Властивості чисел Фібоначчі–Нарайани

Т. В. Дідківська, М. В. Стьопочкіна

Числа Фібоначчі, які виникли із добре відомої задачі про кроликів італійського математика Леонардо Пізанського (Фібоначчі) (1180–1240), привернули увагу багатьох математиків. Теорія чисел Фібоначчі до цього часу залишається однією з найкрасивіших теорій елементарної математики. Переконливим свідченням цього є створення у США математичної Фібоначчі-асоціації, яка видає з 1963 р. журнал "The Fibonacci Quarterly", що публікує результати досліджень, пов'язаних з цією послідовністю.

Тим часом, в трактаті індійського математика Нарайани (XIV ст.) "Біджаганіти", написаному в середині XIV ст., розглядається задача про підрахунок стада корів і телиць, які походять від однієї корови, що приводить до цікавої рекурентної послідовності типу Фібоначчі. Ми розглянемо більш докладно цю задачу і доведемо властивості послідовності чисел Нарайани, спочатку нагадавши деякі відомості про числа Фібоначчі.

1. Історія виникнення чисел Фібоначчі, деякі їх властивості і застосування

На відміну від стародавніх часів Піфагора, Евкліда, Архімеда в математиці середньовіччя не можна назвати таких яскравих імен. В цю епоху в Європі робляться переклади математичних праць грецьких і арабських математиків, з'являються перші вчені-теоретики математики. В XII–XIII ст. перше місце в Європі за розвитком ремесел і торгівлі займали італійські міста. В одному із них — у місті Піза народився Леонардо, який ввійшов в науку під іменем Леонардо Пізанського або Фібоначчі (син Боначчі). Він розширив свої математичні знання під час подорожей до Єгипту, Сірії, Візантії, Сицилії і Провансу. Леонардо вирішив написати книгу, яка б ознайомила європейців з основами математики і дала б можливість успішно вести торгівельні розрахунки. Ця книга була їм написана у 1202 р. (перероблена у 1228 р.) і називалась "Книга про абак". Цей заголовок слід розуміти як "Арифметика". В ній йдеться не про прилад абак Герберта, а про індійську десяткову систему числення і засновану на ній арифметику. Саме за цією книгою протягом кількох наступних століть європейські математики ознайомлювалися з індійськими ("арабськими") цифрами й іншими математичними відомостями. Значну частину трактату складають задачі, частина яких наводиться у збірниках цікавих задач, розглядається на заняттях шкільних математичних гуртків, пропонується на математичних олімпіадах. Деякі з них були узагальнені і розвинуті в нові математичні теорії, наприклад, при розв'язанні десятої проблеми Гільберта Юрієм Матіясевичем у 1970 році.

Найбільшою популярністю користується задача про кроликів із XII глави "Книги про абак".

Задача Фібоначчі. Скільки пар кроликів народиться за рік від однієї пари, якщо кожна пара дає щомісяця приплоду по одній парі, яка в свою чергу здатна до розмноження через один місяць, і якщо жодна пара не загине [1:101].

На початку року маємо 1 пару кроликів, через один місяць їх буде 2 пари. З них одна пара (перша) народжує 1 пару кроликів, маємо через два місяця 3 пари. З них дві пари дають приплід, через три місяці буде 5 пар. Міркуючи далі аналогічно, одержимо ряд чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. На кінець року буде 377 кроликів.

Якщо позначити n-те число U_n, то продовжуючи ці підрахунки, одержимо числову послідовність

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \dots,\ U_n,\ \dots, \quad \text{де } U_{n+1} = U_n + U_{n-1}. \tag{1}$$

Послідовності, в яких довільний член подається як функція попередніх, називають рекурентними. Частіше всього розглядають частинний випадок послідовності (1), коли $U_1 = U_2 = 1$, який відповідає умові, що на початку року є пара новонароджених кролів.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots \quad (U_{n+1} = U_n + U_{n-1}). \tag{2}$$

Французький математик Едуард Люка (1842–1891) назвав послідовності, члени яких утворюються за законом $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$, послідовностями Фібоначчі, а їх члени — числами Фібоначчі.

Числа Фібоначчі (2) мають багато цікавих властивостей:

$$\begin{aligned}
&1.\ U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_{n+2} - 1.\\
&2.\ U_1 + U_3 + \cdots + U_{2n-1} = U_{2n}.\\
&3.\ U_2 + U_4 + \cdots + U_{2n} = U_{2n+1} - 1.\\
&4.\ U_{n+m} = U_{n-1}U_m + U_nU_{m+1}.\\
&5.\ U_{2n} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2.\\
&6.\ \text{Якщо } n \vdots m, \text{ то } U_n \vdots U_m.
\end{aligned} \tag{3}$$

7. У ряді Фібоначчі кожне третє число парне, кожне четверте ділиться на 3, кожне п'яте — на 5, кожне п'ятнадцяте — на 10.

Доведення цих властивостей можна знайти у посібнику [2:10], або здійснити їх самостійно.

Числа Фібоначчі виражають фундаментальні співвідношення, які виявляються в найнесподіваніших місцях. З цими числами пов'язана теорія біологічних популяцій, за допомогою чисел Фібоначчі ботаніки описують розташування бруньок та листя на пагонах рослин. Лущинки на ялинковій шишці, комірки на ананасі і насіння соняшника розташовані по спіралі, до того ж кількість спіралей кожного напрямку, як правило, виражається числами Фібоначчі. Закон, за яким розташовуються черешки листя можна визначити в такій спосіб [3:91]. Зріжимо пагін, який вважаємо круговим циліндром, перпендикулярно до його довжини на рівні одного листка. Від основи першого листка проведемо твірну, яка на деякій відстані від першого листка зустріне другий, розташований так само, як перший. Підрахувавши скільки листків міститься на стеблі між однаково розташованими листками і збільшивши це число на одиницю, дістанемо число, яке називають листковим циклом. Сполучивши послідовно черешки листа одного циклу, одержимо гвинтову лінію, яка між послідовними однаково розташованими листками робить певну кількість витків. Спроектувавши черешки листків на основу циліндра, дістанемо кут, на який відхиляється кожна пара послідовних листків пагона. Він називається кутом розходження. Очевидно, щоб його обчислити потрібно повний кут 360° поділити на кількість листків циклу m і частку помножити на кількість n обертів гвинтової лінії. Маємо для кута розходження $\alpha_m = \frac{360^\circ \cdot n}{m}$, отже, цей кут характеризується дробом $\frac{n}{m}$. Кут розходження у липи і в'яза характеризується дробом $\frac{1}{2}$, у ліщини — $\frac{1}{3}$, у дуба — $\frac{2}{5}$, у тополі і груші — $\frac{3}{8}$, у верби — $\frac{5}{13}$. Найчастіше розташування листя на пагонах характеризується дробами $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}$ і $\frac{13}{34}$. Чисельники і знаменники цих дробів є числами Фібоначчі [4:41].

Цікаво, що знайдено ряд практичних застосувань чисел Фібоначчі. Вони можуть скласти основу нетрадиційної фібоначчійової системи числення. У 1964 році професор Вінницького політехнічного інституту О. П. Стахов разом з харківським математиком І. В. Витенько узагальнили числову послідовність Фібоначчі і запропонували відмовитись від двійкової системи числення і використати для кодування інформації так звані коди Фібоначчі [5:40]. Для знаходження подання натуральних чисел в цій системі використовується процес віднімання чисел Фібоначчі спочатку від даного числа, а потім від утворених проміжних різниць. Наведемо приклад. Нехай $n = 28$, знайдемо найбільше число Фібоначчі, яке наближає 28 знизу, це $U_8 = 21$, та їх різницю $a_1 = 28 - U_8 = 7$. Аналогічно знайдемо число Фібоначчі для різниці, це $U_5 = 5$, та відповідну різницю $a_2 = a_1 - U_5 = 2$. Продовжуючи цей процес, маємо: $a_3 = a_2 - U_3 = 0$. Із одержаних рівностей визначаємо $n = U_8 + a_1 = U_8 + U_5 + a_2 = U_8 + U_5 + U_3$. Маємо $28 = 1 \cdot U_8 + 0 \cdot U_7 + 0 \cdot U_6 + 1 \cdot U_5 + 0 \cdot U_4 + 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot U_1 = \overline{10010100}$. З властивостями фібоначчійової системи числення і її перевагами перед двійковою системою можна ознайомитись, наприклад, в книзі М. М. Воробйова [2:43].

2. Задача Нарайани

Нарайана був видатним індійським математиком XIV ст. Від нього до нас дійшов рукопис "Біджаганіти" (неповністю), написаний в середині XIV ст. Його цікавило сумування арифметичних рядів, магічні квадрати. Нарайана розповсюдив правило "дев'ятки" перевірки обчислень на інші модулі. В роботах індійських математиків наведені правила сумування рядів трикутних чисел, натуральних квадратів і кубів, геометричної прогресії, квадратів членів геометричної прогресії, ряду кубів і ряду узагальнених трикутних чисел, тобто сум арифметичної прогресії. В середині XIV ст. Нарайана виконав ще більш загальне сумування. Позначимо суми:

$$1+2+3+\cdots+n=S_n^{(1)},$$
$$S_1^{(1)}+S_2^{(1)}+\cdots+S_n^{(1)}=S_n^{(2)},$$
$$S_1^{(2)}+S_2^{(2)}+\cdots+S_n^{(2)}=S_n^{(3)},\ \ldots.$$

Нарайана визначив, що

$$S_n^{(m)}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m+1)}. \tag{4}$$

Свої правила Нарайана застосував до задачі про стадо корів і теличок [6:150].

Задача Нарайани. Корова щороку приносить теличку. Кожна теличка, починаючи з четвертого року свого життя, на початку року також приносить по теличці. Скільки буде всього голів корів і телят через 20 років?

Підрахунок Нарайани наступний:

1) корова за 20 років дає 20 теличок першого покоління;

2) перша теличка першого покоління дає 17 теличок другого покоління, друга — 16 і т.д. Всього в другому поколінні буде $17+16+\cdots+1=S_{17}^{(1)}$ голів корів і телят;

3) перша теличка із сімнадцяти другого покоління дає 14 теличок третього покоління, друга — 13 і т.д. Всього телички цієї групи дадуть потомство $14+13+\cdots+1=S_{14}^{(1)}$ голів. Перша теличка із шістнадцяти другого покоління дає 13 теличок третього покоління, друга — 12 і т.д. Всього телички цієї групи дадуть потомство $13+12+\cdots+1=S_{13}^{(1)}$ голів. Маємо, що всі телички другого покоління дадуть в третьому поколінні $S_{14}^{(1)}+S_{13}^{(1)}+\cdots+S_1^{(1)}=S_{14}^{(2)}$ голів.

Міркуючи далі аналогічно, Нарайана визначає чисельність всього стада через 20 років:

$$n=1+20+S_{17}^{(1)}+S_{14}^{(2)}+\cdots+S_2^{(6)}. \tag{5}$$

Використавши формулу (4), він підраховує

$$n=1+20+\frac{17\cdot 18}{1\cdot 2}+\frac{14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=2745. \tag{6}$$

Можна розв'язати цю задачу іншим способом, а саме, використати метод, яким Фібоначчі розв'язав свою задачу про кролів [1:77].

На початку року була одна корова і теличка, яка народилася, тобто 2 голови. На початку другого і третього року поголів'я збільшилось відповідно на 1 голову, тобто кількість голів відповідно 3 і 4. Починаючи з четвертого року поголів'я стада визначається рекурентними формулами: $x_4=x_3+x_1$, $x_5=x_4+x_2,\ \ldots,\ x_n=x_{n-1}+x_{n-3}$, оскільки за умовою задачі, щоб визначити чисельність стада для довільного року, треба до кількості голів минулого року додати кількість теличок, які народилися на початку цього року, а їх буде стільки, скільки було голів три роки тому.

Приходимо до числової послідовності

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ \ldots,\quad U_{n+1} = U_n + U_{n-2}. \tag{7}$$

Обчислюючи її члени послідовно, маємо, що $U_{20} = 2745$.

Щоб обчислити довільний член цієї послідовності, необхідно знати три попередні члени, тому змінимо умову задачі. Нехай на початку першого року була одна теличка, вона принесе теличку на початку четвертого року. Тоді прийдемо до числової послідовності

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ \ldots,\quad U_{n+1} = U_n + U_{n-2}, \tag{8}$$

яку будемо називати послідовністю Фібоначчі–Нарайани, а члени цієї послідовності – числами Фібоначчі–Нарайани.

3. Деякі властивості чисел Фібоначчі–Нарайани

Цікаво порівняти властивості чисел Фібоначчі–Нарайани з відповідними властивостями (3) чисел Фібоначчі.

1°. $U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_{n+3} - 1$.

Оскільки із (8) випливає, що

$$U_{n-2} = U_{n+1} - U_n, \tag{9}$$

то маємо $U_1 = U_4 - U_3$; $U_2 = U_5 - U_4$; $U_3 = U_6 - U_5$; ... ; $U_{n-1} = U_{n+2} - U_{n+1}$; $U_n = U_{n+3} - U_{n+2}$. Додавши почленно ці рівності, одержимо:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_{n+3} - U_3,$$

де $U_3 = 1$.

2°. $U_1 + U_4 + U_7 + \cdots + U_{3n-2} = U_{3n-1}$.

Із (8) маємо

$$U_1 = U_2 \text{ та } U_n = U_{n+1} - U_{n-2}, \tag{10}$$

тому $U_1 = U_2$; $U_4 = U_5 - U_2$; $U_7 = U_8 - U_5$; ... ; $U_{3n-5} = U_{3n-4} - U_{3n-7}$; $U_{3n-2} = U_{3n-1} - U_{3n-4}$. Додавши почленно ці рівності, одержимо:

$$U_1 + U_4 + U_7 + \cdots + U_{3n-2} = U_{3n-1}.$$

3°. $U_2 + U_5 + U_8 + \cdots + U_{3n-1} = U_{3n}$.

Із (8) і (10) маємо: $U_2 = U_3$, $U_5 = U_6 - U_3$; $U_8 = U_9 - U_6$; ... ; $U_{3n-4} = U_{3n-3} - U_{3n-6}$; $U_{3n-1} = U_{3n} - U_{3n-3}$, тому $U_2 + U_5 + U_8 + \cdots + U_{3n-1} = U_{3n}$.

4°. $U_3 + U_6 + U_9 + \cdots + U_{3n} = U_{3n+1} - 1$.

Із 1°, 2°, 3° властивостей одержуємо:

$$\begin{aligned} U_3 + U_6 + U_9 + \cdots + U_{3n} &= (U_1 + U_2 + \cdots + U_{3n}) - (U_1 + U_4 + U_7 + \cdots \\ &\quad + U_{3n-2}) - (U_2 + U_5 + U_8 + \cdots + U_{3n-1}) \\ &= (U_{3n+3} - 1) - U_{3n-1} - U_{3n} = S. \end{aligned}$$

Перетворимо одержану суму S, враховуючи (8) і (10):

$$S = (U_{3n+2} + U_{3n}) - 1 - U_{3n-1} - U_{3n} = (U_{3n+2} - U_{3n-1}) - 1 = U_{3n+1} - 1.$$

5°. $U_{n+m} = U_{n-1}U_{m+2} + U_{n-2}U_m + U_{n-3}U_{m+1}$.

Для доведення використаємо метод математичної індукції.

Перевіримо істинність формули для $m = 1$. Маємо

$$U_{n+1} = U_{n-1}U_3 + U_{n-2}U_1 + U_{n-3}U_2,$$

згідно з (8), $U_1 = U_2 = U_3 = 1$, тому

$$U_{n+1} = U_{n-1} + U_{n-2} + U_{n-3} = U_{n-2} + (U_{n-1} + U_{n-3}) = U_{n-2} + U_n = U_{n+1}.$$

Доведемо для $m = 2$. Маємо $U_{n+2} = U_{n-1}U_4 + U_{n-2}U_2 + U_{n-3}U_3$, згідно з (8), $U_2 = U_3 = 1$, $U_4 = 2$, тому

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= 2U_{n-1} + U_{n-2} + U_{n-3} = U_{n-1} + U_{n-2} + (U_{n-1} + U_{n-3}) \\ &= U_{n-1} + (U_{n-2} + U_n) = U_{n-1} + U_{n+1} = U_{n+2}. \end{aligned}$$

Перевіримо істинність формули для $m = 3$. Маємо

$$U_{n+3} = U_{n-1}U_5 + U_{n-2}U_3 + U_{n-3}U_4,$$

згідно з (8), $U_3 = 1$, $U_4 = 2$, $U_5 = 3$, тому

$$\begin{aligned} U_{n+3} &= 3U_{n-1} + U_{n-2} + 2U_{n-3} = U_{n-1} + U_{n-2} + 2(U_{n-1} + U_{n-3}) \\ &= U_{n-1} + U_{n-2} + 2U_n = U_{n-1} + (U_{n-2} + U_n) + U_n \\ &= (U_{n-1} + U_{n+1}) + U_n = U_{n+2} + U_n = U_{n+3}. \end{aligned}$$

Припустимо істинність формули для натурального числа m і доведемо, що $U_{n+m+1} = U_{n-1}U_{m+3} + U_{n-2}U_{m+1} + U_{n-3}U_{m+2}$. Використаємо (8) і припущення індукції, тоді

$$\begin{aligned} &U_{n-1}U_{m+3} + U_{n-2}U_{m+1} + U_{n-3}U_{m+2} \\ &\quad = U_{n-1}(U_{m+2} + U_m) + U_{n-2}(U_m + U_{m-2}) + U_{n-3}(U_{m+1} + U_{m-1}) \\ &\quad = (U_{n-1}U_{m+2} + U_{n-2}U_m + U_{n-3}U_{m+1}) \\ &\qquad + (U_{n-1}U_m + U_{n-2}U_{m-2} + U_{n-3}U_{m-1}) \\ &\quad = U_{n+m} + U_{n+m-2} = U_{n+m+1}. \end{aligned}$$

6°. $U_{2n} = U_{n+1}^2 + U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2$.

Покладемо в 5° $n = m$, маємо $U_{2n} = U_{n-1}U_{n+2} + U_{n-2}U_n + U_{n-3}U_{n+1}$. Перетворимо цей вираз, використавши (8), (9) і (10):

$$\begin{aligned} U_{2n} &= U_{n-1}(U_{n+1} + U_{n-1}) + U_{n-2}(U_{n+1} - U_{n-2}) + (U_n - U_{n-1})U_{n+1} \\ &= U_{n-1}U_{n+1} + U_{n-1}^2 + U_{n-2}U_{n+1} - U_{n-2}^2 + U_nU_{n+1} - U_{n-1}U_{n+1} \\ &= U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2 + U_{n+1}(U_{n-2} + U_n) = U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2 + U_{n+1}U_{n+1} \\ &= U_{n+1}^2 + U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2. \end{aligned}$$

7°. Якщо в послідовності (8) $n = 7k+4$, $n = 7k+6$,$n = 7k$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$, то U_n — парне число.

Доведемо методом математичної індукції. Нехай $k = 0$, покладемо $U_0 = 0$, тоді із (8) маємо $U_4 = 2$, $U_6 = 4$. Припустимо, що твердження істинне для натурального числа k, тобто члени послідовності (8) U_{7k+4}, U_{7k+6}, U_{7k} діляться на 2. Перевіримо для $k + 1$. Розглянемо U_{7k+11}, U_{7k+13}, U_{7k+7}. За властивістю 5° маємо

$$U_{7k+11} = U_{7k-1} \cdot U_{13} + U_{7k-2} \cdot U_{11} + U_{7k-3} \cdot U_{12}.$$

Використаємо (8): $U_{13} = 60$, $U_{11} = 28$, $U_{12} = 41$, тому

$$U_{7k+11} = 60U_{7k-1} + 28U_{7k-2} + 41U_{7k-3},$$

де $U_{7k-3} = U_{7m+4}$ ділиться на два за припущенням. Маємо, що U_{7k+11} — парне число.

Аналогічно доводимо подільність на два для члена послідовності U_{7k+13}, а U_{7k+7} ділиться на 2 за, оскільки $U_{7k+7} = U_{7k+6} + U_{7k+4}$.

8°. На три діляться тільки ті числа ряду (8), порядковий номер яких має вигляд $8n$, $8n - 1$, або $8n - 3$.

Доведення аналогічне до 7° властивості.

4. Застосування чисел Фібоначчі–Нарайани для побудови системи числення

У різних народів в різні часи були різні способи найменування і запису чисел, тобто різні системи числення. За основу системи числення може бути вибране довільне натуральне число q, більше від одиниці. Зображення числа у вигляді суми степенів основи q з цілими невід'ємними коефіцієнтами, меншими ніж основа, є записом його в даній системі числення. Найпоширенішою є десяткова позиційна система числення. Але в різні історичні періоди користувались системами числення, відмінними від десяткової. Наприклад, за основу приймали числа 8, 12, 60. Основою сучасних комп'ютерів є двійкова система числення ($q = 2$), в якій використовуються дві цифри: 0 і 1. Її винахід приписують китайському імператору Фо Ги (IV тисячоліття до н.е.). В європейській математиці двійкова система числення описана італійським математиком Фібоначчі, яку він ввів для розв'язування практичної задачі зважування товару, застосувавши систему тягарів 1, 2, 4, 8, 16, ...

Останнім часом виникла ідея відмовитись від класичної двійкової системи числення і використати для кодування інформації числа Фібоначчі [2:43]. Числа Фібоначчі–Нарайани також можуть скласти основу своєрідної "нарайанової" системи числення.

Розглянемо, як подати довільне натуральне число a у вигляді суми різних чисел Фібоначчі–Нарайани. Для цього будемо розглядати послідовність

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 13,\ 19,\ 28,\ \ldots,\ U_{n+1} = U_n + U_{n-2} \qquad (11)$$

і будувати шукане подання за правилом, яке полягає в послідовному виділенні із числа a доданків, які дорівнюють найбільшим можливим числам Фібоначчі–Нарайани. Цим забезпечується єдиність подання.

Нехай $a = 26$, маємо $19 < 26 < 28$, де $U_8 = 19$, тоді $a = U_8 + a_1$ і $a_1 = a - U_8 = 7$. Шукаємо проміжок для числа 7 в ряді Фібоначчі–Нарайани $6 < 7 < 9$, де $U_5 = 6$, тоді $a_1 = U_5 + a_2$ і $a_2 = a_1 - U_5 = 1$, бачимо, що $a_2 = U_1$. Із рівностей для a, a_1, a_2 маємо

$$a = U_8 + U_5 + U_1 = 1 \cdot U_8 + 0 \cdot U_7 + 0 \cdot U_6 + 1 \cdot U_5 + 0 \cdot U_4 + 0 \cdot U_3 + 0 \cdot U_2 + 1 \cdot U_1.$$

Одержали позиційний запис числа a, якщо за основу системи числення прийняти послідовність Фібоначчі–Нарайани (11), $a = 26 = \overline{10010001}$. Очевидно, що число $28 = U_9 = \overline{100000000}$. Отже, система числення Фібоначчі–Нарайани може розглядатись як альтернативний до вже відомих систем спосіб задання натуральних чисел. Як і в кожній системі числення головним в арифметиці є послідовний рахунок. Якщо почати з одиниці, маючи на увазі послідовність (11), то $1 = U_1 = \overline{1}$, $2 = U_2 + 0 \cdot U_1 = \overline{10}$, $3 = U_3 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot U_1 = \overline{100}$, $4 = \overline{100} + \overline{1} = \overline{1000}$, за правилом $U_1 + U_3 = U_4$. Тоді очевидно $5 = \overline{1001}$, $6 = \overline{1010} = \overline{10000}$, тому що $U_1 + U_1 = U_2$ та $U_2 + U_4 = U_5$.

Послідовності Фібоначчі і Нарайани є прикладами зворотніх послідовностей, в яких довільний член (починаючи з деякого) дорівнює лінійній комбінації однієї і тієї ж кількості попередніх членів. Арифметична і геометрична прогресії, які вивчаються в шкільному курсі математики, також є зворотними (рекурентними) послідовностями. Теорія рекурентних послідовностей була розроблена у XVIII ст. французьким математиком Муавром, швейцарським математиком Даніїлом Бернулі і петербургським академіком Леонардом Ейлером. Вивчення властивостей зворотніх послідовностей можна продовжувати [7:25].

Література

1. Конфорович А. Г., *Визначні математичні задачі*, "Рад. школа", Київ, 1981.
2. Воробьёв Н. Н., *Числа Фибоначчи*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1992.
3. Вульф Г. В., *Симметрия и её проявление в природе*, Из-во отд. нар. ком. просвещения, Москва, 1919.
4. Попов Є. Д., *Геометричні властивості відношення золотого перерізу*, У світі математики, т. 13, "Рад. школа", Київ, 1982, стор. 31–46.
5. Стахов А. П., *Коды золотой пропорции, или система счисления для ЭВМ будущего?*, Техника молодёжи (1985), № 7, 40–44.
6. Юшкевич А. П., *История математики в средние века*, Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1961.
7. Маркушевич А. И., *Возвратные последовательности*, "Наука", Москва, 1975.