УДК 512.5+512.6

Віталій М. Бондаренко*
Марина В. Стьопочкіна*

Про вигляд ч. в. множин з додатно визначеною формою Тітса

Доведено, що ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса (min, max)-еквівалентна ч. в. множині без циклів.

Ключові слова: ч. в. множина, квадратична форма Тітса, (min, max)-еквівалентність..

Vitalij M. Bondarenko*
Marina V. Styopochkina*

On a form of the posets with positive definite Tits form.

We prove that a poset with positive definite Tits form is (min, max)-equivalent to a posets without cycles.

Key Words: poset, Tits quadratic form, (min, max)-equivalence.

*E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua, StMar@ukr.net

Ми розглядаємо скінченні ч. в. (частково впорядковані) множини з додатно визначеною формою Тітса і вивчаємо їх з точністю до (min, max)-еквівалентності, яка введена в [1].

Нагадаємо означення такої еквівалентності.

Нехай S – ч. в. множина і a – її мінімальний (відповідно максимальний) елемент. Запис $x <> y$ для $x, y \in S$ буде означати, що x і y непорівнянні. Покладемо $S^{\diamond}(a) = \{x \in S \mid x <> a\}$.

Означимо ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) наступним чином. Як звичайна множина це S, і при цьому частковий порядок на $S \setminus a$ збережено, а a є вже максимальним (відповідно мінімальним) елементом і до того ж $a>x$ (відповідно $a<x$) тоді і лише тоді, коли $x \in S^{\diamond}(a)$.

Ми будемо писати $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ замість $\left(S_x^{\uparrow}\right)_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ замість $\left(S_x^{\uparrow}\right)_y^{\downarrow}$, тощо.

Нехай S і T – ч. в. множини, такі, що $S=T$ як звичайні множини.

Ми називаємо їх (min, max)-еквівалентними і пишемо $T \cong_{(\min,\max)} S$, якщо $T = S_{x_1 x_2 \dots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p}$ $(p \geq 0)$, де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ і, для кожного $i = 1, \dots, p$, x_i – мінімальний (відповідно максимальний) елемент $S_{x_1 x_2 \dots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1}}$, якщо $\varepsilon_i = \uparrow$ (відповідно $\varepsilon_i = \downarrow$); для $p=0$ вважаємо, що $T=S$. При цьому елементи $x_1, x_2, \dots, x_p \in S$ не обов'язково різні.

Нагадаємо ще, що квадратичною формою Тітса ч. в. множини S називають форму

© В.М. Бондаренко, М.В. Стьопочкіна, 2006

$$q_S(z) = q_S(z_0, z_i) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j,\, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i \,.$$

У роботі [1] доведено, що (min, max)-еквівалентні ч. в. множини мають еквівалентні форми Тітса.

Зіставимо ч. в. множині S граф $\overline{S}$ з множиною вершин S і ребрами $x - y$, де x і $y>x$ є сусідніми (тобто не існує z, такого, що $y>z>x$). S назвемо ч. в. множиною без циклів, якщо таким є граф $\overline{S}$.

У цій статті ми доведемо наступну теорему.

Теорема. *Будь-яка ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса (min, max)-еквівалентна ч. в. множині без циклів.*

Нам знадобиться одна лема, яка випливає безпосередньо із означення (min, max)-еквівалентності.

Лема 1. *Нехай X_1 – множина всіх мінімальних елементів ч. в. множини X порядку n і (індуктивно) X_i, $i>1$, – множина всіх мінімальних елементів $X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} X_j\right)$; запис $h(x)=i$ для $x \in X$ означатиме, що $x \in X_i$. Тоді для будь-якої послідовності $(x_1, x_2, ..., x_n)$ елементів із X, такої, що $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$ і $h(x_1) \le h(x_2) \le \ldots \le h(x_n)$, вираз $X' = X^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1 x_2 \ldots x_n}$ має сенс; до того ж $X' = X$.*

Переходимо до доведення теореми. Ширину ч. в. множини X (максимальне число її попарно непорівнянних елементів) позначаємо $w(X)$.

Зафіксуємо в S максимальний елемент a і покладемо $S(a) = \{x \in S \mid x < a\}$. Зафіксуємо, далі, для $X=S(a)$ одну із послідовностей $y_1, y_2, ..., y_n$, про які йшла мова в лемі 1. Тоді в $S' = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{y_1 y_2 \ldots y_n}$ елемент a є як мінімальним, так і максимальним. Отже, $S' = (S' \setminus a) \coprod \{a\}$ (пряма сума $\coprod$ ч. в. множин – це їх неперетинне об'єднання). Звідси випливає, що існує ч. в. множина T, для якої виконані наступні умови:

1) $T \cong_{(\min,\max)} S$;

2) $T = A \coprod B$, де $w(A) = 1$;

3) не існує T', A', B', таких, що виконані умови 1), 2) і $|A'| > |A|$.

Якщо при цьому $B = \varnothing$, то $w(T) = 1$, а якщо $w(B) = 1$, то T – пряма сума двох ч. в. множин ширини 1; в обох випадках твердження теореми очевидне. Випадок $w(B) \ge 3$ неможливий, бо тоді $w(T) \ge 4$, форма Тітса $q(z)$ ч. в. множини, що складається із чотирьох попарно непорівнянних елементів, скажімо 1, 2, 3, 4, не є додатно визначеною: $q(z) = 0$ для $z_0 = 2, z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$.

Таким чином, залишилося розглянути випадок, коли $w(B)=2$. Зауважимо, що оскільки за умовою теореми форма Тітса $q_S(z)$ додатно визначена, то такою ж є форма $q_T(z)$, а значить і форма $q_B(z)$.

Лема 2. *Якщо* $w(B)=2$, *то*

а) B *має два мінімальних елемента, скажімо* b *і* c, *і два максимальних елемента, скажімо* f *і* g;

б) в B *існують мінімальний та максимальний елементи, що є непорівнянними.*

в) якщо $b<x<f$ *і* $c<y<g$, *то* x *і* y *непорівнянні.*

Дійсно, якщо B має один мінімальний (відповідно максимальний) елемент, скажімо h, то $T'=T_h^{\uparrow}$ (відповідно $T'=T_h^{\downarrow}$) дорівнює $(B\setminus h)\coprod(A\bigcup h)$, де $w(A\bigcup h)=1$, а це протирічить вибору T. Далі, якщо умова б) не виконана і P позначає підмножину, що складається із елементів b,c,f,g, то $q_P(z)=0$ для $z_0=0, z_b=z_c=1, z_f=z_g=-1$ і маємо протиріччя ($q_P(z)$ не є додатно визначеною). Нарешті, якщо не виконана умова в) (а а) та б) виконані) і Q позначає підмножину, що складається із елементів b,c,f,g,x,y, то $q_Q(z)=0$ для $z_0=0$, $z_b=z_c=z_x=-1$, $z_f=z_g=z_y=1$ і знову протиріччя. Лему доведено.

Продовжуємо доведення теореми. Якщо B є прямою сумою двох підмножин ширини 1, то твердження теореми очевидне. В іншому разі за лемою 2 можливі (з точністю до ізоморфізму) лише такі два випадки: 1) $B=\{x_1<x_2...<x_p, y_1<y_2...<y_q, x_i<y_j\}$, де або $i=1, j>1$, або $i<p, j=q$; 2) $B=\{x_1<x_2...<x_p, y_1<y_2...<y_q, x_1<y_j, x_i<y_q\}$, де $1<i<p, 1<j<q$. І в першому випадку циклів не має сама ч. в. множина T, а в другому – ч. в. множина $T_{x_1}^{\uparrow}$. Теорему доведено.

Література

1. Бондаренко В. М. Про (min, max)-еквівалентність ч. в. можин та її застосування до форм Тітса – Київ: Вісник Київського університету, 2005. – 1. – с. 24-25.

Надійшла до редакції 14.02.2006