ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 358, № 2, с. 157–159

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АТКИНСОНА НА СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

 В. Ф. Журавлев

Представлено академиком С.М. Никольским 23.06.95 г.

Поступило 07.06.95 г.

Исследование разрешимости и построение решений слабонелинейных краевых задач для широкого класса обыкновенных, функционально-дифференциальных, импульсных и др. систем дифференциальных уравнений [1] представляет собой проблему, решение которой существенным образом зависит от возможности построения обобщенного обратного оператора к оператору линейной части исходной краевой задачи. Обобщенное обращение нётеровых операторов в функциональных пространствах опирается на теорему Аткинсона [2] о представлении линейных ограниченных нётеровых операторов L ($\dim N(L) \neq \dim N(L^*)$, $\dim N(L) < \infty$, $\dim N(L^*) < \infty$), которая обобщает известную теорему Никольского [3], описывающую класс фредгольмовых операторов ($\dim N(L) = \dim N(L^*)$, $\dim N(L) < \infty$, $\dim N(L^*) < \infty$). Используя теорему Аткинсона с помощью обобщения известной леммы Шмидта [4], удалось разработать способы обобщенного обращения в банаховых и псевдообращения в гильбертовых пространствах нормально разрешимых операторов, являющихся нётеровыми [1].

Однако эти способы обоснованы и "работают" только в случае конечномерности ядра и коядра оператора L и не охватывают большого класса нормально разрешимых операторов с бесконечномерными ядрами и коядрами.

Поскольку не всякое бесконечномерное подпространство в банаховом пространстве имеет прямое дополнение, для обеспечения ограниченности обобщенного обратного оператора $L^-: B_2 \to B_1$ на оператор $L: B_1 \to B_2$ накладывается условие дополняемости [5] ядра $N(L)$ и образа $R(L)$ в банаховых пространствах B_1 и B_2 соответственно. Такие операторы называют топологически нётеровыми [6]. Если ядро $N(L)$ топологически нётерова оператора L изоморфно ядру $N(L^*)$ оператора L^*, сопряженного оператору L, то оператор L называется топологически фредгольмовым.

Из определения топологически нётерова оператора следует, что любой такой оператор является нормально разрешимым ($R(L)$ замкнуто). Обратное утверждение не имеет места.

Очевидно, что всякий нётеров оператор является топологически нётеровым, а всякий фредгольмов – топологически фредгольмовым.

Ставится задача получить аналог теоремы Аткинсона для нормально разрешимых операторов $L: B_1 \to B_2$ в банаховых пространствах, ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ которых дополняемы в B_1 и B_2 соответственно и $\dim N(L) \leq \infty$, $\dim N(L^*) \leq \infty$.

Пусть $L: B_1 \to B_2$ – линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2.

Теорема 1. *Для линейного ограниченного оператора $L: B_1 \to B_2$ следующие утверждения эквивалентны:*

a1) *оператор L топологически нётеров;*

a2) *оператор L представим в виде*

$$L = F + S, \tag{1}$$

где оператор F имеет ограниченный левый $F_l^{-1}: B_2 \to B_1$ (или правый $F_r^{-1}: B_2 \to B_1$) обратный, а $-F_l^{-1}S: B_1 \to N(L) \subset B_1$ ($-F_r^{-1}S: B_1 \to N_1(L) \subseteq N(L) \subset \subset B_1$) – ограниченный проектор;

a3) *оператор L представим в виде*

$$L = F + S,$$

где оператор F имеет ограниченный левый $F_l^{-1}: B_2 \to B_1$ (или правый $F_r^{-1}: B_2 \to B_1$) обратный, а $-SF_l^{-1}: B_2 \to Y_1 \subseteq Y \subset B_2$ ($-SF_r^{-1}: B_2 \to Y \subset B_2$) – ограниченный проектор;

a4) *оператор L представим в виде*

$$L = FQ_1,$$

Институт математики
Национальной академии наук Украины, Киев

где оператор F имеет ограниченный левый F_l^{-1}: $B_2 \to B_1$ (*или правый* F_r^{-1}: $B_2 \to B_1$) *обратный, а* Q_1: $B_1 \to B_1 \ominus N(L)$ (Q_1: $B_1 \to B_1 \ominus N_1(L)$) – *ограниченный проектор*;

а5) *оператор L представим в виде*

$$L = Q_2F$$

где оператор F имеет ограниченный левый F_l^{-1}: $B_2 \to B_1$ (*или правый* F_r^{-1}: $B_2 \to B_1$) *обратный, а* Q_2: $B_2 \to R(L) \oplus Y_0$ (Q_2: $B_2 \to R(L)$) – *ограниченный проектор, где* $Y_0 = Y \ominus Y_1$.

Доказательство. а1) $\Rightarrow$ а2). Пусть L – топологически нётеров оператор. Тогда возможны два случая:

либо $N(L)$ изоморфно $Y_1 \subset Y$;

либо $N(L) \supset N_1(L)$ изоморфно Y.

Пусть для определенности $N(L)$ изоморфно $Y_1 \subset Y$. В этом случае существует линейный ограниченный обратимый оператор $\bar{P}_{Y_1}$: $B_1 \to B_2$, такой, что

$$\bar{P}_{Y_1}N(L) = Y_1, \quad \bar{P}_{Y_1}^{-1}Y_1 = N(L)$$

и существует ограниченный проектор P_{Y_0}: $B_2 \to B_2$, разбивающий подпространство Y в прямую сумму замкнутых подпространств

$$Y = Y_0 \oplus Y_1, \tag{2}$$

где $Y_0 = P_{Y_0}B_2$, $Y_1 = P_{Y_1}B_2$, $P_{Y_1} = P_Y - P_{Y_0}$.

Покажем, что оператор $L + \bar{P}_{Y_1}$ имеет ограниченный левый обратный. Для этого необходимо и достаточно показать, что:

i) $N(L + \bar{P}_{Y_1}) = \{0\}$ и

ii) $R(L + \bar{P}_{Y_1})$ дополняемо в B_2.

Доказательство.

i) Пусть существует $x_0 \neq 0$, такое, что

$$(L + \bar{P}_{Y_1})x_0 = Lx_0 + \bar{P}_{Y_1}x_0 = 0. \tag{3}$$

Из (3) имеем, что

$$Lx_0 \in R(L), \quad \bar{P}_{Y_1}x_0 \in Y_1.$$

Подпространства $R(L)$ и Y взаимно дополняют друг друга, следовательно, $R(L) \cap Y = \{0\}$ [5], откуда следует, что они имеют только один общий элемент – нулевой, т.е. $Lx_0 = 0$, $\bar{P}_{Y_1}x_0 = 0$. Таким образом, из $x_0 \in N(L)$ и $x_0 \in N(\bar{P}_{Y_1})$ следует, что $x_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $N(L + \bar{P}_{Y_1}) = \{0\}$.

ii) Дополняемость $R(L + \bar{P}_{Y_1})$ следует из ограниченности проектора P_{Y_0}. Таким образом, оператор $L + \bar{P}_{Y_1}$ имеет ограниченный левый обратный.

Взяв в качестве F оператор $L + \bar{P}_{Y_1}$, а в качестве S оператор $-\bar{P}_{Y_1}$, получим представление (1) для топологически нётерова оператора.

а2) $\Rightarrow$ а1). Пусть $L = F + S$, где F имеет ограниченный левый обратный F_l^{-1}, а $-F_l^{-1}S$: $B_1 \to N(L)$ – ограниченный проектор.

Уравнения $Lx = y$ и $F_l^{-1}Lx = x + F_l^{-1}Sx = F_l^{-1}y$, $y \in B_2 \ominus N_0(L^*)$ эквивалентны. Рассмотрим однородное уравнение

$$x + F_l^{-1}Sx = 0 \quad \text{или} \quad x = -F_l^{-1}Sx.$$

Оператор $-F_l^{-1}S = P_{N(L)}$ переводит элементы пространства B_1 в себя и по условию теоремы ограничен, следовательно, $P_{N(L)}$: $B_1 \to B_1$ – ограниченный проектор ($P_{N(L)}^2 = P_{N(L)}$), который разбивает пространство B_1 в прямую сумму замкнутых подпространств

$$B_1 = N(L) \oplus X, \tag{4}$$

где $X = R(I_{B_1} - P_{N(L)})$.

Из обратимости оператора F: $B_1 \to B_2$ слева следует, что F осуществляет взаимно-однозначное соответствие пространств B_1 и $B_2 \ominus Y_0$. Следовательно, $L = F(I_{B_1} - P_{N(L)})$, $R(L) = FR(I_{B_1} - P_{N(L)})$, $Y_1 = FN(L)$ и

$$B_2 \ominus Y_0 = Y_1 \oplus R(L).$$

С учетом (2) имеем

$$B_2 = Y \oplus R(L). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует топологическая нётеровость оператора L.

а2) $\Leftrightarrow$ а3). Равносильность утверждений следует из существования ограниченного обратного оператора F_l^{-1}, ограниченности оператора P_{Y_0} и равенств

$$Lx = F(I_{B_1} + F_l^{-1}S)x + P_{Y_0}Sx =$$

$$= F(I_{B_1} + F_l^{-1}S)x = (I_{B_2} + SF_l^{-1})Fx = y, \tag{6}$$

так как $FF_l^{-1} = I_{B_2} - P_{Y_0}$ и $P_{Y_0}S = 0$.

а2) $\Leftrightarrow$ а4), а3) $\Leftrightarrow$ а5). Эквивалентность этих утверждений следует из существования ограниченного обратного оператора F_l^{-1}, ограниченности оператора P_{Y_0} и равенств (6).

Теорема доказана.

Для случая, когда $N_1(L)$ изоморфно Y, теорема доказывается аналогично.

Замечание 1. Если $\dim R(-SF_l^{-1}) < \infty$ и $\dim R(-F_l^{-1}S) < \infty$, теорема 1 переходит в теорему Аткинсона [2], которая описывает класс нормально разрешимых операторов, являющихся нётеровыми.

Если подпространства $N(L)$ и Y изоморфны, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для линейного ограниченного оператора L: $B_1 \to B_2$ следующие утверждения эквивалентны:*

a1) *оператор L топологически фредгольмов;*

a2) *оператор L представим в виде*

$$L = F + S,$$

где оператор F имеет ограниченный обратный F^{-1}: $B_2 \to B_1$, а $-F^{-1}S$: $B_1 \to N(L)$ – ограниченный проектор;

a3) *оператор L представим в виде*

$$L = F + S,$$

где оператор F имеет ограниченный обратный F^{-1}: $B_2 \to B_1$, а $-SF^{-1}$: $B_2 \to Y$ – ограниченный проектор;

a4) *оператор L представим в виде*

$$L = FQ_1,$$

где оператор F имеет ограниченный обратный F^{-1}: $B_2 \to B_1$, а Q_1: $B_1 \to B_1 \ominus N(L)$ – ограниченный проектор;

a5) *оператор L представим в виде*

$$L = Q_2F,$$

где оператор F имеет ограниченный обратный F^{-1}: $B_2 \to B_1$, а Q_2: $B_2 \to R(L)$ – ограниченный проектор.

Замечание 2. Если $\dim R(-SF_l^{-1}) < \infty$ и $\dim R(-F_l^{-1}S) < \infty$ и эти размерности совпадают, то теорема 2 переходит в теорему Никольского [3], которая описывает класс нормально разрешимых операторов, являющихся фредгольмовыми.

Используя теорему 1, можно доказать следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть L: $B_1 \to B_2$ – топологически нётеров оператор. Тогда существует ограниченный оператор U: $B_2 \to B_1$ такой, что*

$$UL = I_{B_1} - P_1, \quad LU = I_{B_2} - P_2, \tag{7}$$

где P_1: $B_1 \to N(L)$, $I_{B_2} - P_2$: $B_2 \to R(L)$ – ограниченные проекторы.

Лемма 2. *Пусть L: $B_1 \to B_2$ – ограниченный оператор и существуют такие ограниченные операторы U_1, U_2: $B_2 \to B_1$, что*

$$U_1L = I_{B_1} - T_1, \quad LU_2 = I_{B_2} - T_2, \tag{8}$$

где T_1, T_2 – ограниченные операторы. Тогда оператор L топологически нётеров.

Леммы 1 и 2 позволяют доказать утверждение об устойчивости свойства топологической нётеровости оператора к малым возмущениям.

Теорема 3. *Пусть L: $B_1 \to B_2$ – топологически нётеров оператор. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого ограниченного оператора L_0, $\|L_0\| < \varepsilon$, оператор $L + L_0$ топологически нётеров.*

Доказательство. Построим такой ограниченный оператор U: $B_2 \to B_1$, чтобы выполнялись условия (7). Существование такого оператора U вытекает из леммы 1. Пусть $\varepsilon = \|U\|^{-1}$ и $\|L_0\| < \varepsilon$. Тогда с учетом (8) имеем

$$U(L + L_0) = I_{B_1} - P_1 + UL_0.$$

Обозначим $D_1 = (I_{B_1} + UL_0)^{-1}U$. Существование обратного оператора к оператору $(I_{B_1} + UL_0)$ гарантировано условием $\|L_0\| < \varepsilon$. Тогда

$$D_1(L + L_0) = (I_{B_1} + UL_0)^{-1}U(L + L_0) =$$

$$= (I_{B_1} + UL_0)^{-1}[(I_{B_1} + UL_0) - P_1] =$$

$$= I_{B_1} - (I_{B_1} + UL_0)^{-1}P_1 = I_{B_1} + T_1.$$

Оператор T_1 ограничен как суперпозиция ограниченных операторов. Аналогично строится оператор $D_2 = U(I_{B_1} + UL_0)^{-1}$ такой, что

$$(L + L_0)D_2 = I_{B_2} + T_2,$$

где оператор T_2 ограничен. По лемме 2 оператор $L + L_0$ топологически нётеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нётеровы краевые задачи. Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. 320 с.
2. *Аткинсон Ф.В.* // Мат. сб. Нов. сер. 1951. Т. 28. № 1. С. 3–14.
3. *Никольский С.М.* // Изв. АН СССР. 1943. Т. 7. № 3. С. 147–163.
4. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
5. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982. 536 с.
6. *Абдуллаев А.Р.* Функционально-дифференциальные уравнения: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Перм. политехн. ин-т., 1992. С. 80–87.