

## **ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РЯДІВ ФУР’Є ДЛЯ АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ЛІНІЙНИХ В’ЯЗКОПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ ТА ВИРОДЖЕНИХ ТІЛ (СТРИЖНІВ)**

*Проведено всебічний динамічний аналіз нестационарних коливань лінійних в'язкопружних середовищ та вироджених тіл (стрижнів).*

### **Постановка проблеми**

Досить складним розділом динаміки суцільних середовищ є динаміка в'язкопружних лінійних середовищ.

Вивчення впливу в'язких властивостей на розповсюдження хвиль у твердих тілах являє значний інтерес, оскільки всі реальні тверді тіла мають у тій чи іншій мірі в'язкі властивості і, крім того, багато нових сучасних матеріалів типу полімерів і пластмас адекватно описуються моделлю в'язкопружного середовища.

В роботі розглянуто деякі задачі розповсюдження хвиль у в'язкопружних середовищах (вироджених тілах типу стрижнів). При цьому припущено, що зв'язок між компонентами тензорів напружень та деформацій вольтерівського типу записується у вигляді больцманівських співвідношень.

### **Аналіз останніх публікацій за темою дослідження**

В зв'язку з широким застосуванням теорії в'язкопружності при дослідженні поведінки нових матеріалів та традиційних матеріалів у незвичайних умовах в останні роки ХХ ст. велику увагу було приділено теорії та методам розрахунку в'язкопружних середовищ при різного роду впливах [1–18].

Найбільш складними задачами є нестационарні задачі, котрі виникають при розрахунках в'язкопружних тіл на дію імпульсних навантажень, що, у той же час, ще дуже мало досліджені.

Принцип відповідності разом із застосуванням методів інтегральних перетворень, що викладені у [1], дуже складний, оскільки вимагає, по-перше, розв'язку відповідної пружної задачі, а по-друге, – обернення перетворень, що можливо лише для найпростіших задач при досить унікальних видах ядер в'язкопружних операторів в околі фронту в'язкопружної хвилі [9, 10, 12–15, 19,

20–23]. В даних роботах досліджується одновимірні або плоскі двовимірні в'язкопружні хвилі. В роботі [24] методом [25] для частинного виду ядра отриманий алгоритм для чисельної реалізації задачі на ПЕОМ.

Метод рядів за власними функціями у випадку постійного значення коефіцієнта Пуассона викладений у монографії [17] й у роботах [26, 27].

Метод, що викладений у даній роботі, дозволяє значно розширити клас розв'язуваних задач за більш узагальнених граничних умовах й за будь-яких видах ядер в'язкопружних операторів.

**Мета даної роботи** полягає у встановленні основних параметрів нестационарних коливань лінійних в'язкопружних середовищ і, зокрема, вироджених тіл – стрижнів. При цьому застосований метод рядів Фур'є, викладений у роботах [1–8].

### **Виклад основного змісту дослідження**

#### 1. Лінійні в'язкопружні тіла. Основні задачі, співвідношення та рівняння.

Відомо [1, 15, 17], що в'язкопружними тілами називають суцільні середовища, в яких опір дії напружень залежить від швидкості деформації, що пов'язано з такими явищами, як повзучість при постійному напруженні й релаксація при постійній деформації.

Ідеальним пружним елементом є пружина, а ідеальним в'язким елементом – амортизатор.

Найпростішим гіпотетичними в'язкопружними моделями є моделі Максвелла та Фойгта. Модель Максвелла, або елемент Максвелла, характеризується двома елементами – пружиною та амортизатором, з'єднаними послідовно, а модель Фойгта, або елемент Фойгта, складається з тих самих елементів, але з'єднаних паралельно.

Зрозуміло, що жодна з вказаних моделей не описує поведінку реальних в'язкопружних матеріалів. Тому необхідно при моделюванні поведінки реальних матеріалів залучати більшу кількість пружних та в'язких елементів, тобто досліджувати моделі, які складаються або з дискретного, або з неперервного числа пружних і в'язких елементів.

Зі зростанням кількості різноманітних нових матеріалів, типів пластмас і все більшого застосування їх у техніці (у т. ч. й у сільськогосподарському машинобудуванні) набуває великого значення дослідження в'язкопружних властивостей цих матеріалів.

При вивченні поведінки в'язкопружних тіл необхідно знати зв'язок між компонентами тензорів напружень та деформацій у будь-якій точці тіла й у будь-який момент часу, причому будемо припускати, що в'язкопружний матеріал є ізотропним.

Умова ізотропності дозволяє звести шукану залежність до двох операторів, які мають або диференціальну, або ж інтегральну форму.

У випадку диференціальних операторів залежність між компонентами тензорів напружень та деформацій має вигляд:

$$\begin{cases} Q_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{ij} = Q_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon + Q_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_{ij}; \\ Q_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \cdot Q_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_{ij}, \quad i \neq j, \end{cases} \quad (1)$$

де  $(i, j)$  «пробігають» значення  $(x, y, z)$  декартової системи координат:

$$\begin{cases} Q_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \sum_{k=0}^{n_0} \left( a_k \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right); & Q_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \sum_{k=0}^{n_1} \left( b_k \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right); \\ Q_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \sum_{k=0}^{n_2} \left( c_k \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right); & \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \end{cases} \quad (2)$$

де  $a_k, b_k, c_k$  – параметри, що характеризують в'язкопружний матеріал.

Інтегральна форма зв'язку типу (1) передбачається заданою у вигляді больцманівських співвідношень:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = L(\varepsilon) + 2M(\varepsilon_{ij}); \\ \sigma_{ij} = M(\varepsilon_{ij}), \quad i \neq j, \end{cases} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} L(h) &= \lambda h - \int_{-\infty}^t f_1(t - \xi) h(\xi) d\xi; \\ M(h) &= \mu \cdot h - \int_{-\infty}^t f_2(t - \xi) h(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $f_1(t), f_2(t)$  – ядра в'язкопружних операторів (4) й дорівнюють:

$$\begin{cases} f_1(t) = \lambda \cdot \int_0^{\infty} \frac{h_1(\xi)}{\xi^2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\xi}\right) d\xi + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{\tau_k} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right); \\ f_2(t) = \mu \cdot \int_0^{\infty} \frac{h_2(\xi)}{\xi^2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\xi}\right) d\xi + \mu \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\tau_k} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right), \end{cases} \quad (5)$$

де  $h_1(\xi), h_2(\xi), \gamma_k, \beta_k$  – спектральні неперервні та дискретні функції термінів релаксації  $\xi$  й  $\tau_k$  відповідно, причому  $h_1(\xi)$  та  $h_2(\xi)$  обмежені на напівінтервалі  $0 \leq \xi < \infty$ ;  $h_1(\xi), h_2(\xi) \sim O(\xi^{1+\alpha}), 0 < \alpha < 1$ .

При розв'язанні багатьох задач для в'язкопружного середовища має місце так званий «принцип відповідності» [1]. Його визначення наведемо для двох класів задач.

#### А. Квазістатичні задачі

Квазістатичною будемо називати задачу, в якій можна знехтувати інерційними членами у рівняннях руху, тобто рівняння руху набувають вигляду рівнянь рівноваги:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + \rho X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

де “кома” означає диференціювання за відповідною змінною, причому 1 відповідає змінній  $X$ , 2 – змінній  $Y$ , 3 – змінній  $Z$  у декартовій системі координат;  $X_i$  – масові сили.

Застосовуючи перетворення Лапласа за часом до рівнянь (6) і співвідношень (1) чи (3), приведемо їх до вигляду:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j}^{(0)} + \rho X_i^{(0)} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{Q_1(p)}{Q_0(p)} \varepsilon_{ij}^{(0)} + \frac{Q_2(p)}{Q_0(p)} \varepsilon_{jj}^{(0)} \quad \text{ààî} \quad \sigma_{ij}^{(0)} = L(p) \varepsilon_{ij}^{(0)} + 2M(p) \varepsilon_{jj}^{(0)}, \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{Q_2(p)}{Q_0(p)} \varepsilon_{ij}^{(0)} \quad \text{ààî} \quad \sigma_{ij}^{(0)} = M(p) \varepsilon_{ij}^{(0)},$$

де  $p$  – параметр перетворення Лапласа;

$$\Phi^{(0)} = \int_0^{\infty} \Phi e^{-pt} dt, \quad (9)$$

$\Phi(t)$  – будь-яка з розглянутих функцій. В'язкопружне тіло у початковий момент знаходиться у стані спокою.

Якщо операція взяття перетворення Лапласа законна, і якщо порівняти крайову задачу (6)–(8) із відповідною крайовою задачею для пружного матеріалу, то неважко зазначити, що ці задачі відрізняються лише тим, що постійні модулі пружної задачі замінюють на модулі, які залежать від  $p$ .

Звідси впливає принцип відповідності для квазістатичних задач [15].

В розв'язку, котрий отриманий для пружного матеріалу, залежні змінні й граничні умови замінюють їх перетвореннями Лапласа, а модулі пружності – відповідними модулями, залежними від  $p$ . Розв'язок задачі для в'язкопружного матеріалу отримаємо оберненням перетворень залежних змінних, що отримані при розв'язанні задачі для пружного матеріалу.

### Б. Динамічні задачі

Задачі даного класу відрізняються від попередніх задач тим, що у рівняннях руху (7) інерційні члени не відрізняються, тобто рівняння (7) набувають вигляду:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (10)$$

де  $u_i$  – компоненти вектора переміщення.

До рівнянь (10) і співвідношень (1) чи (3) застосуємо одностороннє перетворення Фур'є за часом, котре визначається як:

$$\Phi^{(1)}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-iwt} dt, \quad (11)$$

де  $\Phi(t)$  – будь-яка функція. Тоді отримаємо:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} + \rho X_i^{(1)} + \rho w^2 u_i^{(1)} = 0, \quad (12)$$

і співвідношення (8).

Відповідні рівняння для пружного тіла після застосування перетворення Фур'є відрізняються від рівнянь (12), а також (8) лише тим, що  $Q/Q_0$  чи  $L(w)$  замінюють на  $\lambda$ ,  $Q_2/Q$  чи  $M(w)$  на  $\mu$ .

Якщо граничні умови для відповідних крайових задач для в'язкопружного та пружного тіл співпадають і якщо вид граничних умов з плином часу не змінюється, принцип відповідності для динамічних задач можна сформулювати так.

Розв'язок динамічної задачі для в'язкопружного матеріалу можна отримати із розв'язку відповідної задачі для пружного тіла, застосовуючи одностороннє перетворення Фур'є до розв'язку, отриманому для пружного матеріалу, заміною пружних постійних відповідними в'язкопружними комплексними модулями чи піддатливостями й оберненням перетворення.

Хоча для динамічних задач в'язкопружності можна застосувати і перетворення Лапласа.

Перетворимо двовимірні рівняння руху в'язкопружних середовищ [2, 3].

Рівняння руху для в'язкопружних середовищ за відсутності масових сил у випадку плоского деформованого стану у напруженнях мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (13)$$

де  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  – компоненти тензора напружень;  $(u, v)$  – компоненти вектора переміщення;  $\rho$  – щільність.

Закон Гука для в'язкопружних середовищ, що мають пружність та в'язку течію, візьмемо у вигляді (1), де

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$a_j, b_j, c_j$  – параметри, що характеризують в'язкопружний матеріал, причому без обмежень загальності можна вважати  $a_0 = 1$ .

Візьмемо від першого виразу (1) похідну по  $x$  при  $\alpha = x$  та від другого – похідну по  $y$  при  $\alpha = x, \beta = y$  і складемо. Потім – похідну по  $y$  від першого виразу (1) при  $\alpha = y$  та від другого – похідну по  $x$  при  $\alpha = x, \beta = y$  і також складемо. Використовуючи рівняння (13), отримаємо рівняння руху в переміщеннях:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n_1} \left\{ b_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right\} + \sum_{j=0}^{n_2} \left\{ c_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n_2} \left\{ c_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right\} = \\ & = \rho \cdot \sum_{j=0}^{n_0} \left\{ a_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n_1} \left\{ b_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right\} + \sum_{j=0}^{n_2} \left\{ c_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n_2} \left\{ c_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right\} = \\ & = \rho \cdot \sum_{j=0}^{n_0} \left\{ \alpha_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Введемо потенціальні функції  $\phi$  та  $\psi$  за формулами:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (16)$$

Підставляючи (16) у (14), (15), наведемо їх у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ P_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \phi - \rho P_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ P_3 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \psi - \rho P_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\} = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ P_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \phi - \rho P_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ P_3 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \psi - \rho P_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

де оператори  $P_i \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$ :

$$P_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \sum_{j=0}^n (b_j + c_j) \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j}; \quad P_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \sum_{j=0}^{n_0} a_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} = Q_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right); \quad (18)$$

$$P_3\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n_2} c_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial t^j} = \frac{1}{2} \cdot Q_2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad n = \max(n_1, n_2). \quad (19)$$

Зі співвідношень (17) випливає, що:

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \varphi = \rho P_2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (20)$$

$$P_3\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \psi = \rho P_2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (21)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа.

$$\text{При } P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \lambda + 2\mu; \quad P_2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 1; \quad P_3\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \mu, \quad (22)$$

де  $\lambda, \mu$  – константи Ламе матеріалу; рівняння (20), (21) переходять у хвильові рівняння для потенціалів поздовжніх та поперечних хвиль.

У тривимірному випадку рівняння (20), (21) виводяться аналогічно. Вважаючи:

$$\vec{u} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \psi, \quad \vec{\psi} = \psi(0, \psi_1, \psi_2), \quad (23)$$

для  $\varphi$  отримаємо рівняння (20), а для  $\vec{\psi}$  – рівняння (21), причому  $\Delta$  вже буде тривимірним оператором Лапласа.

У випадку інтегральних співвідношень (3), вважаючи  $\vec{u}$  рівним (23), для  $\varphi$  та  $\vec{\psi}$  отримаємо інтегро-диференціальні рівняння:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \int_{-\infty}^t [f_1(t - \xi) + 2f_2(t - \xi)] \Delta \varphi d\xi = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (24)$$

$$\Delta \vec{\psi} - \frac{1}{\mu} \cdot \int_{-\infty}^t f_2(t - \xi) \Delta \vec{\psi} d\xi = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2}, \quad (25)$$

де  $a^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$ ,  $b^2 = \mu / \rho$ .

Для пружного середовища  $f_1(t) = f_2(t) = 0$ .

## 2. Метод розв'язку задач динаміки у лінійних в'язкопружних середовищах. Одновимірні в'язкопружні хвилі у стрижнях.

В даному пункті дослідження будуть використані результати роботи [4].

Дослідження різноманітних динамічних задач про неусталені коливання в'язкопружних середовищ зводяться до розв'язку диференціальних рівнянь (20), (21) чи інтегро-диференціальних рівнянь (24), (25) відносно функцій  $\varphi$  та  $\psi$  при заданих початкових та граничних умовах.

Дані задачі настільки складні з погляду математики, що навіть найпростіша задача про розповсюдження плоскої (поздовжньої чи поперечної) хвилі у лінійному в'язкопружному середовищі в загальній постановці (тобто при довільних видах диференціальних чи інтегральних в'язкопружних операторів) не вирішена аналітично. Точні її розв'язки побудовані лише при найпростіших видах в'язкопружних операторів.

Тому знаходження загальних розв'язків рівнянь (20), (21) чи (24), (25) представляє надзвичайно важку задачу.

Сутність методу, який дозволяє розв'язати широкий клас динамічних задач для лінійних в'язкопружних середовищ полягає у наступному.

1. В зв'язку з тим, що ненульові, граничні умови задаються, як правило, на скінченній частині граничної поверхні (або на контурі) й діють протягом скінченного інтервалу часу, ці ненульові граничні умови необхідно продовжити періодично впродовж границі чи за часом.

2. Період зміни ненульових граничних умов впродовж граничної поверхні чи за часом повинен бути більшим за міру вказаної скінченної граничної поверхні чи інтервалу часу. При цьому вплив хвиль, породжених попередніми інтервалами часу чи попередніми скінченними граничними поверхнями з ненульовими граничними умовами, був несуттєвим до моменту приходу наступного імпульсу.

3. При введенні такої періодичності можна шукати розв'язок рівнянь у вигляді ряду Фур'є за відповідними поверхневими координатами чи за часом, що дозволяє зменшити кількість незалежних змінних, від яких не будуть залежати коефіцієнти ряду Фур'є.

4. Граничні умови також наводяться у вигляді ряду Фур'є за відповідними координатами чи за часом.

5. Аналогічно можна розв'язати задачу Коші, коли задаються ненульові початкові умови, відмінні від нуля лише на обмеженій частині фізичного простору.

Даний метод дозволяє розв'язати ряд задач у в'язкопружних середовищах, причому отримані теоретичні розв'язки зручні для чисельної реалізації на ПЕОМ.

Розглянемо далі кілька задач, які описують просторово-часову еволюцію збурень (кінематично-силових), що розповсюджуються у вигляді одновимірних в'язкопружних хвиль вздовж вироджених тіл (стрижнів).

**Задача 1.** Задача про розповсюдження одновимірної плоскої пружної хвилі у стрижні (чи напівпросторі) розв'язана у [1]. Звідки випливає, що:



$$\sigma_{xx} = -f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (26)$$

у будь-якій точці стрижня, коли на кінці стрижня при  $x = 0$  прямо прикладено напруження  $\sigma_{xx}(0, t) = -f(t)$ . Крім того, для пружного стрижня справедливе таке співвідношення:

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\rho c \dot{u}(x, t), \quad (\dot{\phantom{x}}) \equiv \frac{d}{dt}, \quad (27)$$

де  $\dot{u}$  – швидкість переміщення точок матеріалу стрижня;  $c$  – швидкість розповсюдження хвилі стиснення у стрижні.

Застосовуючи «принцип відповідності» для  $\sigma_{xx}$  у в'язкопружному стрижні, отримаємо вираз:

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\rho \int_0^t c(t - \xi) d\dot{u}(x, \xi). \quad (28)$$

Підставляючи співвідношення (28) у одновимірне рівняння руху, приведемо його до вигляду:

$$-\int_0^t c(t - \xi) d\dot{\varepsilon}(x, \xi) = \ddot{u}(x, t). \quad (29)$$

Проінтегрувавши співвідношення (29) двічі по  $t$ , вважаючи, що  $\varepsilon(0, 0) = 0$ , отримаємо:

$$-\int_0^t c(t - \xi) \varepsilon(x, \xi) d\xi = u(x, t). \quad (30)$$

Формула (30) дає зв'язок між величиною деформації  $\varepsilon(x, t)$  і переміщенням  $u(x, t)$  у точках в'язкопружного стрижня у будь-який момент часу  $t$ .

Її можна використати при застосуванні експериментальних методів дослідження напружень. Наприклад, знаючи  $u(x, t)$ , можна за формулою (30) визначити деформацію  $\varepsilon(x, t)$ , а тим самим – і напруження  $\sigma_{xx}(x, t)$ , знаючи закон Гука для в'язкопружного середовища.

Зі співвідношення (28) можна інтегруванням по частинах отримати таку формулу:

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\rho \left[ c(0)\dot{u}(x, t) + c'(0) \cdot u(x, t) + c''(0) \cdot \int_0^t u(x, \xi) d\xi + \dots \right], \quad (31)$$

яка є узагальненням формули (27) для пружного стрижня.

З іншого боку, для  $\sigma_{xx}$  у в'язкопружному середовищі при  $f(t) = -P_0\delta(t)$  маємо вираз [15]:

$$\sigma_{xx}(x,t) = -\frac{P_0}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} e^{i\omega[t - \sqrt{\rho I(i\omega)} \cdot x]} d\omega \right\}, \quad (32)$$

де  $I(i\omega)$  – функція комплексної піддатливості.

Наприклад, для тіла Максвелла:

$$I(i\omega) = \frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta}, \quad I(i\omega) = \frac{1}{E} - \frac{i}{\omega\eta}, \quad (33)$$

де  $E$  – модуль Юнга;  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості;  $\omega$  – частота.

Для тіла Фойгта:

$$I(i\omega) = \frac{1}{E + i\omega\eta} = \frac{1}{E \cdot \left(1 + \frac{\omega^2\eta^2}{E^2}\right)} - \frac{i}{\omega\eta \left(1 + \frac{E^2}{\omega^2\eta^2}\right)}. \quad (34)$$

Результат (33) співпадає з (34) при заміні  $E \rightarrow E \cdot \left(1 + \frac{\omega^2\eta^2}{E^2}\right)$ ;  $\omega\eta \rightarrow \omega\eta \cdot \left(1 + \frac{E^2}{\omega^2\eta^2}\right)$ ,

тому введемо такі позначення:

$$E^* \rightarrow E \cdot \left(1 + \frac{\omega^2\eta^2}{E^2}\right); \quad \omega\eta^* \rightarrow \omega\eta \cdot \left(1 + \frac{E^2}{\omega^2\eta^2}\right). \quad (35)$$

Для тіла Максвелла матимемо:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x,t) = & -P_0 \cdot \exp\left\{-\frac{E}{2\eta} \cdot t\right\} \cdot \left\{ \delta\left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}}x\right) + \frac{\sqrt{\rho E}x}{2\eta} \cdot \left[ I_1\left(\frac{E}{2\eta} \sqrt{t^2 - \frac{\rho}{E}x^2}\right) \right] \times \right. \\ & \left. \times \left(t^2 - \frac{\rho}{E}x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot H\left(t - \frac{\rho}{E}x\right) \right\}, \quad (36) \end{aligned}$$

де  $\delta(\zeta)$  – функція Дірака;  $H(\zeta)$  – функція Хевісайда;  $I_1(\zeta)$  – функція Бесселя уявного аргументу.

Для тіла Фойгта маємо:

$$\sigma_{xx}(x,t) = -P_0 \cdot \exp\left\{-\frac{E^*}{2\eta^*} \cdot t\right\} \cdot \left\{ \delta\left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E^*}}x\right) + \frac{\sqrt{\rho E^*}x}{2\eta^*} \cdot \left[ I_1\left(\frac{E^*}{2\eta^*} \sqrt{t^2 - \frac{\rho}{E^*}x^2}\right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left( t^2 - \frac{\rho}{E^*} x^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot H \left( t - \frac{\rho}{E^*} x \right) \} \quad (37)$$

З (37) випливає, що для тіла Максвелла (Фойгта) імпульс вздовж стрижня розповсюджується зі швидкістю  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  ( $c = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}}$ ) зі згасанням  $\sqrt{\frac{\rho E}{2\eta}} \left( \sqrt{\frac{\rho E^*}{2\eta^*}} \right)$ ;

за ним слідує хвиля напруження скінченної амплітуди.

Аналогічно у випадку [15]

$$I(i\omega) = \frac{1}{K} \cdot i\omega^{-\frac{2}{3}}. \quad (38)$$

Для  $\sigma_{xx}$  отримаємо вираз:

$$\sigma_{xx} = -\frac{P_0}{t} \cdot F_{\frac{2}{3}} \left( \frac{\sqrt{\rho} x}{\sqrt{K} \cdot t^{\frac{2}{3}}} \right), \quad (39)$$

де

$$F_{\frac{2}{3}}(z) = 2 \cdot \exp \left( -\frac{2z^3}{27} \right) \cdot \left[ \frac{z^2}{3^{4/3}} \cdot A_i \left( \frac{z^2}{3^{4/3}} \right) - \frac{z}{3^{2/3}} \cdot A_i' \left( \frac{z^2}{3^{4/3}} \right) \right], \quad (40)$$

де  $A_i(\zeta)$  – функція Ейрі;  $A_i'(\zeta) = \frac{dA_i}{d\zeta}$ ;  $K$  – константа.

При довільних видах ядер в'язкопружних операторів можна застосувати метод, викладений у [6].

Будемо вважати, що напруження  $\sigma_{xx} = -f(t)$  при  $x = 0$  діє в інтервалі часу  $t_1 \leq t \leq t_2$ , причому без обмеження узагальнення можна вважати, що  $t_1 \gg (t_2 - t_1)$ . Припустимо, що функція  $f(t)$  періодична з періодом  $2T$  ( $T > 2t_1$ ) і непарна, причому  $T$  обирається так, щоб імпульс, який діє у період  $-t_2 \leq t \leq -t_1$ , практично не впливав на хвильове поле, породжене імпульсом за час  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Тоді переміщення  $u(x, t)$  можна шукати у вигляді:

$$u(x, t) = \text{Im} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot \exp \left( i \cdot \frac{k\pi}{T} \cdot t \right) \quad (41)$$

і для визначення функцій  $u_k(x)$  маємо систему

$$u_k''(x) + \frac{k^2 \pi^2}{c^2 \cdot T^2 \cdot (1 - E_k)} \cdot u_k(x) = 0; \quad (42)$$

$$u'_k(0) = -\frac{f_k}{\rho c^2} \cdot (1 - E_k), \quad u_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad u \rightarrow \infty, \quad (43)$$

де

$$E_k = E_k^{(1)} - i \cdot E_k^{(2)} = \frac{1}{E_0} \cdot \int_0^\infty f_1(t) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{k\pi}{T} \cdot t\right) dt, \quad (44)$$

$$f_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{T}\right) dt, \quad c^2 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}.$$

Розв'язок рівняння (42) за умови (43) та згасанні на нескінченості має вигляд:

$$u(x, t) = -Im \sum_{k=1}^{\infty} \frac{if_k \cdot T}{\rho c \pi k \sqrt{Q}} \cdot \exp\left\{i \cdot \frac{k\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x \cos \frac{\theta}{2}}{c \sqrt{Q}}\right) - i \cdot \frac{\theta}{2} - \frac{x \cdot k\pi}{cT \sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2}\right\}, \quad (45)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = -Im \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \exp\left\{i \cdot \frac{k\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x \cos \frac{\theta}{2}}{c \sqrt{Q}}\right) - \frac{x \cdot k\pi}{cT \sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2}\right\}, \quad (46)$$

де  $Q = |1 - E_k|$ ,  $\theta = \arg(1 - E_k)$ .

Отриманий розв'язок (45), (46) дозволяє зробити такі якісні висновки:

- 1) швидкість розповсюдження в'язкопружної хвилі залежить від частоти, тобто має місце явище дисперсії; форма імпульсу змінюється з часом;
- 2) згасання амплітуд в'язкопружних хвиль з відстанню також залежить від частоти;
- 3) форма зміни переміщення  $u$  має зсув за часом, що не спостерігається у форми зміни напруження  $\sigma_{xx}$ .

В пружних середовищах дані явища не мають місця.

**Задача 2.** Розглянемо задачу про розповсюдження одновимірної поперечної хвилі у стрижні, коли при  $x = 0$  задається напруження (дотичне)  $\tau_{xy} = -F(t)$ . Розв'язуючи задачу за тих самих припущень, що й у задачі 1, отримаємо:

$$V(x, t) = -Im \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k \cdot T}{\rho b \pi k \sqrt{Q_1}} \cdot \exp\left\{\frac{ik\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x \cos \frac{\theta_1}{2}}{b \sqrt{Q_1}}\right) - \frac{i\theta_1}{2} - \frac{xk\pi}{bT \sqrt{Q_1}} \cdot \sin \frac{\theta_1}{2}\right\}, \quad (47)$$

$$\tau_{xy}(x, t) = -Im \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot \exp \left\{ \frac{ik\pi}{T} \cdot \left( t - \frac{x \cos \frac{\theta_1}{2}}{b\sqrt{Q_1}} \right) - \frac{xk\pi}{bT\sqrt{Q_1}} \cdot \sin \frac{\theta_1}{2} \right\}, \quad (48)$$

де  $Q_1 = |1 - M_k|$ ,  $\theta_1 = \arg(1 - M_k)$ ,  $b^2 = \mu/\rho$ ,

$$\begin{cases} M_k = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} f_2(t) \cdot \exp\left(-i \frac{k\pi}{T} t\right) dt, \\ F_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{T} t\right) dt. \end{cases} \quad (49)$$

**Задача 3.** Узагальнимо задачі про вплив нормального  $\sigma_{xx}$  чи дотичного напруження  $\tau_{xy}$  на стрижень скінченної довжини  $l$ , причому додається ще одна нерівність  $T \gg l/b$  й одна з граничних умов на іншому кінці стрижня:

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \text{чи} \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \quad (50)$$

$$u = 0 \quad \text{чи} \quad V = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \quad (51)$$

Розв'язок задачі про нормальний удар при  $\sigma_{xx} = 0 (x = l)$  чи  $u(l, t) = 0$  має вигляд:

$$u(x, t) = -Im \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i \cdot f_k \cdot T}{\rho c \pi k R_1 \sqrt{Q_1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \exp \left[ i \frac{k\pi}{T} \cdot \left( t - \frac{x \cos \frac{\theta}{2}}{c\sqrt{Q}} \right) - i V_1 - i \frac{\theta}{2} - \frac{xk\pi}{cT\sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] - \\ - \exp \left[ i \frac{k\pi}{T} \cdot \left( t + \frac{(x-2l)k\pi}{cT\sqrt{Q}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right) - \right. \\ \left. - i V_1 - i \frac{\theta}{2} + \frac{(x-2l)k\pi}{cT\sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] \end{array} \right\} \quad (52)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = -Im \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{R_1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \exp \left[ i \frac{k\pi}{T} \cdot \left( t - \frac{x \cos \frac{\theta}{2}}{c\sqrt{Q}} \right) - \frac{xk\pi \cdot \sin \frac{\theta}{2}}{cT\sqrt{Q}} - iV_1 \right] - \\ - \exp \left[ i \frac{k\pi}{T} \cdot \left( t + \frac{(x-2l) \cos \frac{\theta}{2}}{c\sqrt{Q}} \right) + \frac{(x-2l)k\pi}{cT\sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - iV_1 \right] \end{array} \right\}, \quad (53)$$

або

$$u(x, t) = -Im \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i \cdot f_k \cdot T}{\rho c \pi k R_2 \sqrt{Q}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \exp \left[ i \frac{k\pi}{T} \cdot \left( t - \frac{x \cos \frac{\theta}{2}}{c\sqrt{Q}} \right) + iV_2 - i \frac{\theta}{2} - \frac{xk\pi}{cT\sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] + \\ + \exp \left[ i \frac{k\pi}{T} \cdot \left( t + \frac{(x-2l) \cos \frac{\theta}{2}}{c\sqrt{Q}} \right) + iV_2 - i \frac{\theta}{2} + \frac{(x-2l)k\pi}{cT\sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] \end{array} \right\}, \quad (54)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = -Im \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{R_2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \exp \left[ i \frac{k\pi}{T} \cdot \left( t - \frac{x \cos \frac{\theta}{2}}{c\sqrt{Q}} \right) - \frac{xk\pi}{cT\sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + iV_2 \right] + \\ + \exp \left[ i \frac{k\pi}{T} \cdot \left( t + \frac{(x-2l) \cos \frac{\theta}{2}}{c\sqrt{Q}} \right) + \frac{(x-2l)k\pi}{cT\sqrt{Q}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + iV_2 \right] \end{array} \right\}, \quad (55)$$

де

$$R_{1, 2} = \left\{ \left[ 1 \mp \exp \left( - \frac{k\pi l}{ct\sqrt{Q}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{k\pi l}{ct\sqrt{Q}} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \exp \left( - \frac{2k\pi l}{ct\sqrt{Q}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \left( \frac{k\pi l}{ct\sqrt{Q}} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right\},$$

$$V_{1,2} = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\exp\left(-\frac{k\pi l}{cT\sqrt{Q}} \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi l}{cT\sqrt{Q}} \cos \frac{\theta}{2}\right)}{1 \mp \exp\left(-\frac{k\pi l}{cT\sqrt{Q}} \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi l}{cT\sqrt{Q}} \cos \frac{\theta}{2}\right)} \right\}, \quad (56)$$

тобто  $R_2, V_2$  відрізняються від  $R_1, V_1$  лише знаком перед  $\cos\left(\frac{k\pi l}{cT\sqrt{Q}} \cos \frac{\theta}{2}\right)$ .

Аналогічно розв'язок задачі про дотичний удар при  $\tau_{xy}(l, t) = 0$  чи  $V(l, t) = 0$  може бути виражений формулами (52)–(56), де необхідно замінити  $\sigma_{xx}$  на  $\tau_{xy}$ ,  $u$  на  $V$ ,  $c$  на  $b$  та  $E_k$  на  $M_k$ .

**Задача 4.** Результати першої задачі (задача 1) можна узагальнити на випадок стрижня змінного поперечного перерізу.

Для даного випадку рівняння (42) можна звести до вигляду:

$$u_k''(x) + \frac{F'(x)}{F(x)} u_k'(x) + \frac{k^2 \pi^2}{c^2 T^2 (1 - E_k)} u_k(x) = 0 \quad (57)$$

за умови

$$u_k' = -\frac{f_k}{\rho c^2 (1 - E_k)} \quad (x = 0), \quad u_k = 0 \quad (x \rightarrow \infty), \quad (58)$$

де  $F(x)$  – товщина стрижня як функція від  $x$ .

Аналогічний розв'язок рівняння (57) можна побудувати лише для частинних видів функцій  $F(x)$ .

Якщо  $F(x) = 1 + \varepsilon x$ , де  $0 < \varepsilon < 1$ , то загальний розв'язок (57) має вигляд:

$$u_k(x) = C_1 \cdot H_0^{(1)} \left[ \frac{\sqrt{L_k}}{\varepsilon} \cdot (1 + \varepsilon x) \right] + C_2 \cdot H_0^{(2)} \left[ \frac{\sqrt{L_k}}{\varepsilon} \cdot (1 + \varepsilon x) \right], \quad (59)$$

де  $H_0^{(i)}(z)$  – функція Ганкеля нульового порядку  $i$ -го роду від  $z$ .

При  $F(x) = e^{\alpha x}$ , де  $0 < \alpha < 1$ :

$$u_k(x) = e^{\frac{\alpha}{2}x} \cdot \left[ C_1 \cdot e^{i\sqrt{L_k - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-i\sqrt{L_k - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot x} \right]. \quad (60)$$

При  $F(x) = ch^2(\alpha x)$  чи  $F(x) = \cos^2(\alpha x)$ , де  $0 < \alpha < 1$ :

$$u_k(x) = ch^{-1}(\alpha x) \cdot \left[ C_1 \cdot e^{i\sqrt{L_k - \alpha^2} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-i\sqrt{L_k - \alpha^2} \cdot x} \right], \quad (61)$$

або

$$u_k(x) = \cos^{-1}(\alpha x) \cdot \left[ C_1 \cdot e^{i\sqrt{L_k + \alpha^2} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-i\sqrt{L_k + \alpha^2} \cdot x} \right]. \quad (62)$$

У загальному випадку при  $F(x) = 1 + \varphi(x)$ , де  $\varepsilon$  та  $\varphi'(x)$  малі,  $\varphi(0) = 0$ ,

$$u_k(x) = C_1 \cdot e^{i\sqrt{L_k} \cdot x} \cdot \left\{ 1 - i\varepsilon\sqrt{L_k} \cdot e^{-2i\sqrt{L_k} \cdot x} \cdot \int_0^x \phi(\xi) e^{2i\sqrt{L_k} \cdot \xi} d\xi \right\} + \\ + C_2 \cdot e^{-i\sqrt{L_k} \cdot x} \cdot \left\{ 1 + i\varepsilon\sqrt{L_k} \cdot e^{2i\sqrt{L_k} \cdot x} \cdot \int_0^x \phi(\xi) e^{-2i\sqrt{L_k} \cdot \xi} d\xi \right\}, \quad (63)$$

$$\text{де } L_k = \frac{k^2 \pi^2}{c^2 T^2 (1 - E_k)}.$$

Постійні  $C_1$  та  $C_2$  знайдемо з умов (58):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0; C_2 = -T_k \sqrt{L_k} \cdot \left\{ H_0^{(2)'} \left[ \frac{\sqrt{L_k}}{\varepsilon} \right] \right\}^{-1}; \\ C_1 = 0; C_2 = T_k \sqrt{L_k} \cdot \left\{ i\sqrt{L_k - \frac{\alpha^4}{4}} + \frac{\alpha}{2} \right\}^{-1}; \\ C_1 = 0; C_2 = -iT_k L_k \cdot \left[ \sqrt{L_k - \alpha^2} \right]^{-1}; \\ C_1 = 0; C_2 = -iT_k L_k \cdot \left[ \sqrt{L_k + \alpha^2} \right]^{-1}; \\ C_1 = 0; C_2 = -iT_k \sqrt{L_k}; \\ T_k = \frac{f_k \cdot T^2}{(\rho k^2 \pi^2)}. \end{array} \right. \quad (64)$$

За відомими значеннями  $u_k(x)$  знаходимо переміщення  $u(x, t)$  та напруження  $\sigma_{xx}(x, t)$ .

### Чисельні розрахунки

Розглянемо результати чисельного розрахунку хвильового поля у в'язкопружному стрижні за

$$f_1(t) = \frac{\gamma}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad f(t) = -\sigma_0 \cdot \sin^q \left\{ \pi \cdot \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)} \right\}. \quad (65)$$



На рисунках 1 та 2 показано зміни  $\sigma_{xx}$  у фіксованих точках  $x$ , залежно від  $\tau$ , і зафіксованих  $\tau$ , залежно від  $x$ , відповідно при  $q = 2$  (суцільна лінія) та  $q = 4$  (пунктирна лінія) й  $\tau = 55$  с,  $\gamma = 0,13$ ,  $E_0 = 2,47 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c = 1740$  м/с.

Формула (46) була використана для визначення констант в'язкого оператора полімерного матеріалу [7] за допомогою порівняння чисельних розрахунків з результатами експерименту на основі методу динамічної фотопружності [28].

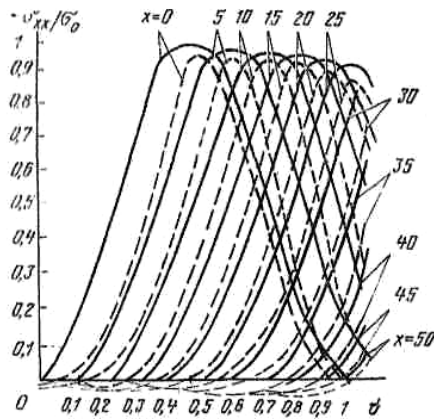


Рис. 1. Залежність напруження від часу в точках стрижня

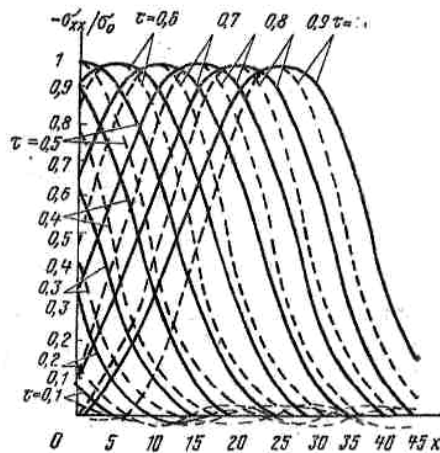


Рис. 2. Залежність напруження від координати за різних  $\tau$

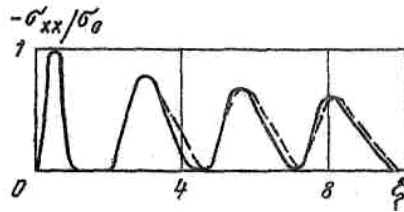


Рис. 3. Залежність напруження від часу у точках в'язкопружного стрижня

На рисунку 3 показано порівняння розрахункових (пунктирна лінія) та експериментальних (суцільна лінія) даних для матеріалу за:

$$f_1(t) = \sum_{m=1}^3 \frac{\gamma_m}{\tau_m} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right), \quad f(t) = -\sigma_0 \cdot \sin^4 \left\{ \pi \cdot \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)} \right\}, \quad (66)$$

що дозволило визначити  $\tau_m$  та  $\gamma_m$ , що дорівнюють

$$\tau_1 = 0,16 \cdot 10^5 \text{ мкс}; \quad \tau_2 = 0,16 \cdot 10^7 \text{ мкс}; \quad \tau_3 = 0,11 \cdot 10^8 \text{ мкс};$$

$$\gamma_1 = 0,3; \quad \gamma_2 = 0,15; \quad \gamma_3 = 0,07.$$

З рисунку 3 можна зробити висновок про те, що довжина імпульсу з відстанню збільшується, а амплітуда спадає досить інтенсивно.

### Висновки та перспективи досліджень

1. Проведено всебічний динамічний аналіз нестационарних коливань лінійних в'язкопружних середовищ та, зокрема, вироджених тіл (стрижнів), який дозволив аналітично визначити їх основні параметри та характеристики, особливості просторово-часової еволюції початкової форми прикладеного до середовища/тіла імпульсу (збудження).

2. Отримані результати мають у подальшому бути використані для вдосконалення та уточнення існуючих методів розрахунку подібних систем на стадії їх проектування (та моделювання).

### Література

1. Филиппов И.Г. Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах / И.Г. Филиппов, О.А. Егорычев. – М. : Машиностроение, 1977. – 304 с.
2. Филиппов И.Г. Об одном представлении уравнений движения вязкоупругих сред / И.Г. Филиппов // Механика полимеров. – 1973. – № 6. – С. 79–86.
3. Филиппов И.Г. Об одном методе решения уравнений движения вязкоупругих сред / И.Г. Филиппов // Механика полимеров. – 1973. – № 3. – С. 429–435.
4. Филиппов И.Г. Динамика вязкоупругих сред / И.Г. Филиппов // Избранные проблемы прикладной механики. – М. : Наука, 1974. – С. 701–708.

5. *Филиппов И.Г.* О некоторых динамических задачах для вязкоупругих сред / *И.Г. Филиппов, А.Ю. Попович* // Известия АН МССР. – 1975. – № 2. – С. 21–28.
6. *Филиппов И.Г.* Распространение волн сжатия в стержнях из вязкоупругого материала / *И.Г. Филиппов, А.Ю. Попович* // Прикладная механика. – 1976. – № 7. – С. 59–64.
7. *Филиппов И.Г.* Теоретико-экспериментальное исследование волн напряжений в вязкоупругих стержнях переменного сечения / *И.Г. Филиппов, А.В. Дмоховский, С.А. Скропкин* // Применение фотоупругости в инженерных задачах. – М. : Стройиздат, 1976. – С. 56–62.
8. *Филиппов И.Г.* Исследование волновых процессов в линейных вязкоупругих средах при воздействии динамических нагрузок / *И.Г. Филиппов* // Труды симпозиума по реологии грунтов. – Ереван, 1975. – С. 153–173.
9. *Achenbach I.D.* Vibrations of a viscoelastic body / *I.D. Achenbach* // AIAA. – 1967. – V. 5. – P. 1213.
10. *Arenz R.T.* Two-dimensional wave propagation in realistic viscoelastic material / *R.T. Arenz* // Journal of applied mechanics (ASME). Ser. E. – 1965. – V. 32, No. 2 – P. 28
11. *Chu B.T.* Stress waves in isotropic linear viscoelastic materials / *B.T. Chu* // Journal of mechanics. – 1962. – V.1. – P. 439.
12. *Knause W.G.* Uniaxial wave propagation in a viscoelastic material using measured material problems / *W.G. Knause* // Journal of applied mechanics (ASME). Ser. E. – 1966. – V. 35, No. 3. – P. 258
13. *Kolsky H.* The propagation of stress pulses in viscoelastic solids / *H. Kolsky* // Philosophical magazine. – 1956. – Ser. 8., No. 8. – P. 693–710.
14. *Tsai Y.M.* Surface wave propagation for linear viscoelastic solids / *Y.M. Tsai, H. Kolsky* // Journal of mechanics and physics of solids. – 1968. – V. 16. – P. 99.
15. *Бленд Д.* Линейная теория вязкоупругости / *Д. Бленд*. – М. : Мир, 1965. – 200 с.
16. *Ильюшин А.А.* Основы математической теории термовязкоупругости / *А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря*. – М. : Наука, 1970. – 280 с.
17. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости / *Р. Кристенсен*. – М. : Мир, 1974. – 340 с.
18. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций / *Ю.Н. Работнов*. – М. : Наука, 1966. – 752 с.
19. *Костров Б.В.* Распространение трещин в вязкоупругих средах / *Б.В. Костров, Л.В. Никитин, Л.М. Флитман* // Известия АН СССР. Физика земли. – 1970. – № 7. – С. 20–35.
20. *Шматкова А.А.* О движении нормальной нагрузки по границе вязкоупругой полосы / *А.А. Шматкова* // Механика твердого тела. – 1969. – № 4. – С. 173–178.

21. Шматкова А.А. Распространение полубесконечного разреза в вязкоупругой среде / А.А. Шматкова // Механика твердого тела. – 1972. – № 2. – С. 79–85.
22. Abubakar I. On the buried source in a viscoelastic halfspace / I. Abubakar // Pure and applied geophysics. – 1969. – V. 72. – №. 1. – P. 45.
23. Fillipov I.G. Einige fragen theorie der spannungswellenausbreitung in linear viscoelastsehen medium in verbindung / I.G. Fillipov, A.V. Dmochovesky // Deutsche Bauacademic. – Berlin, 1973.
24. Chwalezyk F. Propagation of two- dimensional nonstationary stress waves in a semiinfinite viscoelastic body, produced by a normal load moving over the surface with subsonic velocity / F.Chwalezyk, I.Rafa, Wlodarczyk // Proceedings of vibrational problem / Inst.Fund.Tech.Res., Polish Academy of Sci. – 1972. – V.13. – №. 3. – P. 241–257.
25. Cagniard L. Reflection and refraction of progressive seismic waves / L.Cagniard. – № V. : Mc Graw – Hill Book Company, Inc., 1962. — 600 p.
26. Valanis K.C. Axisymmetric wave propagation in a solid viscoelastic sphere / K.C. Valanis, C.T. Sun // Int. I Engng. Sci. – 1967. – V. 5. – P. 939.
27. Valanis K.C. The viscoelastic potential and its thermodynamic foundations / K.C. Valanis // Engng. Res. Inst. Iowa State Univ. – 1967. – Rept. 52.
28. Метод фотоупругости. – Т.2. – М. : Стройиздат, 1975. – 368 с.