суто уявні.

Обчислимо напруження σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} у випадку, коли $a^2/4 \ge b > 0$, $a_0^2/4 \ge b_0 > 0$, $a > 0$, $a_0 > 0$. У даному випадку маємо:

$$q_{1,2} = \pm i \cdot \alpha; \; q_{3,4} = \pm i \cdot \beta; \; \eta_1 = -i \cdot \eta_{10}; \; \eta_2 = -i \cdot \eta_{20}, \tag{23}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}, \quad \eta_{10,20} = \sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{4} - b_0^2}}, \tag{24}$$

Вирази (20) можна надати у вигляді:

$$\sigma_{yy} = \frac{2P \cdot \sin\theta}{\alpha\beta\gamma_1 \cdot \left(C_{13} + C_{44}\right)} \cdot \left\{\beta \cdot \left[C_{33} \cdot \alpha^2 \cdot \left(C_{44}\alpha^2 + \rho_1 D^2 - C_{11}\right) + C_{13}\left(C_{13} + C_{44}\right)\right] \cdot N_1(x, y, \alpha, \beta) + \right.$$
$$\left. + \alpha \cdot \left[C_{33} \cdot \beta^2 \cdot \left(C_{44}\beta^2 + \rho_1 D^2 - C_{11}\right) + C_{13}\left(C_{13} + C_{44}\right)\right] \cdot N_2(x, y, \alpha, \beta) \right\};$$
$$\sigma_{xx} = \frac{2P \cdot \sin\theta}{\alpha\beta\gamma_1 \cdot \left(C_{13} + C_{44}\right)} \cdot \left\{\beta \cdot \left[C_{13} \cdot \alpha^2 \cdot \left(C_{44}\alpha^2 + \rho_1 D^2 - C_{11}\right) + C_{11}\left(C_{13} + C_{44}\right)\right] \cdot N_1(x, y, \alpha, \beta) + \right. \tag{25}$$
$$\left. + \alpha \cdot \left[C_{13} \cdot \beta^2 \cdot \left(C_{44}\beta^2 + \rho_1 D^2 - C_{11}\right) + C_{11}\left(C_{13} + C_{44}\right)\right] \cdot N_2(x, y, \alpha, \beta) \right\};$$
$$\tau_{xy} = \frac{2P \cdot \sin\theta}{\gamma_1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left[\alpha + \dfrac{C_{44}\alpha^2 + \rho_1 D^2 - C_{11}}{\alpha \cdot \left(C_{13} + C_{44}\right)}\right] \cdot N_3(x, y, \alpha, \beta) + \left[\beta + \dfrac{C_{44}\beta^2 + \rho_1 D^2 - C_{11}}{\beta \cdot \left(C_{13} + C_{44}\right)}\right] \cdot \\ \cdot N_4(x, y, \alpha, \beta) \end{array} \right\};$$

де

$$N_1=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{f_1\cdot(\alpha,\beta,y,k)}{f_0\cdot(\alpha,\beta,k)}\cdot\cos(kx)dk;\quad N_2=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{f_2\cdot(\alpha,\beta,y,k)}{f_0\cdot(\alpha,\beta,k)}\cdot\cos(kx)dk;$$
$$N_3=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{f_3\cdot(\alpha,\beta,y,k)}{f_0\cdot(\alpha,\beta,k)}\cdot\sin(kx)dk;\quad N_4=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{f_4\cdot(\alpha,\beta,y,k)}{f_0\cdot(\alpha,\beta,k)}\cdot\sin(kx)dk; \tag{26}$$

$$f_0=1-\left[\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\cos kh(\alpha+\beta)+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cos kh(\beta-\alpha)\right];$$
$$f_1=\gamma_4\cdot\cos(k\alpha y)-\gamma_5\cdot\cos[kh(\alpha+\beta)+\alpha ky]-\gamma_6\cdot\cos[kh(\beta-\alpha)-\alpha ky];$$
$$f_2=\gamma_7\cdot\cos(k\beta y)-\gamma_8\cdot\cos[kh(\beta-\alpha)+k\beta y]-\gamma_9\cdot\cos[kh(\alpha+\beta)+\beta ky]; \tag{27}$$
$$f_3=\gamma_4\cdot\sin(k\alpha y)+\gamma_6\cdot\sin[kh(\beta-\alpha)-k\alpha y]-\gamma_5\cdot\sin[kh(\alpha+\beta)+\alpha ky];$$
$$f_4=\gamma_7\cdot\sin(k\beta y)-\gamma_8\cdot\sin[kh(\beta-\alpha)+k\beta y]-\gamma_9\cdot\sin[kh(\alpha+\beta)+\beta ky];$$

$$\gamma_1=4(\omega_2\omega_6\omega_{12}\omega_{16}+\omega_4\omega_8\omega_{10}\omega_{14}):\quad \gamma_2=(\omega_2\omega_8+\omega_4\omega_6)\cdot(\omega_{12}\omega_{14}+\omega_{10}\omega_{16});$$
$$\gamma_3=(\omega_2\omega_8-\omega_4\omega_6)\cdot(\omega_{12}\omega_{14}-\omega_{10}\omega_{16});\quad \gamma_4=2\omega_6\omega_{12}\omega_{16};\quad \gamma_5=\omega_8\cdot(\omega_{12}\omega_{14}-\omega_{10}\omega_{16}); \tag{28}$$
$$\gamma_6=\omega_8\cdot(\omega_{12}\omega_{14}+\omega_{10}\omega_{16});\quad \gamma_7=2\omega_8\omega_{10}\omega_{14};\quad \gamma_8=\omega_6\cdot(\omega_{12}\omega_{14}+\omega_{10}\omega_{16});$$
$$\gamma_9=\omega_6\cdot(\omega_{10}\omega_{16}-\omega_{12}\omega_{14}).$$

Інтеграли N_1, N_2, N_3, N_4 можна легко обчислити; отримаємо:

$$N_{1,3}=\gamma_4\cdot\sum_{n=0}^{n_1}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{\upsilon=1}^{n}C_1^{\upsilon}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{n-\upsilon}\cdot\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^{\upsilon}\cdot\sum_{m=1}^{\upsilon}C_{\upsilon}^{m}\sum_{l=1}^{n-\upsilon}C_{n-\upsilon}^{l}\{\delta\cdot[\alpha y-x-(\upsilon-2m)\cdot h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-$$
$$-2l)\cdot h(\beta-\alpha)]\pm\delta\cdot[\alpha y+x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\}-\gamma_5\cdot\sum_{n=0}^{n_2}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{\upsilon=1}^{n}C_n^{\upsilon}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^{\upsilon}\times$$
$$\times\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{n-\upsilon}\cdot\sum_{m=1}^{\upsilon}C_{\upsilon}^{m}\sum_{l=1}^{n-\upsilon}C_{n-\upsilon}^{l}\cdot\{\delta\cdot[h(\beta+\alpha)+\alpha y-x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\pm \tag{29}$$
$$\pm\delta\cdot[h(\alpha+\beta)+\alpha y+x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\}\pm\gamma_6\cdot\sum_{n=0}^{n_3}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{\upsilon=1}^{n}C_n^{\upsilon}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^{\upsilon}\times$$
$$\times\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{n-\upsilon}\cdot\sum_{m=1}^{\upsilon}C_{\upsilon}^{m}\sum_{l=1}^{n-\upsilon}C_{n-\upsilon}^{l}\cdot\{\delta\cdot[(\beta-\alpha)h-\alpha y-x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\pm$$
$$\pm\delta\cdot[h(\beta-\alpha)-\alpha y+x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\}.$$

$$N_{2,4}=\gamma_7\cdot\sum_{n=0}^{n_4}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{\upsilon=1}^{n}C_n^{\upsilon}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^{\upsilon}\cdot\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{n-\upsilon}\cdot\sum_{m=1}^{\upsilon}C_{\upsilon}^{m}\sum_{l=1}^{n-\upsilon}C_{n-\upsilon}^{l}\{\delta\cdot[\beta y-x-(\upsilon-2m)\cdot h(\alpha+\beta)-(n-2l-$$

$$-\zeta)\cdot h(\beta-\alpha)]\pm\delta\cdot[\beta y+x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\}-\gamma_9\cdot\sum_{n=0}^{n_5}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{\upsilon=1}^{n}C_n^{\upsilon}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^{\upsilon}\times$$

$$\times\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{n-\upsilon}\cdot\sum_{m=1}^{\upsilon}C_{\upsilon}^{m}\sum_{l=1}^{n-\upsilon}C_{n-\upsilon}^{l}\cdot\{\delta\cdot[h(\beta+\alpha)+\beta y-x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\pm \quad (30)$$

$$\pm\delta\cdot[h(\alpha+\beta)+\beta y+x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\}-\gamma_8\cdot\sum_{n=0}^{n_6}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{\upsilon=1}^{n}C_n^{\upsilon}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^{\upsilon}\times$$

$$\times\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{n-\upsilon}\cdot\sum_{m=1}^{\upsilon}C_{\upsilon}^{m}\sum_{l=1}^{n-\upsilon}C_{n-\upsilon}^{l}\cdot\{\delta\cdot[h(\beta-\alpha)+\beta y-x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\pm$$

$$\pm\delta\cdot[h(\beta-\alpha)+\beta y+x-(\upsilon-2m)h(\alpha+\beta)-(n-\upsilon-2l)h(\beta-\alpha)]\},$$

де

$$\begin{gathered} n_1=E\left[\frac{x-\alpha y}{h(\alpha+\beta)}\right];\quad n_2=E\left[\frac{x-\alpha y}{h(\alpha+\beta)}-1\right];\quad n_3=E\left[\frac{x-\alpha y-h(\beta-\alpha)}{h(\alpha+\beta)}\right]; \\ n_4=E\left[\frac{x-\beta y}{h(\alpha+\beta)}\right];\quad n_5=E\left[\frac{x-\beta y}{h(\alpha+\beta)}-1\right];\quad n_6=E\left[\frac{x-\beta y-h(\beta-\alpha)}{h(\alpha+\beta)}\right]. \end{gathered} \quad (31)$$

У (31) $E(\zeta)$ – ціла частина числа ζ.

Отже, отриманий точний розв’язок задачі у частинному випадку у вигляді скінченних рядів по плоских хвилях. Якщо на границі задачі розподілені навантаження:

$$\sigma_{yy}=-P\cdot\varphi(x)\ \text{ при }\ x\geq 0\ \text{ й }\ \sigma_{yy}=0\ \text{ при }\ x<0, \quad (32)$$

то у виразах (29), (30) необхідно $\delta(\xi)$ замінити на $\varphi(\xi)$.

Аналогічно можна розглянути інші частинні випадки задачі. Задаючи параметри середовища та рухливого навантаження, за формулами (25), (29), (30) неважко підрахувати поле напружень у прошарку товщиною h.

(Слід зазначити, що обчислення квадратур (26) зводиться до обчислення інтегралів типу:

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(k\gamma)dk}{1-a\cdot\cos(hk\theta_1)-b\cdot\cos(hk\theta_2)}.$$

Вважаючи, що $|a|+|b|<1$, вираз для I можна привести до вигляду:

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(k\gamma)\sum_{n=0}^{\infty}\left(a\cdot\cos(kh\theta_1)+b\cdot\cos(kh\theta_2)\right)^n dk=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{\upsilon=0}^{n}C_n^\upsilon a^\upsilon b^{n-\upsilon-1}\cdot$$

$$\left\{\sum_{m=1}^{\upsilon}C_\upsilon^m\left[\sum_{l=1}^{n-\upsilon-1}C_{n-\upsilon-1}^l\left[\delta\left(\gamma-(\upsilon-2n)h\theta_1-(n-\upsilon-1-2l)h\theta_2\right)\right]\right]\right\},$$

де C_p^q – коефіцієнти біному Ньютона).

Розглянемо чисельний приклад. Нехай по поверхні прошарку, який лежить на жорсткій основі й жорстко з нею зв'язаний, переміщується навантаження виду

$$f(x)=P_0\cdot e^{-x}\cdot H(x).$$

На рисунку 1 показана зміна σ_{yy} у точці y = 0,5 залежно від x при таких значеннях параметрів:

$$(D\rho/a_{11})^2=2;\quad (D\rho/a_{44})=7;\quad a_{33}/(\rho D^2)=\frac{a_{11}}{\rho D^2}+a_0;\quad a_{13}=a_{11}-2a_{44}.$$

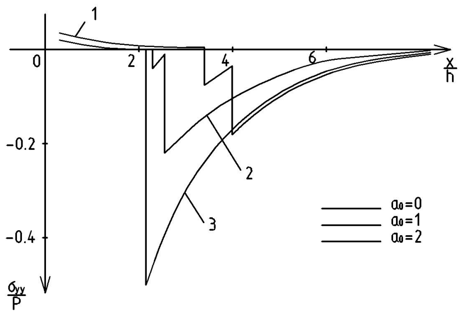

Рис. 1. **Залежність напруження від відстані в анізотропному прошарку: 1- a_0 = 0; 2 - a_0 = 1; 3 - a_0 = 2**

Висновки

1. Отриманий точний розв'язок задачі оцінки напруженого стану анізотропного шаруватого напівпростору при дії на нього рухливого навантаження у вигляді скінчених рядів по плоских хвилях.
2. Отримані результати можуть у подальшому слугувати для уточнення та вдосконалення існуючих розрахункових схем подібних систем (задач).

Література

1. *Филиппов И.Г.* Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах / *И.Г. Филиппов, О.А. Егорычев.* – М. : Машиностроение, 1977. – 304 с.
2. *Филиппов И.Г.* Неустановившиеся движения сплошных сжимаемых сред / *И.Г. Филиппов, В.Г. Чебан.* – Кишинёв : Штиинца, 1973. – 436 с.

3. *Филиппов И.Г.* О распространении плоской волны в трёхслойной анизотропной среде / *И.Г. Филиппов* // Геология и геофизика – 1971. – № 11. – С. 92–98.
4. *Рахматулин Х.А.* Двухмерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред / *Х.А. Рахматулин.* – Ташкент : Фан, 1969. – 288 с.