УДК 62-192: 620.177

А.І. Бойко, проф., д-р техн. наук
Національний університет біоресурсів і природокористування України
О.В. Бондаренко, доц., канд. техн. наук
Миколаївський національний аграрний університет
В.М. Савченко, доц., канд. техн. наук
Житомирський національний агроекологічний університет

Вирішення основної матриці математичної моделі надійності функціонування активно резервованої технічної системи

Описано математичну модель надійності функціонування активно резервованої технічної системи. Встановлено визначник Δ основної матриці для виявлення в подальших дослідженнях значень ймовірності станів системи, на яких ґрунтуються необхідні критерії надійності активно дубльованої системи.
технічна система, ймовірність станів системи, резервована система, критерії надійності

А.И. Бойко
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
А.В. Бондаренко
Николаевский национальный аграрный университет
В.М. Савченко
Житомирский национальный агроэкологический университет
Решение основной матрицы математической модели надежности функционирования активно резервированной модели

Описано математическую модель надежности функционирования активно резервированной модели. Установлено определитель основной матрицы для определения в последующих исследованиях вероятности состояний системы, на которых основаны необходимые критерии надежности дублированной системы.
техническая система, вероятность состояний системы, резервированная система, критерии надежности

При математичному описі поведінки систем застосовуються стохастичні диференціальні рівняння. Об'єднання цих рівнянь у відповідні системи в перетвореннях Лапласа дають матриці, вирішення яких є основою для встановлення критеріїв надійності технічної системи, що досліджується. Так, в роботі [1] показано, що при активному резервуванні, старіючій техніці і незмінній базі її технічного обслуговування розширена матриця набуває виду

$$\begin{array}{cccccc|c}
\varphi_{00}(S) & \varphi_{00'}(S) & \varphi_{0'0'}(S) & \varphi_{01}(S) & \varphi_{01'}(S) & \varphi_{11}(S) & \text{вільні члени} \\
\hline
S+\lambda_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{11} & 1 \\
S & S & S & S & S & S & 1 \\
0 & -\lambda_{00'-0'0'} & S+\lambda_{0'0'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda_{00'-01} & 0 & S+\lambda_{01} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda_{0'0'} & -\lambda_{01} & S+\lambda_{0'1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{0'1} & S+\mu_{11} & 0
\end{array} . \qquad (1)$$

Необхідні для визначення критеріїв надійності ймовірності станів технічної системи встановлюються згідно правила Крамера

$$\varphi_{ij}(S) = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}, \qquad (2)$$

де Δ_{ij} – визначник матриці, що відповідає ймовірності $\varphi_{ij}(S)$ стану;

Δ – основна матриця досліджуємої системи рівнянь

Виходячи з означеного для розрахунку ймовірності будь-якого із станів, що представляють інтерес в дослідженні, необхідно вирішити основну матрицю Δ. Вона формується з розширеної матриці шляхом виключення вільних членів.

$$\Delta = \begin{vmatrix}
S+\lambda_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{11} \\
S & S & S & S & S & S \\
0 & -\lambda_{00'-0'0'} & S+\lambda_{0'0'} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda_{00'-01} & 0 & S+\lambda_{01} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda_{0'0'} & -\lambda_{01} & S+\lambda_{0'1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{0'1} & S+\mu_{11}
\end{vmatrix} . \qquad (3)$$

Отримана матриця має шостий ранг і для подальшого вирішення потребує понижень. Для цього розкладемо матрицю по елементам першого рядка.

$$\Delta=\left(S+\lambda_{00}\right)\left(-1\right)^{1+1}\left|\underbrace{\begin{matrix} S & S & S & S & S \\ -\lambda_{00'-0'0'} & S+\lambda_{0'0'} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_{00'-01} & 0 & S+\lambda_{01} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{0'0'} & -\lambda_{01} & S+\lambda_{0'1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{0'1} & S+\mu_{11} \end{matrix}}_{\Delta^{(1)}}\right|+ \quad (4)$$

$$+\left(-\mu_{11}\right)\left(-1\right)^{1+6}\left|\underbrace{\begin{matrix} S & S & S & S & S \\ 0 & -\lambda_{00'-0'0'} & S+\lambda_{0'0'} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{00'-01} & 0 & S+\lambda_{01} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{0'0'} & -\lambda_{01} & S+\lambda_{0'1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{0'1} \end{matrix}}_{\Delta^{(6)}}\right|.$$

Ввівши скорочене позначення отриманих нових матриць запишемо

$$\Delta=\left(S+\lambda_{00}\right)\Delta^{(1)}+\mu_{11}\Delta^{(6)}. \quad (5)$$

Наступним кроком потрібно понизити ранг матриць $\Delta^{(1)}$ і $\Delta^{(6)}$.

Для зменшення обчислювальних операцій розкладемо $\Delta^{(1)}$ по елементах другого рядка.

Тоді запишемо

$$\Delta^{(1)}=\left(-\lambda_{00'-0'0'}\right)\left(-1\right)^{(2+1)}\left|\underbrace{\begin{matrix} S & S & S & S \\ 0 & S+\lambda_{01} & 0 & 0 \\ -\lambda_{0'0'} & -\lambda_{01} & S+\lambda_{0'1} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{0'1} & S+\mu_{11} \end{matrix}}_{\Delta^{(1.1)}}\right|+ \quad (6)$$

$$+\left(S+\lambda_{0'0'}\right)\left(-1\right)^{(2+2)}\left|\underbrace{\begin{matrix} S & S & S & S \\ -\lambda_{00'-01} & S+\lambda_{01} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{01} & S+\lambda_{0'1} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{0'1} & S+\mu_{11} \end{matrix}}_{\Delta^{(1.2)}}\right|.$$

Скорочено маємо

$$\Delta^{(1)}=\lambda_{00'-0'0'}\Delta^{(1.1)}+\left(S+\lambda_{0'0'}\right)\Delta^{(1.2)} \quad (7)$$

Повертаючись до матриці $\Delta^{(6)}$ по аналогії з попереднім виконаємо пониження її рангу використовуючи другий рядок

$$\Delta^{(6)} = (-\lambda_{00'-0'0'})(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} S & S & S & S \\ 0 & 0 & S+\lambda_{01} & 0 \\ 0 & -\lambda_{0'0'} & -\lambda_{01} & S+\lambda_{0'1} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{0'1} \end{vmatrix} + \quad (8)$$

$$+(S+\lambda_{0'0'})(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} S & S & S & S \\ 0 & -\lambda_{00'-01} & S+\lambda_{01} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{1} & S+\lambda_{0'1} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{0'1} \end{vmatrix}.$$

В скороченому вигляді запишемо

$$\Delta^{(6)} = (-\lambda_{00'-0'0'})\Delta^{(6.2)} - (S+\lambda_{0'0'})\Delta^{(6.3)}. \quad (9)$$

Для подальшого вирішення матриці $\Delta^{(1.1)}$, $\Delta^{(1.2)}$, $\Delta^{(6.2)}$ і $\Delta^{(6.3)}$ потребують ще одного кроку в понижені рангу. Так для $\Delta^{(1.1)}$ можна записати

$$\Delta^{(1.1)} = (S+\lambda_{01})(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} S & S & S \\ -\lambda_{0'0'} & S+\lambda_{0'1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{0'1} & S+\mu_{11} \end{matrix}}_{\Delta^{(1.1.2)}} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Використовуючи до матриці $\Delta^{(1.1.2)}$ правило Саррюса маємо її рішення

$$\begin{aligned} \Delta^{(1.1.2)} &= S(S+\lambda_{0'1})(S+\mu_{11}) + S(-\lambda_{0'0'})(-\lambda_{0'1}) - (S+\mu_{11})(-\lambda_{0'0'})S = \\ &= S(S+\lambda_{0'1})(S+\mu_{11}) + S\lambda_{0'0'}\lambda_{0'1} + (S+\mu_{11})\lambda_{0'0'}S \end{aligned}. \quad (11)$$

Відповідно матриця $\Delta^{(1.2)}$ вирішується наступним чином

$$\Delta^{(1.2)} = (-\lambda_{00'-01})(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} S & S & S \\ -\lambda_{01} & S+\lambda_{0'1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{0'1} & S+\mu_{11} \end{matrix}}_{\Delta^{(1.2.1)}} \end{vmatrix} + \quad (12)$$

$$+(S+\lambda_{01})(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} S & S & S \\ 0 & S+\lambda_{0'1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{0'1} & S+\mu_{11} \end{matrix}}_{\Delta^{(1.2.2)}} \end{vmatrix}.$$

Отримані матриці $\Delta^{(1.2.1)}$ і $\Delta^{(1.2.2)}$ допускають вирішення, які представляються наступними рівняннями

$$\Delta^{(1.2.1)}=S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right)+S\left(-\lambda_{01}\right)\left(-\lambda_{0'1}\right)-\mu_{11}\left(-\lambda_{01}\right)S=$$
$$=S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right)+S\lambda_{01}\lambda_{0'1}+\mu_{11}\lambda_{01}S \quad , \qquad (13)$$

$$\Delta^{(1.2.2)}=S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right). \qquad (14)$$

По аналогії для матриць $\Delta^{(6.2)}$ і $\Delta^{(6.3)}$ маємо

$$\Delta^{(6.2)}=\left(S+\lambda_{01}\right)\left(-1\right)^{2+3}\begin{vmatrix} S & S & S \\ 0 & -\lambda_{0'0'} & S+\lambda_{0'1} \\ 0 & 0 & -\lambda_{0'1} \end{vmatrix}=$$
$$=-\left(S+\lambda_{01}\right)S\left(-\lambda_{0'0'}\right)\left(-\lambda_{0'1}\right)=-\left(S+\lambda_{01}\right)S\lambda_{0'0'}\lambda_{0'1} \quad . \qquad (15)$$

$$\Delta^{(6.3)}=\left(-\lambda_{0'1}\right)\left(-1\right)^{4+4}\begin{vmatrix} S & S & S \\ 0 & -\lambda_{00'-01} & S+\lambda_{01} \\ 0 & 0 & -\lambda_{01} \end{vmatrix}=$$
$$=-\lambda_{0'1}\left(S\left(-\lambda_{00'-01}\right)\left(-\lambda_{01}\right)\right)=-\lambda_{0'1}S\lambda_{00'-01}\lambda_{01} \quad . \qquad (16)$$

Таким чином усі проміжні рішення для встановлення основної матриці, що представляє знаменник виразу (1) отримані. Виконаємо операції по узагальненню результатів виконаних обчислень Підставляючи з (11) в (10) маємо

$$\Delta^{(1.1)}=\left[S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right)+S\lambda_{0'0'}\lambda_{0'1}+\left(S+\mu_{11}\right)\lambda_{0'0'}S\right]\left(S+\lambda_{01}\right). \qquad (17)$$

Відповідно, використовуючи результат (13 і 14) і підставляючи його у (12), запишемо

$$\Delta^{(1.2)}=\left[S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right)+S\lambda_{01}\lambda_{0'1}+\mu_{11}\lambda_{01}S\right]\lambda_{00'-01}+$$
$$+S\left(S+\lambda_{01'}\right)\left(S+\mu_{11}\right)\left(S+\lambda_{01}\right) \quad . \qquad (18)$$

Отримані дані (17 і 18) входять складовими у (6), що дає

$$\Delta^{(1)}=\lambda_{00'-0'0'}\left[S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right)+S\lambda_{0'0'}\lambda_{0'1}+\left(S+\mu_{11}\right)\lambda_{0'0'}S\right]\left(S+\lambda_{01}\right)+$$
$$+\left(S+\lambda_{0'0'}\right)\left\{\left[S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right)+S\lambda_{01}\lambda_{0'1}+\mu_{11}\lambda_{01}S\right]\lambda_{00'-01}+\right. \quad . \qquad (19)$$
$$\left.+S\left(S+\lambda_{01'}\right)\left(S+\mu_{11}\right)\left(S+\lambda_{01}\right)\right\}$$

Результат рішення $\Delta^{(6)}$ (8) формується з рішень (15, 16). Тому можна записати

$$\Delta^{(6)}=\lambda_{00'-0'0'}\left(S+\lambda_{01}\right)S\lambda_{0'0'}\lambda_{0'0'-0'1}+\left(S+\lambda_{0'0'}\right)\lambda_{0'1}S\lambda_{00'-01}\lambda_{01} \quad . \qquad (20)$$

Сумуючи визначник (19 і 27) отримаємо результат вирішення основної матриці Δ. Для цього підставимо складові у вираз (6)

$$
\begin{aligned}
\Delta = & \left(S+\lambda_{00}\right)\lambda_{00'-0'0'}\left[S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right)+S\lambda_{0'0'}\lambda_{0'1}+\left(S+\mu_{11}\right)\lambda_{0'0'}S\right]\cdot \\
& \cdot\left(S+\lambda_{01}\right)+\left(S+\lambda_{00}\right)\left(S+\lambda_{0'0'}\right)\left\{\left[S\left(S+\lambda_{0'1}\right)\left(S+\mu_{11}\right)+S\lambda_{01}\lambda_{0'1}+\mu_{11}\lambda_{01}S\right]\cdot\right. \\
& \left.\cdot\lambda_{00'-01}+S\left(S+\lambda_{01'}\right)\left(S+\mu_{11}\right)\left(S+\lambda_{01}\right)\right\}+ \\
& +\mu_{11}\left[\lambda_{00'-0'0'}\left(S+\lambda_{01}\right)S\lambda_{0'0'}\lambda_{0'0'-0'1}+\left(S+\lambda_{0'0'}\right)\lambda_{0'1}S\lambda_{00'-01}\lambda_{01}\right]
\end{aligned}
\quad . \qquad (21)
$$

Встановлення визначника Δ основної матриці є важливим для виявлення в подальших дослідженнях значень ймовірності станів системи, на яких ґрунтуються необхідні критерії надійності активно дубльованої системи.

Список літератури

1. Бойко А.І. Графоаналітичний аналіз станів і переходів в можливі стани активно резервованої технічної системи / А.І Бойко, О.В.Бондаренко, В.М. Савченко // Механізація та електрифікація сільського господарства. Випуск 98.Т2.- Глеваха, 2013 - С. 396-402

A. Boyko
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine
A. Bondarenko
Mykolayiv National Agrarian University
V. Savchenko
Zhytomyr National Agroecological University

The mathematical model's fundamental matrix of active redundant model's reliability derivation

The reliability of the active redundant model's mathematical model described. The main determinant of the matrix to determine in future studies the probability of the system states upon which the necessary criteria of reliability redundant system was definite.

technical system, the probability of the system, redundant system, reliability criteria

Одержано 18.11.13