УДК 517.43

А. А. БОЙЧУК, канд. физ.-мат. наук,
В. Ф. ЖУРАВЛЕВ, стажер (Ин-т геофизики АН УССР, Киев)

Построение решений линейных операторных уравнений в банаховых пространствах

Получены формулы для построения обобщенного обратного оператора, разрешающего линейную нетерову краевую задачу в банаховом пространстве. Одна из них основана на построении обобщенного оператора Грина исходной полуоднородной краевой задачи, вторая — на применении некоторых результатов теории линейных операторов в банаховых пространствах.

Одержані формули для побудови узагальненого оберненого оператора, який розв'язує лінійну нетерову крайову задачу в банаховому просторі. Перша з них базується на побудові узагальненого оператора Гріна вихідної напіводнорідної крайової задачі, друга — на використанні деяких результатів теорії лінійних операторів у банахових просторах.

Известно [1, 2], что краевые задачи для систем функционально-дифференциальных уравнений

$$\Lambda x = \begin{bmatrix} Lx \\ lx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix}$$

в случае, когда размерность n функционально-дифференциальной системы $Lx = f$ не совпадает с размерностью m векторного функционала l, являются нетеровыми. Для таких задач конструкция Шмидта [3], позволяющая строить обобщенный обратный оператор в случае фредгольмовой ($m = n$) краевой задачи, неприменима. Предложено два способа построения обобщенного обратного оператора Λ^- к нетерову оператору Λ в банаховом пространстве. Первый из них предполагает использование свойств оператора L и основан на построении обобщенного оператора Грина [2, 4] исходной полуоднородной краевой задачи, а второй — на применении некоторых результатов теории операторов в банаховых пространствах, позволивших получить аналог конструкции Шмидта для нетеровых операторов.

1. В обозначениях [1, 5] рассмотрим краевую задачу

$$Lx = f, \tag{1}$$

$$lx = \alpha, \tag{2}$$

где $L: D_p^n \to L_p^n$ — линейный ограниченный оператор, для которого задача Коши $Lx = f$, $x(a) = c$ однозначно разрешима при любых $f \in L_p^n$ и $c \in R^n$ и ее решение имеет вид

$$x(t) = X(t)c + \int_a^b C(t, \tau) f(\tau)\, d\tau; \tag{3}$$

$X(t)$ — $(n \times n)$-фундаментальная матрица оператора $L: LX = 0$, $X(a) = E_n$, $C(t, \tau)$ — $(n \times n)$-матрица Коши, которую всюду в дальнейшем будем считать определенной в квадрате $[a, b] \times [a, b]$, полагая $C(t, \tau) \equiv 0$, при $a \leqslant t < \tau \leqslant b$; $l: D_p^n \to R^m$ — линейный ограниченный вектор-функционал; L_p^n — пространство n-мерных суммируемых со степенью p, $1 < p < +\infty$, на конечном промежутке $[a, b]$ вектор-функций; D_p^n — пространство n-мерных абсолютно непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций, таких, что $\dot{x} \in L_p^n$.

К таким задачам принадлежат, например, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений [2], уравнений с запаздыванием [6], задачи с импульсным воздействием [7].

Пусть $Q = lX$ — $(m \times n)$-постоянная матрица; P_Q — $(n \times n)$-(P_{Q^*} — $(m \times m)$-)-ортопроектор, проектирующий R^n (R^m) на нуль-пространство $N(Q)$ ($N(Q^*)$) матрицы Q (Q^*); P_{Q_r} — $(n \times r)$- матрица $(r = n - \operatorname{rank} Q)$, составленная из r линейно независимых столбцов матрицы P_Q; $P_{Q^*_d}$ — $(d \times m)$-матрица $(d = m - \operatorname{rank} Q)$, составленная из d линейно независимых строк матрицы P_{Q^*}; Q^+ — единственная псевдообратная по Муру—Пенроузу $(n \times m)$-матрица, для построения которой существуют хорошо разработанные алгоритмы [8, 9].

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{rank} Q = n_1 < n$, *тогда краевая задача* (1), (2) *разрешима для тех и только тех* $f \in L_p^n$ *и* $\alpha \in R^m$, *которые удовлетворяют условию*

$$P_{Q^*_d}\left\{\alpha - l\int_a^b C(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau\right\} = 0, \tag{4}$$

и при этом имеет $r = n - n_1$*-параметрическое семейство решений*

$$x(t) = X_r(t)\, c_r + X(t)\, Q^+ \alpha + (Gf)(t), \tag{5}$$

где $X_r(t) = X(t)\, P_{Q_r}$ — $(n \times r)$*-фундаментальная матрица краевой задачи* (1), (2); G — *обобщенный оператор Грина полуоднородной краевой задачи* (1), (2), *определяемый следующим образом:*

$$(Gf)(t) = \int_a^b C(t, \tau) f(\tau)\, d\tau - X(t)\, Q^+\, l\int_a^b C(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Доказательство. Решение (3) уравнения (1) будет решением краевой задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда вектор $c \in R^n$ удовлетворяет уравнению

$$Qc = \alpha - l\int_a^b C(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Для разрешимости алгебраической системы (7), а следовательно, и краевой задачи (1), (2), необходимо и достаточно [8], чтобы свободный член принадлежал ортогональному дополнению подпространства $N(Q^*)$, т. е. чтобы выполнялось условие (4). В этом случае алгебраическая система (7) имеет решение

$$c = P_{Q_r} c_r + Q^+\left(\alpha - l\int_a^b C(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau\right). \tag{8}$$

Подставив (8) в (3), получим общее решение (5) краевой задачи (1), (2).

Построенный обобщенный оператор Грина (6) разрешает полуоднородную краевую задачу

$$\Lambda x = \begin{bmatrix} Lx \\ lx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

и, как легко проверить непосредственным вычислением, удовлетворяет следующим свойствам:

$$\Lambda G* = \operatorname{col}\left[I*,\ P_{Q^*} l\int_a^b C(\cdot, \tau) * d\tau\right], \tag{9}$$

$$\lim_{t \to \tau + 0} G* - \lim_{t \to \tau - 0} G* = \int_a^b I* d\tau, \tag{10}$$

$$G*|_{\tau = a} = \int_a^b X P_{Q^*} d\tau. \tag{11}$$

Используя свойства (9)—(11) обобщенного оператора Грина краевой задачи (1), (2), можно показать, что оператор

$$\Lambda^{-}* = [G*, XQ^{+}*] \tag{12}$$

является обобщенным обратным [2] к нетерову оператору Λ и удовлетворяет его определяющим [10, 11] свойствам:

$$\Lambda^{-}\Lambda\Lambda^{-} = \Lambda^{-}; \qquad \Lambda\Lambda^{-}\Lambda = \Lambda. \tag{13}$$

Как показано в [10], второе свойство является следствием первого. Проверим первое свойство. Так как $LX = 0$, $lX = Q$, то, используя (9)—(11), имеем

$$\Lambda\Lambda^{-}* = \begin{bmatrix} L \\ l \end{bmatrix} [G*, XQ^{+}*] = \begin{bmatrix} LG* & LXQ^{+}* \\ lG* & lXQ^{+}* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n* & 0 \\ P_{Q^*} l \int\limits_a^b C(\cdot, \tau)* d\tau & QQ^{+}* \end{bmatrix}.$$

Так как $Q^{+}P_{Q^*} = (Q^*Q + P_Q)^{-1} Q^* P_{Q^*} = 0$, $Q^{+}QQ^{+} = Q^{+}$ [9], то

$$\Lambda^{-}\Lambda\Lambda^{-}* = [G, XQ^{+}] \begin{bmatrix} I_n* & 0 \\ P_{Q^*} l \int\limits_a^b C(\cdot, \tau)* d\tau & QQ^{+}* \end{bmatrix} =$$

$$= \left[GI_n* + XQ^{+}P_{Q^*} l \int\limits_a^b C(\cdot, \tau)* d\tau,\ XQ^{+}QQ^{+}* \right] = \Lambda^{-}*.$$

Таким образом, оператор Λ^{-} является обобщенным обратным к нетерову оператору Λ. Используя вид Λ и Λ^{-}, легко проверить, что

$$P_{\Lambda^*} = I - \Lambda\Lambda^{-},$$

где $P_{\Lambda^*} : L_p^n \times R^m \to \ker \Lambda^*$ — проектор, проектирующий пространство $L_p^n \times R^m$ на ядро оператора Λ^*. Действительно, так как $I_m - QQ^{+} = P_{Q^*}$ [9], то

$$P_{\Lambda^*}* = \begin{bmatrix} I_n* & 0 \\ 0 & I_m* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_n* & 0 \\ P_{Q^*} l \int\limits_a^b C(\cdot, \tau)* d\tau & QQ^{+}* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P_{Q^*} l \int\limits_a^b C(\cdot, \tau)* d\tau & (I_m - QQ^{+})* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P_{Q^*} l \int\limits_a^b C(\cdot, \tau)* d\tau & P_{Q^*}* \end{bmatrix}.$$

Итак, действие проектора P_{Λ^*} на элемент $y = \mathrm{col}(f, \alpha)$ пространства $L_p^n \times R^m$ эквивалентно действию оператора

$$\left[-P_{Q^*} l \int\limits_a^b C(\cdot, \tau)* d\tau,\ P_{Q^*}* \right],$$

который совпадает с критерием разрешимости (4) нетеровой краевой задачи (1), (2).

Теорема 2. *Операторное уравнение $\Lambda x = y$ разрешимо для тех и только тех $y \in L_p^n \times R^m$, которые удовлетворяют условию $P_{\Lambda^*} y = 0$, и при этом имеет r-параметрическое семейство решений вида*

$$x(t) = X_r(t) c_r + (\Lambda^{-} y)(t), \quad r = \dim \ker \Lambda,$$

где Λ^{-} — обобщенный обратный оператор, определяемый по формуле (12).

2. Укажем другой подход к построению обобщенного обратного опе-

ратора Λ^- к нетерову оператору $\Lambda : X \to Y$, действующему из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Пусть Λ — линейный ограниченный нетеров ($\dim\ker\Lambda = r$, $\dim\ker\Lambda^* = d$) оператор, Λ^* — оператор, сопряженный к оператору Λ, $\Lambda^* : Y^* \to X^*$, определяемый согласно [12]:

$$(\Lambda^* g)(x) = g(\Lambda x), \quad x \in X, \quad g \in Y^*,$$

где X^* и Y^* — пространства, сопряженные к пространствам X и Y. Как и раньше, через $N(\Lambda)$, $N(\Lambda^*)$ и $R(\Lambda)$, $R(\Lambda^*)$ будем обозначать нуль-пространства (ядра) и образы операторов Λ, Λ^* соответственно.

Пусть $\{f_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, — базис $\ker\Lambda$, $\{\varphi_s\}$, $s = 1, \ldots, d$, — базис $\ker\Lambda^*$. По следствию из теоремы Хана — Банаха [13] существуют линейно независимые функционалы $\gamma_j \in X^*$ такие, что

$$\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, r,$$

а также линейно независимые элементы $\psi_k \in Y$ такие, что

$$\varphi_s(\psi_k) = \delta_{sk}, \quad s, k = 1, \ldots, d.$$

Следуя [3, 14], определим проекторы

$$P_\Lambda : X \to N(\Lambda), \quad P_\Lambda^2 = P_\Lambda, \quad P_{\Lambda^*} : Y \to N(\Lambda^*), \quad P_{\Lambda^*}^2 = P_{\Lambda^*}$$

по формулам

$$P_\Lambda x = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i(x) f_i, \quad P_{\Lambda^*} y = \sum_{s=1}^{d} \varphi_s(y)\psi_s.$$

Пусть $p = \min(r, d)$. Тогда, следуя [15], введем операторы

$$\overline{P}_\Lambda x = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\psi_i, \quad \overline{P}_\Lambda : X \to \begin{cases} N_1(\Lambda^*) \subseteq N(\Lambda^*), & \text{если } r \leqslant d, \\ N(\Lambda^*), & \text{если } r \geqslant d; \end{cases}$$

$$\overline{P}_{\Lambda^*} y = \sum_{s=1}^{p} \varphi_s(y) f_s, \quad \overline{P}_{\Lambda^*} : Y \to \begin{cases} N(\Lambda), & \text{если } r \leqslant d, \\ N_1(\Lambda) \subseteq N(\Lambda), & \text{если } r \geqslant d. \end{cases}$$

Для построения обобщенного обратного оператора докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Операторы P_Λ, P_{Λ^*}, $\overline{P}_\Lambda$, $\overline{P}_{\Lambda^*}$ удовлетворяют следующим свойствам:*

1) $P_{\Lambda^*}\overline{P}_\Lambda = \overline{P}_\Lambda P_\Lambda = \overline{P}_\Lambda$,
2) $P_\Lambda \overline{P}_{\Lambda^*} = \overline{P}_{\Lambda^*} P_{\Lambda^*} = \overline{P}_{\Lambda^*}$,
3) $\overline{P}_\Lambda \overline{P}_{\Lambda^*} y = \sum_{s=1}^{p} \varphi_s(y)\psi_s$,
4) $\overline{P}_{\Lambda^*}\overline{P}_\Lambda x = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x) f_i$.

Докажем, например, свойство 1. Имеем $P_{\Lambda^*}\overline{P}_\Lambda x = \sum_{s=1}^{d} \varphi_s\Big(\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\psi_i\Big) \times \psi_s = \sum_{s=1}^{d}\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\varphi_s(\psi_i)\psi_s = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\psi_i = \overline{P}_\Lambda x$, так как $\varphi_s(\psi_i) = \begin{cases} \delta_{si}, & \text{если } i, s = 1, \ldots, p, \\ 0, & \text{если } s > p, \end{cases}$ $\overline{P}_\Lambda P_\Lambda x = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i\Big(\sum_{j=1}^{r} \gamma_j(x) f_j\Big)\psi_i = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r} \gamma_j(x) \times \gamma_i(f_j)\psi_i = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\psi_i = \overline{P}_\Lambda x$, так как $\gamma_i(f_j) = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{если } i, j = 1, \ldots p, \\ 0, & \text{если } j > p. \end{cases}$

Остальные свойства проверяются аналогично.

Лемма 2. *Оператор* $\bar{\Lambda} = \Lambda + \bar{P}_\Lambda$ *имеем ограниченный обратный*

$$\bar{\Lambda}^{-1}_{l,r} = \begin{cases} (\Lambda + \bar{P}_\Lambda)^{-1}_l \text{ — левый, если } r \leqslant d, \\ (\Lambda + \bar{P}_\Lambda)^{-1}_r \text{ — правый, если } r \geqslant d. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $r \leqslant d$. Из теорем 2.1 и 5.1 из [10] следует, что для существования левого обратного оператора $\bar{\Lambda}^{-1}_l$ к оператору $\bar{\Lambda}$ необходимо и достаточно, чтобы: а) $\ker \bar{\Lambda} = \{0\}$; б) $\dim \ker \bar{\Lambda}^* < \infty$.

Покажем, что $\ker \bar{\Lambda} = \{0\}$. Предположим, что существует $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$ такое, что $(\Lambda + \bar{P}_\Lambda) x_0 = 0$, откуда $\Lambda x_0 = -\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x_0)\psi_i$. Применив к обеим частям последнего равенства функционал φ_s, $s = 1, \ldots, d$, получим

$$0 = \varphi_s(\Lambda x_0) = -\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x_0)\varphi_s(\psi_i) = -\gamma_s(x_0).$$

Таким образом, $\gamma_s(x_0) = 0$, $s = 1, \ldots, p = r$. Так как система функционалов γ_s, $s = 1, \ldots, r$, линейно независима, то в силу следствия из теоремы Хана — Банаха [13] имеем $x_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\ker \bar{\Lambda} = \{0\}$.

Покажем, что $\dim \ker \bar{\Lambda}^* = d - r < \infty$. Для этого найдем $\bar{P}^*_\Lambda$. Пусть $x \in X$, $g \in Y$, тогда

$$g(\bar{P}_\Lambda x) = g\left(\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\psi_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x) g(\psi_i) = \sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i\right)(x),$$

откуда следует $\bar{P}^*_\Lambda g = \sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i$.

Найдем общий вид функционалов $g \in Y^*$, удовлетворяющих уравнению

$$(\Lambda + \bar{P}_\Lambda)^* g = 0,$$

откуда

$$\Lambda^* g = -\sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i. \tag{14}$$

Подействовав (14) на элемент f_k, получим

$$0 = (\Lambda^* g) f_k = g(\Lambda f_k) = -\sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i(f_k) = -g(\psi_k), \quad k = 1, \ldots, r.$$

Следовательно, (14) имеет вид $\Lambda^* g = 0$. Отсюда $g = \sum_{j=1}^{d} c_j\varphi_j$, где φ_j — базисные векторы ядра $N(\Lambda^*)$.

Но мы установили, что $g(\psi_k) = 0$, $k = 1, \ldots, p = r$, поэтому

$$0 = g(\psi_k) = \sum_{j=1}^{d} c_j\varphi_j(\psi_k) = \sum_{j=1}^{p} c_j\varphi_j(\psi_k) + \sum_{j=p+1}^{d} c_j\varphi_j(\psi_k).$$

Из того, что $\varphi_j(\psi_k) = \begin{cases} \delta_{jk}, \text{ если } j, k = 1, \ldots, p, \\ 0, \text{ если } j > p, \end{cases}$ следует $c_j = 0$ при $j = 1, \ldots, p = r$ и c_j — произвольные числа при $j = r + 1, \ldots, d$ и, значит,

$$g = \sum_{i=1}^{d-r} c_i\varphi_i \in N(\bar{\Lambda}^*), \quad \dim \ker \bar{\Lambda}^* = d - r < \infty.$$

Таким образом, мы доказали для случая $r \leqslant d$ существование левого обратного оператора $\overline{\Lambda}_l^{-1}$ к оператору $\overline{\Lambda}$.

Так как линейный ограниченный оператор Λ нетеров, а следовательно [15], нормально разрешим, то $R(\Lambda)$ является замкнутым в Y. Замкнутость, а следовательно, и ограниченность оператора $(\Lambda + \overline{P}_\Lambda)_l^{-1}$, следует из замкнутости $R(\Lambda)$ и конечномерности $N_1(\Lambda^*) = R(\overline{P}_\Lambda)$.

Для доказательства существования правого обратного оператора $\overline{\Lambda}_r^{-1}$ необходимо и достаточно [10] показать, что а) $\ker \overline{\Lambda}^* = \{0\}$; б) $\dim \ker \overline{\Lambda} < \infty$. Доказательство проводится аналогично случаю $r \leqslant d$. Если $r = d = p$, то $\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} = \overline{\Lambda}^{-1}$ и сформулированная лемма переходит в известную лемму Шмидта [3, 14].

Лемма 3. *Оператор $\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1}$ удовлетворяет следующим свойствам:*

$$P_\Lambda \overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} = \overline{P}_{\Lambda^*}, \tag{15}$$

$$\Lambda \overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} = I_Y - P_{\Lambda^*}, \tag{16}$$

$$\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} P_{\Lambda^*} = \overline{P}_{\Lambda^*}, \tag{17}$$

$$\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} \Lambda = I_X - P_\Lambda. \tag{18}$$

Доказательство леммы будем проводить для случая $r \leqslant d$. Так как $\overline{P}_{\Lambda^*}\Lambda = 0$ и $\overline{P}_{\Lambda^*}\overline{P}_\Lambda = P_\Lambda$, то, подействовав справа оператором $\Lambda + \overline{P}_\Lambda$ на обе части (15), получим тождество

$$P_\Lambda = \overline{P}_{\Lambda^*}(\Lambda + \overline{P}_\Lambda) = \overline{P}_{\Lambda^*}\Lambda + \overline{P}_{\Lambda^*}\overline{P}_\Lambda = P_{\Lambda^*},$$

доказывающее свойство (15). Так как в силу леммы 1 $P_{\Lambda^*}\overline{P}_\Lambda = \overline{P}_\Lambda$ и $P_{\Lambda^*}\Lambda = 0$, то, подействовав на обе части (16) оператором $\Lambda + \overline{P}_\Lambda$ справа, получим тождество, доказывающее свойство (16):

$$\Lambda = (I_Y - P_{\Lambda^*})(\Lambda + \overline{P}_\Lambda) = \Lambda + \overline{P}_\Lambda - P_{\Lambda^*}\Lambda - P_{\Lambda^*}\overline{P}_\Lambda = \Lambda + \overline{P}_\Lambda - \overline{P}_\Lambda = \Lambda.$$

Так как $P_{\Lambda^*}^2 = P_{\Lambda^*}$ и $\Lambda\overline{P}_{\Lambda^*} = 0$, то, подействовав слева оператором Λ на обе части (17) и использовав (16), получим тождество

$$0 = (I_Y - P_{\Lambda^*})P_{\Lambda^*} = \Lambda\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1}P_{\Lambda^*} = \Lambda\overline{P}_{\Lambda^*} = 0,$$

которое доказывает свойство (17). Подействовав оператором $\overline{\Lambda}_l^{-1}$ справа на обе части (18) и использовав свойства (15)—(17), будем иметь тождество

$$\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} I_Y - \overline{\Lambda}_{l,r}^{-1}P_{\Lambda^*} = \overline{\Lambda}_{l,r}^{-1}\Lambda\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} = (I_X - P_\Lambda)\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} = I_X\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} - P_\Lambda\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1},$$

которое доказывает свойство (18).

Для случая $r \geqslant d$ доказательство леммы проводится аналогично.

Приведенные выше леммы позволяют доказать следующую теорему [16].

Теорема 3. *Оператор*

$$\Lambda^- = \overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} - \overline{P}_{\Lambda^*} \tag{19}$$

является ограниченным обобщенным обратным к линейному ограниченному нетерову оператору Λ.

Для доказательства теоремы проверим, что Λ^- удовлетворяет свойствам (13). Для этого предварительно покажем, что

$$\Lambda\Lambda^- = I_Y - P_{\Lambda^*}, \quad \Lambda^-\Lambda = I_X - P_\Lambda.$$

Действительно,

$$\Lambda\Lambda^- = \Lambda(\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} - \overline{P}_{\Lambda^*}) = \Lambda\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} - \Lambda\overline{P}_{\Lambda^*} = I_Y - P_{\Lambda^*},$$

так как

$$\Lambda(\overline{P}_{\Lambda^*}y) = \Lambda\left(\sum_{s=1}^{p}\varphi_s(y)f_s\right) = \sum_{s=1}^{p}\varphi_s(y)\Lambda f_s = 0;$$

$$\Lambda^-\Lambda = (\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} - \overline{P}_{\Lambda^*})\Lambda = \overline{\Lambda}_{l,r}^{-1}\Lambda - \overline{P}_{\Lambda^*}\Lambda = I_X - P_\Lambda,$$

так как $\overline{P}_{\Lambda^*}(\Lambda x) = \sum_{s=1}^{p}\varphi_s(\Lambda x)f_s = \sum_{s=1}^{p}(\Lambda^*\varphi_s)(x)f_s = 0$. Проверим теперь свойства (13). Имеем

$$\Lambda\Lambda^-\Lambda = \Lambda(I_X - P_\Lambda) = \Lambda - \Lambda P_\Lambda = \Lambda,$$

$$\Lambda^-\Lambda\Lambda^- = (I_X - P_\Lambda)\Lambda^- = \Lambda^- - P_\Lambda\Lambda^- = \Lambda^-,$$

так как $P_\Lambda\Lambda^- = P_\Lambda\overline{\Lambda}_{l,r}^{-1} - P_\Lambda\overline{P}_{\Lambda^*} = \overline{P}_{\Lambda^*} - \overline{P}_{\Lambda^*} = 0$ в силу лемм 1 и 3. Таким образом, теорема доказана.

3. Предложенный в первой части настоящей статьи способ построения обобщенного обратного оператора Λ^- краевой задачи (1), (2) с помощью обобщенного оператора Грина справедлив и для случая, когда оператор L является линейным ограниченным нетеровым (без предположения о разрешимости при произвольном $f \in L_p^n$ задачи Коши для (1)).

Действительно, пусть $\dim\ker L = s$, а $P_{L^*}: L_p^n \to \ker L^*$—проектор, конструкция которого описана в п. 2. Тогда уравнение (1) разрешимо для тех и только тех $f \in L_p^n$, для которых

$$P_{L^*}f = 0, \tag{20}$$

и имеет при этом s-параметрическое семейство решений

$$x(t) = X_s(t)c_s + (L^-f)(t), \quad c_s \in R^s,$$

где $X_s(t)$ — $(n\times s)$-матрица, столбцы которой составляют базис $\ker L$, L^- — обобщенный обратный оператор (19).

Краевая задача (1), (2) с нетеровым оператором $L: D_p^n \to L_p^n$ разрешима тогда и только тогда, когда $f \in L_p^n$ и $\alpha \in R^m$ удовлетворяют условиям (20) и

$$P_{Q_{d_1}^*}\{\alpha - l(L^-f)\} = 0 \qquad (d_1 = m - \operatorname{rank} Q_1)$$

и при этом имеет r_1-параметрическое семейство решений ($r_1 = n - \operatorname{rank} Q_1$)

$$x(t) = X_{r_1}(t)c_{r_1} + X_s(t)Q_1^+\alpha + (G_1 f)(t),$$

где $X_{r_1}(t) = X_s(t)P_{Q_{r_1}}$ — $(n\times r_1)$-мерная фундаментальная матрица краевой задачи (1), (2), Q_1^+ — $(s\times m)$-мерная постоянная матрица, псевдообратная к $(m\times s)$-мерной матрице $Q_1 = lX_s$, G_1 — обобщенный оператор Грина полуоднородной краевой задачи (1), (2), имеющий представление

$$(G_1 f)(t) = (L^-f)(t) - X_s(t)Q_1^+ l(L^-f).$$

При этом обобщенный обратный оператор Λ^-, разрешающий краевую задачу (1), (2) с нетеровым оператором L, будет иметь вид

$$\Lambda^-* = [G_1*, X_s Q_1^+*].$$

1. *Максимов В. П.* Нетеровость общей краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения.— 1974.— 10, № 12.—С. 2288—2291.
2. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач.— Киев: Наук. думка, 1990.— 96 с.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 495 с.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 6.— С. 3—6.

5. *Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф.* Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения.— 1978.— 14, № 5.— С. 771—797.
6. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев: Выща шк., 1979.— 247 с.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища шк., 1987.— 287 с.
8. *Кублановская В. Н.* О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1966.— 6, № 2.— С. 326—332.
9. *Турбин А. Ф.* Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы // Там же.— 1974.— 14, № 3.— С. 772—776.
10. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.— Кишинев: Штиинца, 1973.— 426 с.
11. *Nashed M. Z.* Generalized inverses and applications.— New York etc.: Acad. press, 1976. — 1054 p.
12. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1971.— 104 с.
13. *Хатсон В., Тим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов.— М. : Мир, 1983.— 431 с.
14. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 527 с.
15. *Аткинсон Ф. В.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат. сб.— 1951.— 28, № 1.— С. 3—14.
16. *Bojchuk A. A., Juravliov V. F.* Generalized Inverses for Noether's operators in Banach Spases // 5 th Conf. on Numer. Nethods (Miskolc, August 20—25, 1990): Abstrs.— Miskolc, 1990.— P, 11.

Получено 19.06.90