УДК 512.64+512.56

М. В. Стьопочкіна, І. В. Черв'яков

КІЛЬКІСТЬ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН, (MIN, MAX)-ЕКВІВАЛЕНТНИХ МНОЖИНІ (1, 2, 7)

Описано кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній примітивній частково впорядкованій множині найбільшого порядку.

За теоремою М. М. Клейнера [7] частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина має скінченний зображувальний тип тоді і тільки тоді, коли вона не містить підмножин вигляду (1,1,1,1), (2, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 2, 5) і (И, 4), які називають критичними ч. в. множинами. У праці [3] доведено, що ч. в. множина є P-критичною (критичною відносно додатності квадратичної форми Тітса) тоді і лише тоді, коли вона (min, max)-еквівалентна деякій критичній множині. (Min, max)-еквівалентність ввів В. М. Бондаренко [1] і повністю описав всі P-критичні множини.

Аналогічна ситуація за ручних ч. в. множин. Доведено [8], що ч. в. множина має ручний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить підмножин вигляду (1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (2, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 2, 6) і (И, 5), які називають суперкритичними ч. в. множинами. У праці [4] доведено, що ч. в. множина є NP-критичною (критичною відносно невід'ємності квадратичної форми Тітса) тоді і лише тоді, коли вона (min, max)-еквівалентна деякій суперкритичій множині; всі NP-критичні множини описані раніше [5].

У праці [6] введено поняття 1-надсуперкритичних ч. в. множин, які "відрізняються" від суперкритичних так само, як суперкритичні – від критичних. Це такі ч. в. множини:

1) (1, 1, 1, 1, 1, 1), 2) (1, 1, 1, 1, 2), 3) (1, 1, 2, 2), 4) (1, 1, 1, 3),
5) (2, 3, 3), 6) (2, 2, 4), 7) (1, 4, 4), 8) (1, 3, 5),
9) (1, 2, 7), 10) (6, И).

Серед них є лише одна ч. в. множина (1, 2, 7), яка має найбільший порядок і є примітивною. Нижче обчислена кількість всіх ч. в. множин, (min, max)-еквівалентних такій ч. в. множині. При цьому використані основні класифікаційні теореми із праць [2, 6].

Основні поняття. Вважаємо всі ч. в. множини скінченними. Ч. в. множина (l_1, l_2, ... , l_n) – це неперетинне об'єднання ланцюгів довжини l_1, l_2, ... , l_n. Такі ч. в. множини називають примітивними.

Нагадаємо деякі означення, пов'язані з (min, max)-еквівалентністю ч. в. множин, введеною В. М. Бондаренком [1].

Нехай S – ч. в. множина і a – її мінімальний елемент. Поставимо у відповідність елементу a ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ як об'єднання підмножин $\{a\}$ і $S \setminus a$ з найменшим частковим порядком, який містить заданий на $S \setminus a$ порядок і $a > b$ в $S_a^{\uparrow}$, якщо a і b непорівняльні в S (елемент a стає вже максимальним). Дуально вводимо ч. в. множину $S_a^{\downarrow}$ для максимального елемента $a \in S$. Надалі пишемо $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ замість $\left(S_x^{\uparrow}\right)_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\downarrow\downarrow}$ – замість $\left(S_x^{\downarrow}\right)_y^{\downarrow}$ і т. д.

Ч. в. множину T називають (min, max)-еквівалентною ч. в. множині S, якщо

$$T = S_{x_1 x_2 \dots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p} \qquad (p \geq 0),$$

де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ (не вимагається, щоб елементи $x_1, x_2, \dots, x_p$ були різні).

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2015. – Вип. 13. – С. 18-21.

Поняття (min, max)-еквівалентності природно продовжується до поняття (min, max)-ізоморфізму: ч. в. множини S і S' (min, max)-ізоморфні, якщо існує ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна S і ізоморфна S'.

Основний результат.

Основним результатом статті є така теорема (ч. в. множини розглядаємо з точністю до ізоморфізму).

Теорема. Кількість ч. в. множин, (min, max)-еквівалентних S = (1, 2, 7), дорівнює 69.

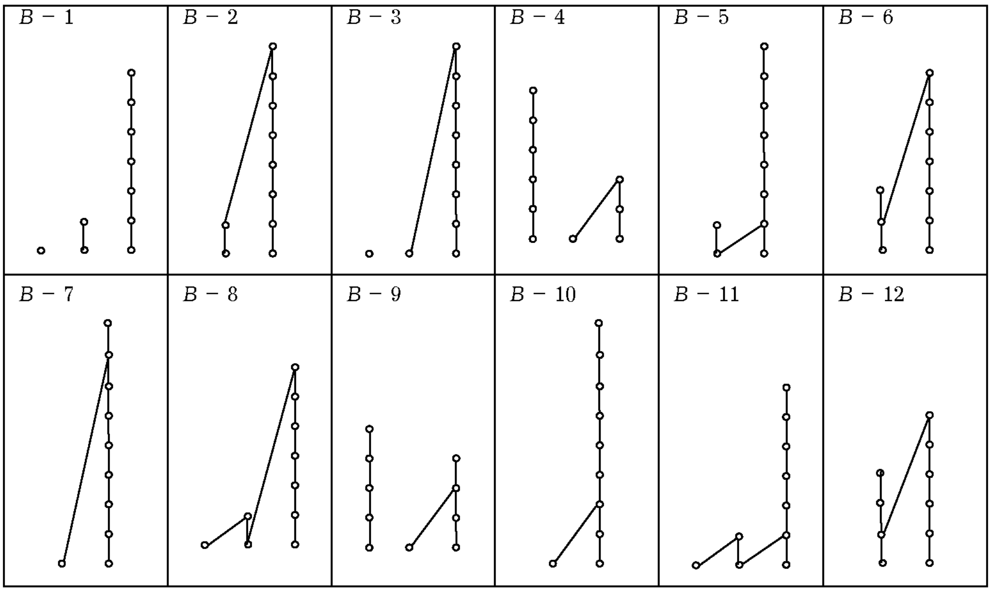
Зауважимо, що в умові теореми (min, max)-еквівалентність можна замінити (min, max)-ізоморфізмом.

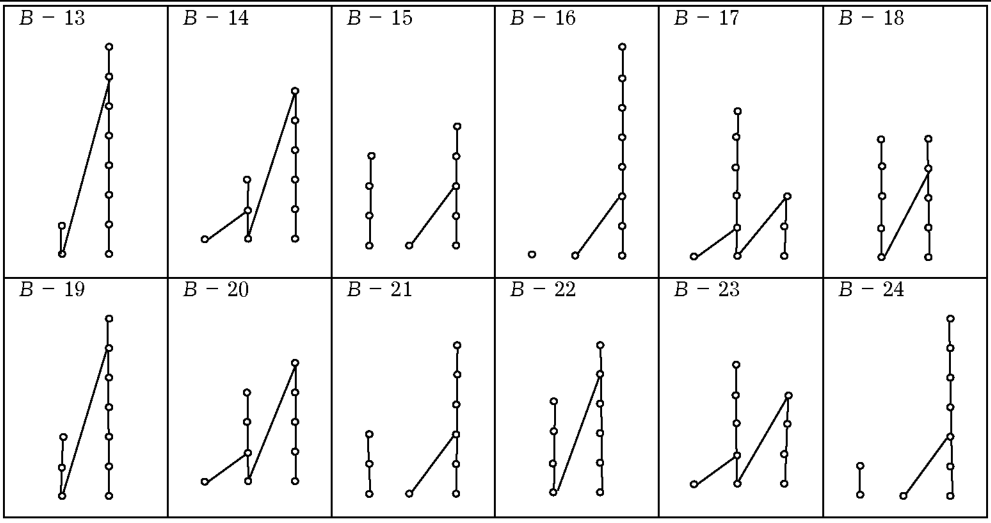
Min-еквівалентність. Якщо в означенні (min, max)-еквівалентності всі стрілки ε_i напрямлені вгору, ч. в. множину T називають min-еквівалентною ч. в. множині S (обидва ці відношення еквівалентності рівнозначні). Нагадаємо ще деякі означення та твердження із праці [3].

Послідовність $\alpha = (x_1, x_2, ..., x_p)$, $0 \le p < \infty$, довжини $d(\alpha) = p$ елементів $x_i \in S$ називають min-допустимо, якщо вираз $T = S^{\uparrow\uparrow...\uparrow}_{x_1 x_2 ... x_p}$ має сенс. У цьому випадку також пишуть $T = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Множину всіх таких послідовностей позначають $P(S)$. Покладемо $[\alpha]_S = \{x \in S \mid x = x_i$ для деякого i$\}$. Кратність входження $a \in S$ в α позначають через $m_\alpha(a)$. Множину всіх таких послідовностей $\alpha \in P(S)$, що $m_\alpha(a) < k$ для довільного $x \in S$, позначають через $P_k(S)$. Зокрема, $P_1(S)$ − це множина всіх min-допустимих послідовностей без повторень.

У праці [3] доведено, що будь-яка ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна ч. в. множині S, має вигляд $S^{\uparrow}_{\alpha}$, де $\alpha \in P_2(S)$. Детальніше T має вигляд або $S^{\uparrow}_{\alpha}$, або $\left(S^{\uparrow}_{\alpha}\right)^{\uparrow}_{\beta}$, де $\alpha, \beta \in P_1(S)$.

Доведення теореми. Ч. в. множини вигляду $S^{\uparrow}_{\alpha}$ для S = (1, 2, 7) описані раніше [6]. Це (з точністю до дуальності) ч. в. множини, вказані в таблиці.





Якщо подані в таблиці ч. в. множини рахувати не з точністю до дуальності, то легко бачити, що їх кількість дорівнює 47; про це говориться і в теоремі в праці [6].

Із основного результату праці [2] випливає, що якщо ч. в. множина T (min, max)-еквівалентна примітивній ч. в. множині S, але її не можна подати у вигляді $S_\alpha^\uparrow$, де $\alpha \in P_1(S)$, то T отримуємо із деякої ч. в. множин, де $\beta \in P_1(S)$, перерозподілом вузлових точок його зв'язних компонент (точку називають вузловою, якщо вона порівняльна з усіма іншими точками). Точніше будь-яку зв'язну компоненту $P = P_0 \cup P_1$, де P_0 − множина вузлових точок P, можна замінити компонентою такого ж вигляду $P' = P_0' \cup P_1'$, де $P_1' = P_1$ (як ч. в. множини) та $|P_0'| = |P_0|$. Оскільки вузлові точки ланцюгів не дають нових ч. в. множин з компонентами, що містять лише одну вузлову точку, то потрібно розглянути лише ч. в. множини B − 7, B − 9, B − 10, B − 15, B − 16, B − 21, B − 24 (див. таблицю). Легко бачити, що тоді кількість нових ч. в. множин буде відповідно 1, 1, 6, 2, 5, 3, 4. Отже, кількість нових ч. в. множин дорівнює 22 і, враховуючи 47 ч. в. множин, що подані в таблиці (з урахуванням дуальних множин), маємо загальне число 69.

Теорема доведена. ◊

Автори щиро вдячні В. М. Бондаренку за увагу до роботи та цінні поради.

1. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). − 2005. − № 1. − С. 24−25.
2. *Bondarenko V. M.* Minimax isomorphism algorithm and primitive posets // Algebra Discrete Math. − 2011. − **12**, № 2. − P. 31−37.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. − 2005. − **2**, № 3. − С. 18−58.
4. *Бондаренко В. М., Степочкина* М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса // Укр. мат. журн. − 2008. − **60**, № 9. − С. 1157−1167.
5. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса // Укр. мат. журн. − 2009. − **61**, № 5. − С. 734−746.

6. *Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В.* 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. I // Наук. вісник Ужгородськ. ун-ту. Сер. матем. і інформатика. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 17–25.
7. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
8. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1975. – 39, № 5. – С. 963–991.

КОЛИЧЕСТВО ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ, (MIN, MAX)-ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МНОЖЕСТВУ (1, 2, 7)

Описано количество частично упорядоченных множеств, (min, max)-эквивалентных 1-надсуперкритическому примитивному частично упорядоченному множеству наибольшего порядка.

THE NUMBER OF PARTIALLY ORDERED SETS WHICH ARE (MIN, MAX)-EQUIVALENT TO THE SET (1, 2, 7)

We describe the number of posets which are (min, max)-equivalent to the 1-oversupercritical primitive partially ordered set of maximal order.

Житомирський нац. агроекологічний ун-т, Житомир
Ін-т математики НАН України, Київ

Одержано
01.09.15