В. М. Бондаренко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)
М. В. Степочкина (Киевский нац. ун-т имени Тараса Шевченко)

О СВЯЗИ МЕЖДУ INJ-КОНЕЧНОСТЮ ТИПА И ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЮ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ТИТСА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

In this paper we prove that any finite poset with positive definite Tits form is of inj-finite type.

В цій статті доводиться, що всяка скінченна частково упорядкована множина з додатно визначеною формою Тітса має inj-скінченний тип.

Квадратичная форма Титса, введенная П. Габриелем [1] для колчанов, Ш. Бреннер [2] для колчанов с соотношениями, Ю. А. Дроздом [3] для частично упорядоченных множеств и т. д., играет важную роль в теории представлений (см., например, введение из [4]). В частности в [3] доказано, что конечное частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество A имеет конечное число классов изоморфизмов неразложимых представлений над полем тогда и только тогда, когда его форма Титса $q_A : \mathbb{Z}^{A\cup 0} \to \mathbb{Z}$, которая задается равенством

$$q_A(z) = z_0^2 + \sum_{i\in A} z_i^2 + \sum_{\substack{i<j,\\ i,j\in A}} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in A} z_i,$$

является слабо положительной (с формальных соображений нужно считать, что A не содержит 0). Напомним, что квадратичная форма $f(z) : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ называется слабо положительной, если $f(z) > 0$ для всех ненулевых $z = (z_1, \dots, z_n)$, таких, что $z_1, \dots, z_n \geq 0$; если $f(z) > 0$ для всех $z \neq 0$, то форма называется положительно определенной или просто положительной.

В [5] авторы доказали, что категория представлений категории $InjA$ (инъективных представлений ч. у. множества A) имеет конечное число классов изоморфизмов неразложимых объектов тогда и только тогда, когда форма Титса категории $InjA$ является слабо положительной. В этой статье мы продолжаем изучение категорий $InjA$ такого типа.

1. Инъективные представления частично упорядоченных множеств.

На протяжении всей статьи k — произвольное фиксированное поле. Векторные пространства, которые мы рассматриваем, являются конечномерными векторными пространствами над k, а ч. у. множества — конечными; при этом мы предполагаем, что последние не содержат элементов 0 и $\pm\infty$. Линейные отображения, морфизмы категорий и т. п. умножаются слева направо.

Напомним хорошо известные определения в терминах векторных пространств, проградуированных с помощью ч. у. множеств [5], [6].

Пусть A — ч. у. множество. A-градуированным векторным пространством называется прямая сумма $U = \bigoplus_{x\in A} U_x$ векторных пространств U_x. Линейное отображение $\varphi : U \to U'$ между A-градуированными k-пространствами U и U' называется A-отображением, если отображение φ_{bc} является нулевым всякий раз, когда $b \not\leq c$, где (для $x, y \in A$) $\varphi_{xy} : U_x \in U'_y$ обозначает индуцированное отображение. Множество всех A-отображений U в U' (которое есть подпространством в $\mathrm{Hom}(U, U')$) обозначаем через $\mathrm{Hom}_A(U, U')$.

Категорию A-градуированных векторных пространств над полем k (объектами которой являются A-градуированные пространства, а морфизмами — A-отображения) будем обозначать через $\mathrm{mod}_A k$, по аналогии с категорией конечномерных векторных k-пространств $\mathrm{mod}\, k$.

Представлением ч. у. множества A называется тройка $X = (V, U, \gamma)$, состоящая из пространств $V \in \mathrm{mod}\, k$, $U \in \mathrm{mod}_A k$ и линейного отображения $\gamma : V \to U$. Морфизмом из (V, U, γ) в (V', U', γ') есть произвольная пара (μ, ν) линейных отображений $\mu \in \mathrm{Hom}(V, V')$ и $\nu \in \mathrm{Hom}_A(U, U')$, таких, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma} & U \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ V' & \xrightarrow{\gamma'} & U' \end{array}$$

коммутативная. Перемножаются морфизмы покоординатно.

Категорию представлений (над полем k) ч. у. множества A будем обозначать через $RepA$.

Для морфизма $\alpha = (\mu, \nu) : X \to Y$ в $RepA$ мы пишем $0 \Rightarrow X \overset{\alpha}{\to} Y$ если μ и все ν_{xx} инъективны. Представление X ч. у. множества A называется инъективным, если любая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \Rightarrow & R' & \to & R \\ & & \downarrow & & \\ & & X & & \end{array}$$

может быть вложена в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \Rightarrow & R' & \to & R \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & X & & \end{array}.$$

Полную подкатегорию категории $RepA$, состоящую из всех инъективных объектов обозначим через $InjA$. Мы говорим, что A имеет инъективно-конечный (или inj-конечный) тип, если категория представлений $Funct(InjA, \mathrm{mod}\, k)$ категории $InjA$ имеет конечное число классов изоморфизмов неразложимых объектов.

Сопоставим ч. у. множеству A колчан $\overrightarrow{A} = (\overrightarrow{A}_0, \overrightarrow{A}_1)$ с множеством вершин $\overrightarrow{A}_0 = A$ и множеством стрелок

$$\overrightarrow{A}_1 = \{i \to j \,|\, i < j,\ i \text{ и } j \text{ — соседние}\}$$

(элементы i и $j > i$ называются соседними, если не существует елемента s, такого, что $j > s > i$). Мы будем рассматривать $\overrightarrow{A}$ как коммутативный колчан, т. е. любые два нетривиальных пути в $\overrightarrow{A}$ с одинаковыми начальными и конечными вершинами равны (и других соотношений нет). Стрелка $x \to y$ обозначается (x, y), и мы пишем $[x, y]$, если существует стрелка $x \to y$ или $y \to x$.

Из результатов работ [5] и [7] вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — ч. у. множество и $B = A \cup \infty$, где $x < \infty$ для любого $x \in A$. Тогда A имеет inj-конечный тип в том и только в том случае, когда коммутативный колчан $\overrightarrow{B}$ не содержит подколчанов (с соотношениями), изомор-*

фных или антиизоморфных одному из следующих связных коммутативных колчанов $Q = (Q_0, Q_1)$:

I. $Q_1 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$;

II. $Q_1 = \{[1,2], [1,3], [1,4], [1,5]\}$;

III. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], [1,4], [4,5], [1,6], [6,7]\}$;

IV. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], [3,4], [1,5], [5,6], [6,7], [1,8]\}$;

V. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], [1,4], [4,5], [5,6], [6,7], [7,8], [1,9]\}$;

VI. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], [3,4], [4,5], (6,5), (5,8), (6,7), (7,8), [7,9]\}$;

VII. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], [3,4], [4,5], (6,5), (5,8), (6,7), (7,8), [8,9]\}$;

VIII. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], [3,4], [4,5], (6,5), (7,6), (8,5), (7,8), [8,9]\}$;

IX. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], (4,3), (3,8), (4,5), (5,8), [5,6], [6,7]\}$;

X. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], [3,4], (5,4), (4,8), (5,6), (6,7), (7,8), [7,9]\}$;

XI. $Q_1 = \{(1,2), (2,5), (1,3), (3,4), (4,5), [4,6], [6,7], [7,8], [8,9]\}$;

XII. $Q_1 = \{[1,2], [2,3], (4,3), (3,8), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), [6,9]\}$.

Напомним, что колчан Q называется подколчаном коммутативного колчана P, если его можно получить из P с помощью комбинации следующих операций:

1) выбрасывание (+)- или (-)-допустимой вершины (т. е. такой, что, соответственно, не есть начальной или конечной для любой стрелки) всесте со всеми стрелками, которые содержат ее;

2) отождествление концов стрелки α вместе с выбрасыванием α и любой лишней стрелки β (т. е. такой, которая равна пути $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_s$, где $\gamma_i \neq \beta$).

Заметим, что Q рассматривается как колчан с соотношениями, индуцированными отношениями коммутативности (Q не обязательно коммутативный).

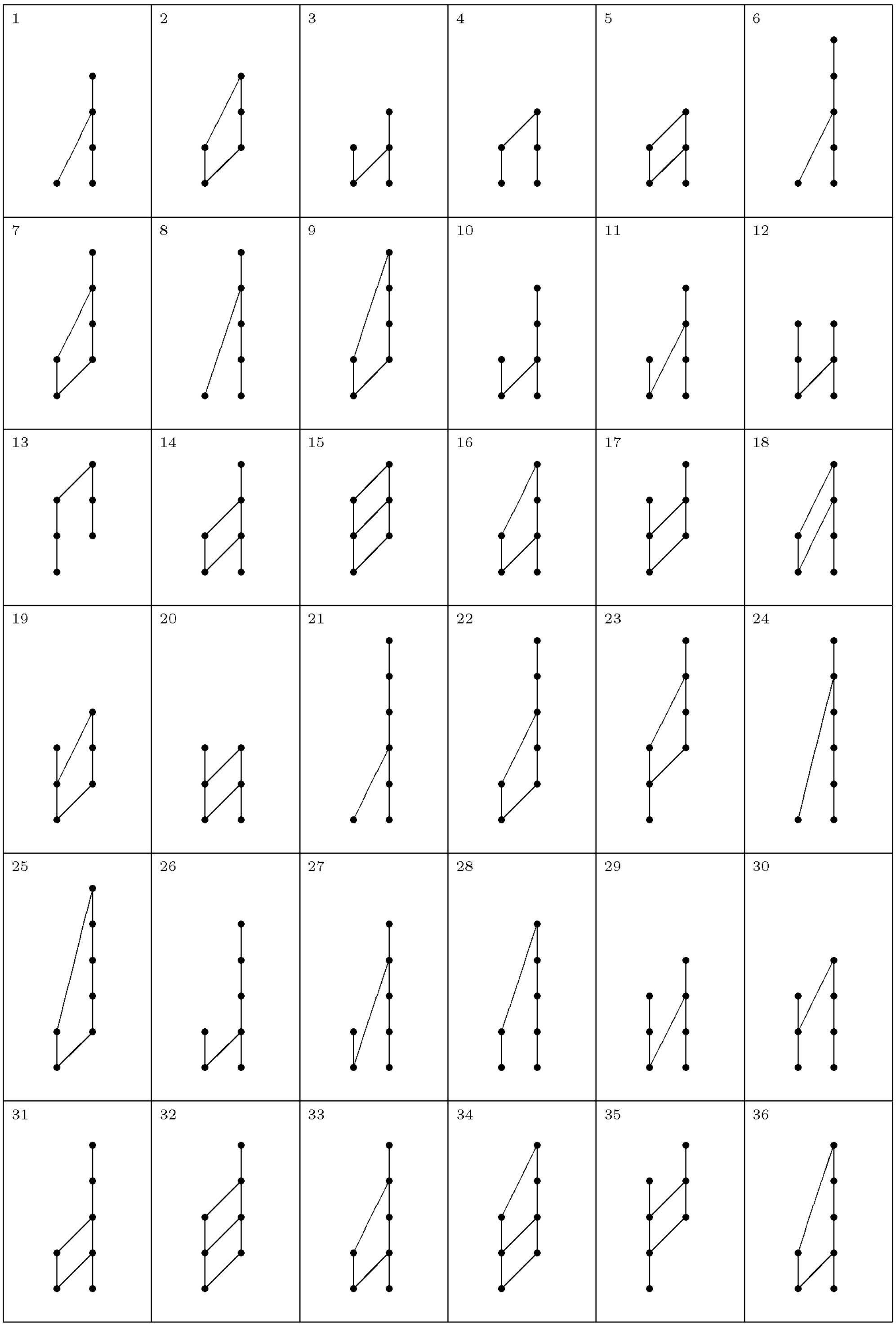
2. Основной результат. Мы изучаем связь между inj-конечностью типа и положительностью квадратичной формы Титса для ч. у. множеств.

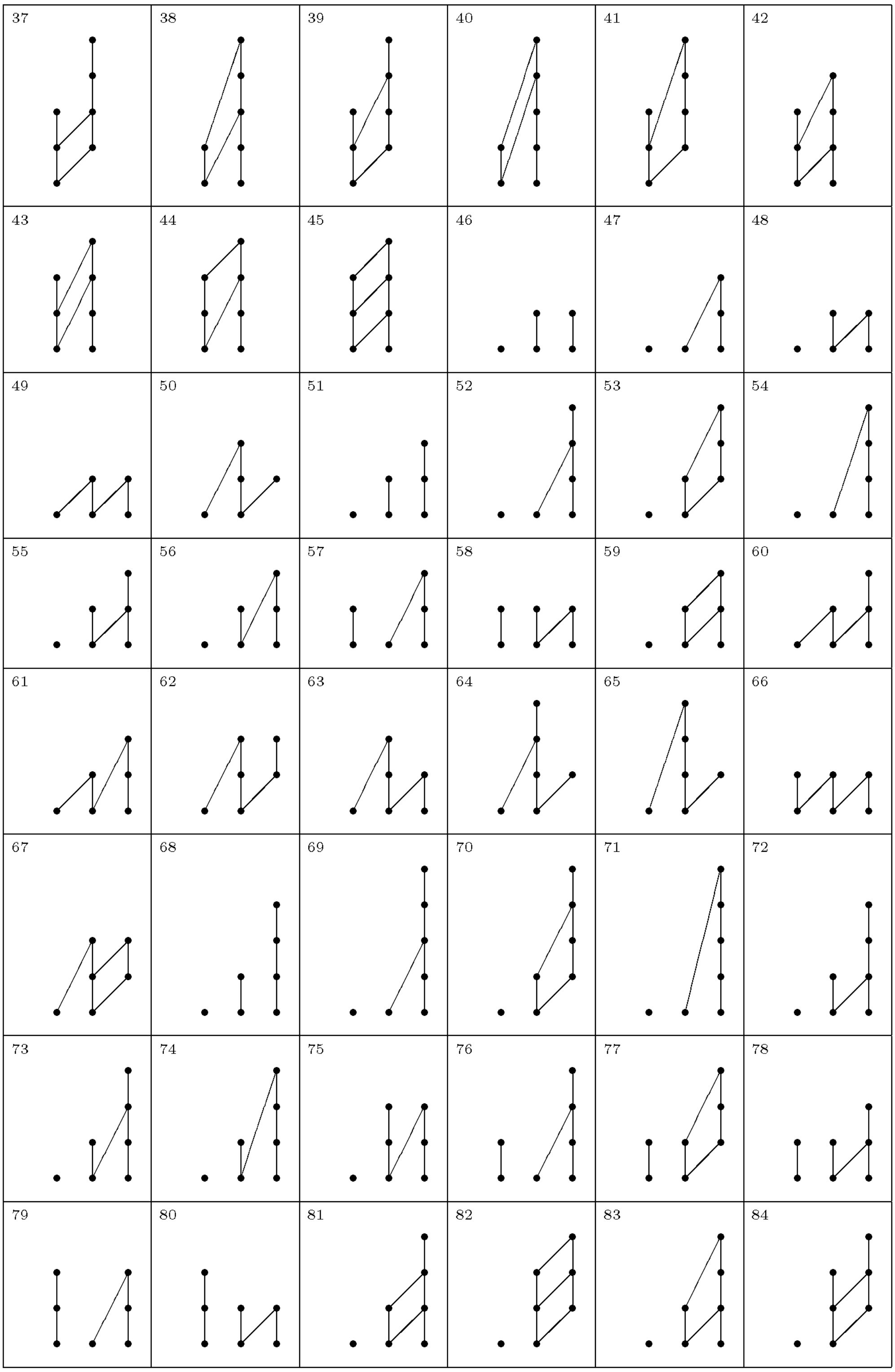
Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

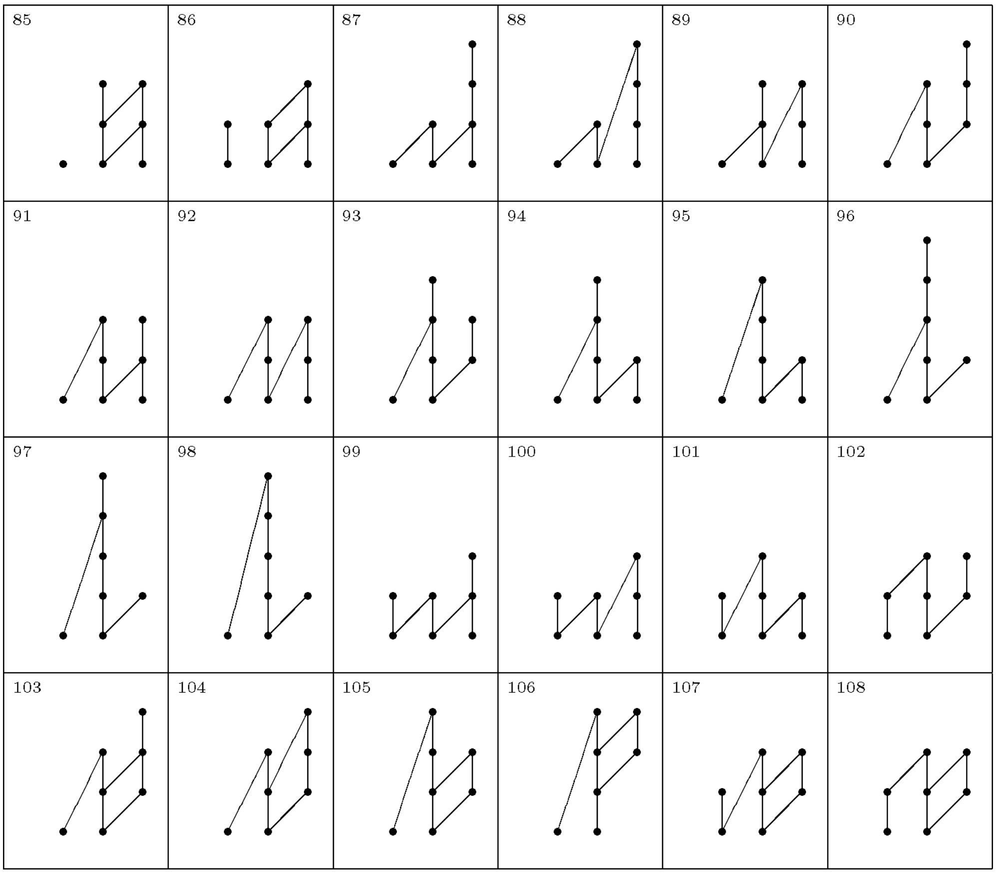
Теорема 2. *Всякое ч. у. множество с положительно определенной формой Титса имеет* inj*-конечный тип.*

Утверждение теоремы 2 легко проверить, пользуясь теоремой 1 и полным списком ч. у. множеств с положительно определенной формой Титса, который получен авторами в работе [8] и который мы приводим ниже (в списке ч. у. множества указаны с точностью до двойственности).

Ч. у. множества с положительно определенной формой Титса




37 38 39 40 41 42
43 44 45 46 47 48
49 50 51 52 53 54
55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66
67 68 69 70 71 72
73 74 75 76 77 78
79 80 81 82 83 84



1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – **6**. – P. 71–103, 309.
2. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. of Intern. Conference of Representations of Algebras. – Carleton Univ., Ottawa, Ontario, 1974. – Paper №5.
3. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
4. *Bondarenko V. M., Polishchuk A. M.* Minimax sums of posets and the quadratic Tits form // Algebra Discrete Math. – 2004. – №1ю. – P. 17–36.
5. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно конечного типа // Наук. вiсник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. i iнформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 22-33.
6. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear algebra and appl., speciall issue: "Linear Algebra Methods in Representation Theory". – 2003. – 365. – P. 45–90.
7. *Завадский А. Г., Шкабара А. С.* Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа. – К.: Препр. АН УССР. Ин-т математики, 1976, 76-3. – 52 с.
8. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналiзу i алгебри. Працi Iн-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, 3. – С. 3–46.

Одержано 16.09.2006