УДК 512.64+512.56

М. В. Стьопочкіна (Ін-т математики НАН України)

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ВЕРХНЬОЮ ТА НИЖНЬОЮ ШИРИНОЮ СКІНЧЕННОЇ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ

For upper $w_+(S)$ and lower $w_-(S)$ width of a finite poset it is proved the inequality $\left[\frac{w_+(S)+1}{2}\right] \leq \leq w_-(S) \leq w_+(S) - 1$.

Для верхньої ширини $w_+(S)$ і нижньої ширини $w_-(S)$ скінченної частково впорядкованої множини доведена наступна нерівність $\left[\frac{w_+(S)+1}{2}\right] \leq w_-(S) \leq w_+(S) - 1$.

1. Вступ. Нехай S — скінченна частково впорядкована множина (скорочено ч. в. множина). Запис $x \not\lessgtr y$ для елементів $x, y \in S$ буде означати, що x та y не порівнянні. Множина елементів $x \in S$, непорівнянних (відповідно порівнянних) з фіксованим елементом $a \in S$, будемо позначати $S^{\not\lessgtr}(a)$ (відповідно $S(a)$). Для підмножин Y та Z множини S будемо писати $Y < Z$, якщо $y < z$ для будь-яких $y \in Y, z \in Z$ (це виконується, коли Y або Z є порожньою). Одноелементні підмножини S ототожнюються із самими елементами.

Нагадаємо введене в [1] поняття (min, max)-еквівалентності ч. в. множин.

Означимо для мінімального (відповідно максимального) елемента $a \in S$ ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) наступним чином: це об'єднання неперетинних підмножин $S \setminus a$ та $\{a\}$ з найменшим частковим порядком, який містить заданий на $S \setminus a$ порядок, і при цьому $a > S^{\not\lessgtr}(a)$ (відповідно $a < S^{\not\lessgtr}(a)$). Інакше кажучи, $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) і S рівні як звичайні множини, а відношення часткового порядку задається наступними умовами:

a) a — максимальна (відповідно мінімальна) точка $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$);

b) якщо $x, y \neq a$, то $x < y$ в $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) тоді й лише тоді, коли $x < y$ в S;

c) $a > x$ в $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $a < x$ $S_a^{\downarrow}$) тоді й лише тоді, коли $a \not\lessgtr x$ в S.

Надалі будемо писати $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ замість $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ замість $(S_x^{\uparrow})_y^{\downarrow}$ тощо.

Нехай S та T — ч. в. множини, рівні як звичайні множини. Ч. в. множину T назвемо (min, max)-*еквівалентним* ч. в. множині S, якщо

$$T = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p} \quad (p \geq 0),$$

де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ і, для $i \in \{1, \ldots, p\}$, x_i — мінімальна (відповідно максимальна) точка $\overline{S}_{i-1} = S_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}}$, якщо $\varepsilon_i = \uparrow$ (відповідно $\varepsilon_i = \downarrow$); при $p = 0$ вважатимемо, що $T = S$. Зауважимо, що серед $x_1, x_2, \ldots, x_p$ можуть зустрічатися рівні елементи.

У випадку, коли ч. в. множини S і T (min, max)-еквівалентні, ми будемо писати $S \cong_{(\min,\max)} T$. Якщо ч. в. множина T дорівнює якійсь ч. в. множині виду $T = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}$ (відповідно $T = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}$), то будемо говорити, що T є min-еквівалентною (відповідно max-еквівалентною) ч. в. множині S і писати $T \cong_{\min} S$ (відповідно $T \cong_{\max} S$).

В роботі [2] доведено, що всі три введені відношення є відношеннями еквівалентності, причому всі вони рівносильні (див. наслідок 2 і твердження 11).

(Min, max)-еквівалентні ч. в. множини вивчалися у багатьох роботах, але всі вони пов'язані з вивченням ч. в. множин з додатно визначеною формою Тітса або мінімальних ч. в. множин з недодатно визначеною формою Тітса (див., наприклад, [1–4]). У цій статті (min, max)-еквівалентність вивчається незалежно від форми Тітса.

2. Визначення різних типів сум ч. в. множин. Протягом всієї статті S означає скінченну частково впорядковану множину (порядку $|S| > 0$). Якщо S є об'єднанням своїх підмножин $S_1, S_2, .., S_m$, що попарно не перетинаються, то будемо говорити, що S є *сумою* $S_1, S_2, .., S_m$; у цьому випадку пишуть $S = S_1 + +S_2 + \cdots + S_m$. Якщо ж довільні два елементи, що належать різним доданкам S_i, непорівнянні, то S називається *прямою сумою* заданих підмножин $S_1, S_2, .., S_m$. У цьому випадку будемо писати $S = S_1 \coprod S_2 \coprod \ldots \coprod S_m$. Поняття прямої суми ч. в. множин можна ввести, мабуть, і зовнішнім чином — це об'єднання без попарних перетинів (з частковим порядком, що індукується заданими порядками).

Введемо ще одне поняття, що належить В. М. Бондаренку. Сума $S = = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$ $(m > 0)$ називається *односторонньою*, якщо, з точністю до перестановки доданків, з $x < y$ та $x \in S_i, y \in S_j$, де $i \neq j$, випливає, що $i < j$. Позначимо через $R_0(S)$ множину всіх пар $(x, y) \in S \times S$ сусідніх елементів x та y (тобто порівнянних елементів x та y, таких, що не існує елемента z, що задовольняє нерівності $x < z < y$, якщо $x < y$, і нерівності $x > z > y$, якщо $x > y$). Якщо $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$, то число

$$r_0(S) = \frac{1}{2}(|R_0(S)| - \sum_{i=1}^{m} |R_0(S_i)|)$$

називається *рангом* заданої суми. Очевидно, що суми рангу 0 — це прямі суми і тільки вони.

3. Формулювання основного результату. Нехай S – скінченна ч. в. множина. Нагадаємо, що його шириною називають найбільше число попарно непорівнянних елементів $x_i \in S$; будемо позначати її через $w(S)$. Лінійно впорядковану множину ми називаємо *ланцюгом* і надалі всі ланцюги вважаємо непорожніми.

Тепер нагадаємо два поняття. *Верхньою шириною ч. в. множини* S назвемо число $w_+(S) = \max_{T \cong_{(\min,\max)} S} w(T)$, а *нижньою шириною* – число $w_-(S) = = \min_{T \cong_{(\min,\max)} S} w(T)$.

У цій статті буде доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай S – ч. в. множина верхньої ширини $w_+(S) > 1$. Тоді виконується нерівність* $\left[\frac{w_+(S)+1}{2}\right] \leq w_-(S) \leq w_+(S) - 1$.

4. Допоміжні твердження. Доведемо спочатку одне твердження про односторонні суми. Запис $X < Y$ для підмножин ч. в. множини S буде означати, що $x < y$ для будь-яких $x \in X, y \in Y$.

Підмножину A ч. в. множини S назвемо *верхньою* (відповідно *нижньою*), якщо $x \in A$ щораз, коли $x > y$ (відповідно $x < y$) і $y \in A$. Підмножину в S, що складається із всіх елементів x, порівнянних з кожним елементом $y \in S$, позначаємо через S_0; очевидно, що вона є ланцюгом. Елементи S_0 (і тільки їх) будемо називати *вузлами* ч. в. множини S. Відзначимо, нарешті, що одноелементні підмножини ототожнюються нами із самими елементами.

Очевидно, що ч. в. множина має верхню ширину 1 тільки в тому випадку, коли вона складається з одного елемента.

В роботі [5] доведено наступні леми:

Лема 1. *Ланцюг довжини $d > 1$ та пряма сума двох ланцюгів мають верхню ширину* 2.

Лема 2. *Нехай S – ч. в. множина верхньої ширини* 3. *Тоді S (min, max)-еквівалентна односторонній сумі двох ланцюгів ранга $r > 0$.*

5. Доведення теореми 1. Для верхньої ширини 2 та 3 доведення випливають із лем 1 та 2.

Нехай S — ч. в. множина верхньої ширини ≥ 3. Зафіксуємо в ній максимальний елемент a і позначимо через $\{a\}^<$ множину всіх елементів $x \in S$, таких, що $x < a$ (ми не включаємо в позначення символ S, тому що в кожному випадку буде ясно, про яку ч. в. множину йде мова). Тоді при $X = \{a\}^<$ маємо: $S_X^{\uparrow} = S' \coprod \{a\}$, де S' — деяка підмножина ч. в. множині $S_X^{\uparrow}$. З того, що верхня ширина S більша за 3, випливає, що ширина S' не перевищує $w_+(S) - 1$. А тоді ширина ч. в. множини $T = (S_X^{\uparrow})_a^{\uparrow}$ не перевищує $w_+(S) - 1$, бо a є його вузлом. Оскільки $w_-(S) \leq w(T)$, то $w_-(S) \leq w_+(S) - 1$.

З іншого боку, нехай P — ч. в. множина ширини $w(P) = w_-(S)$. Візьмемо довільну нижню підмножину X. Тоді з рівності $w(P) = w_-(S)$ маємо $w(X) \leq$ $\leq w_-(S)$ та $w(P \backslash X) \leq w_-(S)$. А отже, $w(P_X^{\uparrow}) \leq 2w_-(S)$.

Якщо взяти в P нижню підмножину Y таку, що $Y < (P \backslash X)$, то $Y > (P \backslash X)$ в множині $P_{XY}^{\uparrow\uparrow}$, а тому ширина $P_{XY}^{\uparrow\uparrow}$ не може бути більшою за ширину $P_X^{\uparrow}$. Отже, для довільної множини T (min,max)-еквівалентної множині S $w(T) \leq 2w_-(S)$, звідки $w_-(S) \geq \frac{w_+(S)}{2}$.

Легко перевірити, що якщо верхня ширина множини S парна, то

$$w_-(S) \geq \frac{w_+(S)}{2} = \left[\frac{w_+(S)}{2}\right] = \left[\frac{w_+(S)+1}{2}\right].$$

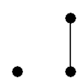
Якщо ж верхня ширина множини S непарна, то з того, що $w_-(S)$ натуральне, випливає

$$w_-(S) \geq \frac{w_+(S)+1}{2} = \left[\frac{w_+(S)+1}{2}\right].$$

Теорема 1 доведена.

6. Приклади. Розглянемо спочатку наступний простий приклад.

Приклад 1. $S = \{1, 2, 3 \mid 2 \prec 3\}$.



До даної множини (min)-еквівалентною є множина $T = \{1, 2, 3 \mid 2 \prec 3 \prec 1\}$.

Тому $w_+(S) = 2$ та $w_-(S) = 1$, що задовольняє теоремі 1.

У більш складних випадках, щоб зменшити перебір, будемо користуватися алгоритмом із [2].

Для опису всіх ч. в. множин, min-еквівалентних фіксованій ч. в. множині S, досить обмежитися послідовностями з $\mathcal{P}_2$. Такий опис можна проводити за наступною схемою:

I. Описати всі нижні підмножини $X \neq S$ в S і для кожної з них побудувати ч. в. множину $S_X^{\uparrow}$.

II. Описати всі пари (Y, X), що складаються із власної нижньої підмножини Y в S і непорожньої нижньої підмножини X в Y, такої, що $X < S \setminus Y$; для кожної такої пари побудувати ч. в. множину $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$.

III. Серед отриманих в I і II ч. в. множин вибрати по одній з кожного класу ізоморфних множин.

Зауважимо, що якщо скористатися рівністю $S_X^{\uparrow} = (S_{S\setminus X}^{\mathrm{op}\uparrow})^{\mathrm{op}}$, то у випадку $S^{\mathrm{op}} = S$ число множин $S_X^{\uparrow}$, які потрібно обчислити, можна зменшити. Однак у нашому випадку обчислення не дуже громіздкі і ми цим користуватися не будемо.

Приклад 2. $S = \{1, 2, 3, 4 \mid 3 \prec 4\}$.

Крок I. Опишемо (з точністю ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині S. Ними будуть: $A_1 = \varnothing$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{1, 2\}$, $A_5 = \{1, 3\}$, $A_6 = \{3, 4\}$, $A_7 = \{1, 2, 3\}$, $A_8 = \{1, 3, 4\}$.

Позначимо через S_i ч. в. множину $S_X^{\uparrow}$ при $X = A_i$, а через T_i – i-ту ч. в. множину з таблиці 1. Тоді легко переконатися в тому, що $S_1 \cong T_5$, $S_2 \cong T_3$, $S_3 \cong T_6$, $S_4 \cong T_1^{\mathrm{op}}$, $S_5 \cong T_4$, $S_6 \cong T_1$, $S_7 \cong T_6^{\mathrm{op}}$, $S_8 \cong T_3^{\mathrm{op}}$.

Крок II. Опишемо (з точністю ізоморфізму) всі пари (Y, X) нижніх власних підмножин в множині S, такі, що $X \subseteq Y$ і $X < S \setminus Y$. Ними будуть: $B_1 = (A_7, \{3\})$.

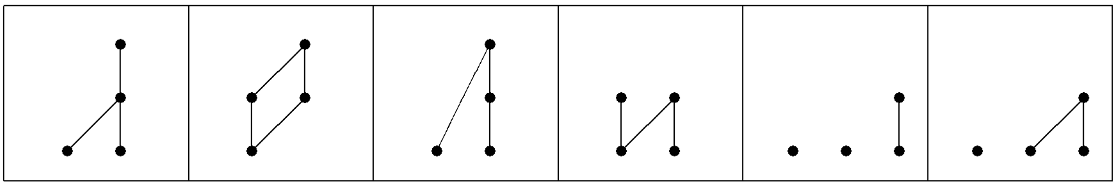
Позначимо через S_i' ч. в. множину $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $(Y, X) = B_i$; очевидно, $S_i' = (S_i)_X^{\uparrow}$. Тоді легко переконатися в тому, що $S_1' \cong T_2$.

Крок III. Отже, бачимо, що в I і II кожна із ч. в. множин T_i і T_i^{op}, де $i = 1, 2, \ldots, 6$ зустрічається один раз (при цьому, якщо $T_i^{\mathrm{op}} \cong T_i$, то T_i зустрічається, а T_i^{op} немає).

Отже, $w_+(S) = 3$ та $w_-(S) = 2$, що задовольняє теоремі 1.

Приклад 3. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \mid 4 \prec 5 \prec 6\}$.

Таблиця 1



Крок I. Опишемо (з точністю ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині S. Ними будуть: $A_1 = \varnothing$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{1,2\}$, $A_5 = \{1,4\}$,$A_6 = \{4,5\}$, $A_7 = \{1,2,3\}$, $A_8 = \{1,2,4\}$, $A_9 = \{1,4,5\}$, $A_{10} = \{4,5,6\}$, $A_{11} = \{1,2,3,4\}$, $A_{12} = \{1,2,4,5\}$, $A_{13} = \{1,4,5,6\}$, $A_{14} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{15} = \{1,2,4,5,6\}$.

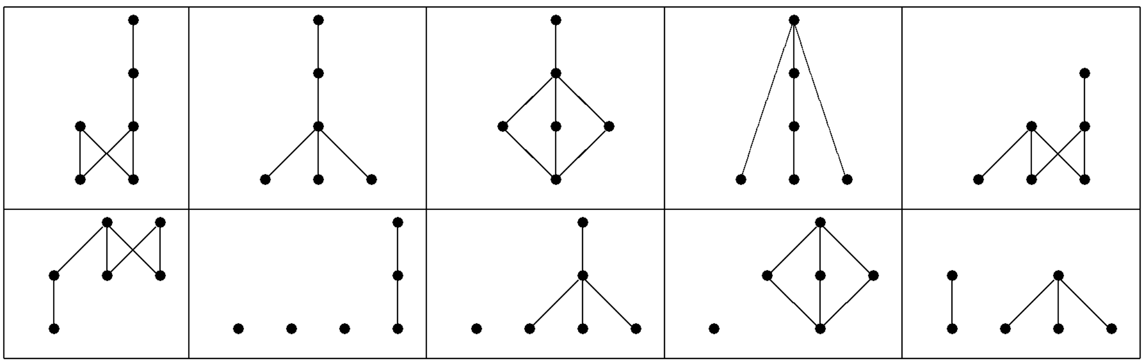
Позначимо через S_i ч. в. множину $S^{\uparrow}_X$ при $X = A_i$, а через T_i – i-ту ч. в. множину з таблиці 2. Тоді легко переконатися в тому, що $S_1 \cong T_7$, $S_2 \cong T_4$, $S_3 \cong T_{10}$, $S_4 \cong T_1^{\mathrm{op}}$, $S_5 \cong T_6$, $S_6 \cong T_8$, $S_7 \cong T_2^{\mathrm{op}}$, $S_8 \cong T_5^{\mathrm{op}}$, $S_9 \cong T_5$, $S_{10} \cong T_2$, $S_{11} \cong T_8^{\mathrm{op}}$, $S_{12} \cong T_6^{\mathrm{op}}$, $S_{13} \cong T_1$, $S_{14} \cong T_{10}^{\mathrm{op}}$, $S_{15} \cong T_4^{\mathrm{op}}$.

Крок II. Опишемо (з точністю ізоморфізму) всі пари (Y, X) нижніх власних підмножин в множині S, такі, що $X \subseteq Y$ і $X < S \setminus Y$. Ними будуть: $B_1 = (A_{11}, \{4\})$, $B_2 = (A_{14}, \{4\})$, $B_3 = (A_{14}, \{4,5\})$.

Позначимо через S'_i ч. в. множину $(S^{\uparrow}_Y)^{\uparrow}_X$ при $(Y, X) = B_i$; очевидно, $S'_i = (S_i)^{\uparrow}_X$. Тоді легко переконатися в тому, що $S'_1 \cong T_3^{\mathrm{op}}$, $S'_2 \cong T_9$, $S'_3 \cong T_3$.

Крок III. Легко бачити, що в I і II кожна із ч. в. множин T_i і T_i^{op}, де $i = 1, 2, \ldots, 10$ зустрічається один раз (при цьому, якщо $T_i^{\mathrm{op}} \cong T_i$, то T_i зустрічається, а T_i^{op} немає).

Таблиця 2



Таким чином, $w_+(S) = 4$ та $w_-(S) = 2$, що задовольняє теоремі 1.

1. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – №1. – С. 24–25.
2. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Праці Інституту математики ПАН України. – 2005. – **2**, №3. – С. 18–58.

3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно конечного типа // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 22–33.
4. *V. M. Bondarenko, M. V. Styopochkina.* On finite posets of *inj*-finite type and their Tits forms // Algebra Discrete Math. – 2006. – №2. – P. 17–21.
5. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* О частично упорядоченных множествах верхней ширины 3 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 31–34.

Одержано 07.10.2008