УДК 512.64+512.56

В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПИСАНИЕ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ, КРИТИЧЕСКИХ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ТИТСА

We present the complete description of finite posets whose Tits form is not nonnegative but all proper subposets already have the nonnegative Tits form. The analogous result for positive forms is obtained by the authors earlier.

Наведено повний опис скінченних частково впорядкованих множин, форма Тітса яких не є невід'ємною, але всі власні підмножини яких мають невід'ємну форму Тітса. Аналогічний результат для додатних форм отримано авторами раніше.

1. Введение. В работе [1] П. Габриель ввел для конечного колчана (ориентированного графа) Q с множеством вершин Q_0 и множеством стрелок Q_1 квадратичную форму $q_Q\colon \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$, названную им квадратичной формой Титса колчана Q:

$$q_Q(z) = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{i \to j} z_i z_j,$$

где $i \to j$ пробегает множество Q_1. В этой же работе доказано, что колчан имеет конечный представленческий тип над полем k (т. е., с точностью до изоморфизма, конечное число неразложимых представлений) тогда и только тогда, когда его форма Титса является положительной. Эта работа П. Габриеля стала началом нового направления в алгебре, которое изучает связь между свойствами представлений различных объектов и свойствами связанных с ними квадратичных форм.

Следующими в этом направлении были работы Ш. Бреннер [2] и Ю. А. Дрозда [3], посвященные изучению квадратичных форм Титса соответственно для колчанов с соотношениями и частично упорядоченных (ч. у.) множеств. В общей ситуации для матричных задач без соотношений форма Титса введена М. М. Клейнером и А. В. Ройтером в [4].

В работе [3] показано, что ч. у. множество имеет конечный представленческий тип тогда и только тогда, когда его форма Титса слабоположительна (т. е. принимает положительное значение на любом ненулевом векторе с неотрицательными координатами (представления ч. у. множеств введены Л. А. Назаровой и А. В. Ройтером в работе [5]). Заметим, что форма Титса колчана является слабоположительной тогда и только тогда, когда она положительна. Для ч. у. множеств это не так, и поэтому изучение ч. у. множеств с положительной формой Титса выглядит естественным (хотя бы с формальной точки зрения). Такие ч. у. множества изучались в работах [6 – 14]; при этом изучались как сами ч. у. множества с положительной формой Титса, так и их свойства, связанные непосредственно с категориями представлений.

Настоящая статья посвящена изучению ч. у. множеств с неотрицательной формой Титса (изучение таких ч. у. множеств начато авторами в работе [15]).

2. Формулировка основного результата. Пусть S — ч. у. множество, которое всегда предполагается конечным и не содержащим элемент 0. Его квадратичной формой Титса называют квадратичную форму $q_S\colon \mathbb{Z}^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$, которая задается равенством

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Ч. у. множество S назовем критическим относительно положительности (соответственно неотрицательности) квадратичной формы Титса или, сокращенно, P-*критическим* (соответственно NP-*критическим*), если форма Титса любого его собственного подмножества является положительной (соответственно неотрицательной), но форма Титса самого S таковой не является.

Шириной ч. у. множества S называется максимальное число ее попарно несравнимых элементов. Двойственное к S ч. у. множество будем обозначать через S^{op}; другими словами, $S^{\mathrm{op}} = S$, как обычные множества, и при этом $x < y$ в S^{op} тогда и только тогда, когда $x > y$ в S. Ч. у. множества S и T называются *антиизоморфными*, если S изоморфно T^{op}.

В работе [10] приведен список всех P-критических ч. у. множеств. Этот список приведен ниже в табл. 1 (см. последний пункт). Целью данной статьи является описание всех NP-критических множеств.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *NP-критические ч. у. множества исчерпываются, с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма, ч. у. множествами* $1-115$, *указанными в табл.* 2 (*приведенной в последнем пункте*).

Сделаем некоторые замечания к табл. 2.

Указанное в этой таблице ч. у. множество под номером i обозначаем через N_i. Если множество N_i имеет ширину 2 и в таблице написано $i = j'$, то это означает, что N_i можно получить из N_j заменой единственной ее максимальной точки на единственную минимальную точку. То же самое касается и случая $i = j'' = (j')'$ (нужно сравнивать N_i и $N_{j'}$). Если множество N_i имеет ширину 3 и в таблице написано $i = j'$, то это означает, что изложенное выше относится уже не к N_i и N_j, а к их связным компонентам (прямым слагаемым) ширины 2. То же самое касается и случая $i = j''$.

Произвольные ч. у. множества S и T, которые получаются одно из другого с помощью подобных операций, назовем 0-*изоморфными*. И если из табл. 2 выбросить множества с номерами $i = j'$ и $i = j''$, то получим описание NP-критических множеств с точностью до 0-изоморфизма и двойственности.

Это относится и к табл. 1.

3. Min-эквивалентные ч. у. множества. Мы изложим некоторые сведения, связанные с min-эквивалентными ч. у. множествами. Такая эквивалентность введена первым из авторов в работе [7], а детальному ее изучению посвящена работа [10].

Пусть S — ч. у. множество. Для минимального элемента $a \in S$ обозначим через $S_a^{\uparrow}$ ч. у. множество, которое совпадает с S как множество, с тем же отношением порядка на $S \setminus \{a\}$, но в $S_a^{\uparrow}$ элемент a является уже максимальным, причем a сравнимо с x в T тогда и только тогда, когда a несравнимо с x в S. Будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xyz}^{\uparrow\uparrow\uparrow}$ вместо $((S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow})_z^{\uparrow}$ и т. д.

Ч. у. множество T назовем min-*эквивалентным* ч. у. множеству S, если T равно некоторому ч. у. множеству вида

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}, \quad p \geq 0,$$

где x_i — минимальный элемент $S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_{i-1}}$ для любого $i \in \{1,\ldots,p\}$; при $p = 0$ считаем $\overline{S} = S$. При этом не требуется, чтобы элементы $x_1, x_2, \ldots, x_p$ были различны.

Min-эквивалентность ч. у. множеств обозначается символом $\cong_{\min}$.

Отметим, что понятие min-эквивалентности можно естественным образом продолжить до понятия min-изоморфизма, считая, что ч. у. множества S и S' min-*изоморфны*, если существует ч. у. множество T, которое min-эквивалентно S и изоморфно S'.

Пусть S — ч. у. множество. Конечная последовательность $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ элементов $x_i \in S$ называется min-*допустимой*, если выражение $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ имеет смысл (случай $p = 0$ не исключается). В этом случае будем также писать $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$.

Множество всех min-допустимых последовательностей обозначаем $\mathcal{P}(S)$, а множество всех таких последовательностей без повторений — $\mathcal{P}_1(S)$. Подмножество в S, состоящее из всех элементов x_i последовательности $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, будем обозначать через $[\alpha]_S$. Заметим, что для min-эквивалентных ч. у. множеств S и T не всегда существует последовательность $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ такая, что $T = S^{\uparrow}_{\alpha}$ (см. [10], п. 6).

Подмножество X называем *нижним*, если $x \in X$ всякий раз, когда $x < y$ и $y \in X$. Запись $X < Y$ для подмножеств S будет означать, что $x < y$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Заметим, что $Z < \varnothing$ и $\varnothing < Z$ для любого подмножества Z.

Согласно следствиям 5 и 9 из работы [10] имеем соответственно следующие два утверждения:

1) в $\mathcal{P}_1(S)$ существует последовательность α такая, что $[\alpha]_S = X$, тогда и только тогда, когда подмножество X нижнее;

2) если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$ и $[\alpha]_S = [\beta]_S$, то $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\beta}$.

Следовательно, для нижнего подмножества X естественно определить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$, считая, что $S^{\uparrow}_X = S^{\uparrow}_{\alpha}$, где $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ — любая из последовательностей таких, что $[\alpha]_S = X$. Легко показать (предложение 6 [10]), что $a < b$ в $\overline{S} = S^{\uparrow}_X$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

a) $a < b$ в S и либо $a, b \in X$, либо $a, b \notin X$;

b) $a \not\lessgtr b$ в S и $b \in X, a \notin X$.

Отсюда, в частности, следует, что если Z — нижнее подмножество в X, такое, что $Z < S \setminus X$, то Z является нижним подмножеством и в $S^{\uparrow}_X$.

В работе [10] указан (и обоснован) алгоритм для описания всех ч. у. множеств, min-эквивалентных фиксированному ч. у. множеству S. Он состоит из следующих шагов.

I. Описать все нижние подмножества $X \neq S$ в S и для каждого из них построить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$.

II. Описать все пары (Y, X), состоящие из собственного нижнего подмножества Y в S и непустого нижнего подмножества X в Y такого, что $X < S \setminus Y$; для каждой такой пары построить ч. у. множество $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = (S^{\uparrow}_Y)^{\uparrow}_X$.

III. Среди полученных в пп. I и II ч. у. множеств выбрать по одному из каждого класса изоморфных множеств.

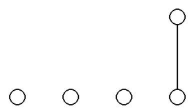
Назовем указанные в п. I подмножества X и X' *сильноизоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi\colon S \to S$ такой, что $\varphi(X) = X'$ (как ч. у. подмножества). Аналогично, две указанные в п. II пары (Y, X) и (Y', X') назовем *сильноизоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi\colon S \to S$ такой, что $\varphi(Y) = Y'$ и $\varphi(X) = X'$. Очевидно, что подмножества в п. I и пары подмножеств в п. II достаточно описывать с точностью до сильного изоморфизма.

4. Доказательство теоремы 1. Сформулируем сначала один из двух основных результатов работы [15], который понадобится в дальнейшем.

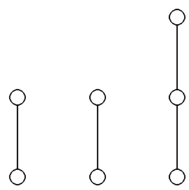
Известно, что в теории представлений ч. у. множеств важную роль играют следующие ч. у. множества, названные в [15] критическими ч. у. множествами Назаровой:

$\mathcal{N}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где все элементы попарно несравнимы:

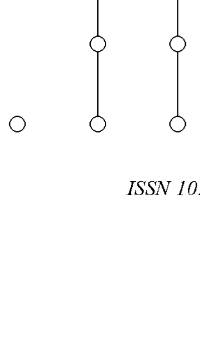
$\mathcal{N}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5 \,|\, 4 \prec 5\}$:



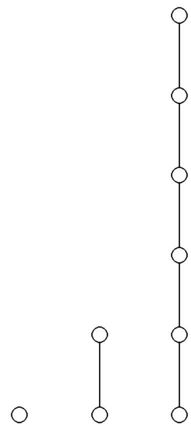
$\mathcal{N}_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$:



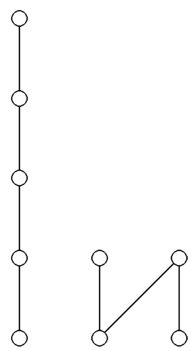
$\mathcal{N}_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$:



$\mathcal{N}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$:



$\mathcal{N}_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7, 8 \prec 9, 6 \prec 9\}$:



Теперь можно сформулировать необходимый результат из работы [15].

Теорема 2. *Ч. у. множество S является NP-критическим тогда и только тогда, когда оно* min*-эквивалентно некоторому критическому ч. у. множеству Назаровой.*

Таким образом, все NP-критические ч. у. множества можно получить следующим образом: взять все критические множества Назаровой и для каждого из них описать все min-эквивалентные ему ч. у. множества (говоря „все”, мы подразумеваем „все с точностью до изоморфизма”). Однако, если исходить только из определения min-эквивалентности, не совсем ясно, как практически осуществлять соответствующий процесс (хотя бы потому, что формально он бесконечен). Однако мы воспользуемся указанным в предыдущем пункте алгоритмом.

Итак, перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.

Шаг I. Опишем (с точностью до сильного изоморфизма) все нижние подмножества в критических множествах Назаровой $\mathcal{N}_1$ – $\mathcal{N}_6$ (см. п. 4):

для $\mathcal{N}_1$ — $A_{1,1} = \varnothing$, $A_{1,2} = \{1\}$, $A_{1,3} = \{1, 2\}$, $A_{1,4} = \{1, 2, 3\}$, $A_{1,5} = \{1, 2, 3, 4\}$;

для $\mathcal{N}_2$ — $A_{2,1} = \varnothing$, $A_{2,2} = \{1\}$, $A_{2,3} = \{4\}$, $A_{2,4} = \{1, 2\}$, $A_{2,5} = \{1, 4\}$, $A_{2,6} = \{4, 5\}$, $A_{2,7} = \{1, 2, 3\}$, $A_{2,8} = \{1, 2, 4\}$, $A_{2,9} = \{1, 4, 5\}$, $A_{2,10} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{2,11} = \{1, 2, 4, 5\}$;

для $\mathcal{N}_3$ — $A_{3,1} = \varnothing$, $A_{3,2} = \{1\}$, $A_{3,3} = \{5\}$, $A_{3,4} = \{1,2\}$, $A_{3,5} = \{1,3\}$, $A_{3,6} = \{1,5\}$, $A_{3,7} = \{5,6\}$, $A_{3,8} = \{1,2,3\}$, $A_{3,9} = \{1,2,5\}$, $A_{3,10} = \{1,3,5\}$, $A_{3,11} = \{1,5,6\}$, $A_{3,12} = \{5,6,7\}$, $A_{3,13} = \{1,2,3,4\}$, $A_{3,14} = \{1,2,3,5\}$, $A_{3,15} = \{1,2,5,6\}$, $A_{3,16} = \{1,3,5,6\}$, $A_{3,17} = \{1,5,6,7\}$, $A_{3,18} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{3,19} = \{1,2,3,5,6\}$, $A_{3,20} = \{1,2,5,6,7\}$, $A_{3,21} = \{1,3,5,6,7\}$, $A_{3,22} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{3,23} = \{1,2,3,5,6,7\}$;

для $\mathcal{N}_4$ — $A_{4,1} = \varnothing$, $A_{4,2} = \{1\}$, $A_{4,3} = \{2\}$, $A_{4,4} = \{5\}$, $A_{4,5} = \{1,2\}$, $A_{4,6} = \{1,5\}$, $A_{4,7} = \{2,3\}$, $A_{4,8} = \{2,5\}$, $A_{4,9} = \{5,6\}$, $A_{4,10} = \{1,2,3\}$, $A_{4,11} = \{1,2,5\}$, $A_{4,12} = \{1,5,6\}$, $A_{4,13} = \{2,3,4\}$, $A_{4,14} = \{2,3,5\}$, $A_{4,15} = \{2,5,6\}$, $A_{4,16} = \{5,6,7\}$, $A_{4,17} = \{1,2,3,4\}$, $A_{4,18} = \{1,2,3,5\}$, $A_{4,19} = \{1,2,5,6\}$, $A_{4,20} = \{1,5,6,7\}$, $A_{4,21} = \{2,3,4,5\}$, $A_{4,22} = \{2,3,5,6\}$, $A_{4,23} = \{2,5,6,7\}$, $A_{4,24} = \{5,6,7,8\}$, $A_{4,25} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{4,26} = \{1,2,3,5,6\}$, $A_{4,27} = \{1,2,5,6,7\}$, $A_{4,28} = \{1,5,6,7,8\}$, $A_{4,29} = \{2,3,4,5,6\}$, $A_{4,30} = \{2,3,5,6,7\}$, $A_{4,31} = \{2,5,6,7,8\}$, $A_{4,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{4,33} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A_{4,34} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $A_{4,35} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{4,36} = \{2,3,5,6,7,8\}$, $A_{4,37} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A_{4,38} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$, $A_{4,39} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$;

для $\mathcal{N}_5$ — $A_{5,1} = \varnothing$, $A_{5,2} = \{1\}$, $A_{5,3} = \{2\}$, $A_{5,4} = \{4\}$, $A_{5,5} = \{1,2\}$, $A_{5,6} = \{1,4\}$, $A_{5,7} = \{2,3\}$, $A_{5,8} = \{2,4\}$, $A_{5,9} = \{4,5\}$, $A_{5,10} = \{1,2,3\}$, $A_{5,11} = \{1,2,4\}$, $A_{5,12} = \{1,4,5\}$, $A_{5,13} = \{2,3,4\}$, $A_{5,14} = \{2,4,5\}$, $A_{5,15} = \{4,5,6\}$, $A_{5,16} = \{1,2,3,4\}$, $A_{5,17} = \{1,2,4,5\}$, $A_{5,18} = \{1,4,5,6\}$, $A_{5,19} = \{2,3,4,5\}$, $A_{5,20} = \{2,4,5,6\}$, $A_{5,21} = \{4,5,6,7\}$, $A_{5,22} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{5,23} = \{1,2,4,5,6\}$, $A_{5,24} = \{1,4,5,6,7\}$, $A_{5,25} = \{2,3,4,5,6\}$, $A_{5,26} = \{2,4,5,6,7\}$, $A_{5,27} = \{4,5,6,7,8\}$, $A_{5,28} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{5,29} = \{1,2,4,5,6,7\}$, $A_{5,30} = \{1,4,5,6,7,8\}$, $A_{5,31} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{5,32} = \{2,4,5,6,7,8\}$, $A_{5,33} = \{4,5,6,7,8,9\}$, $A_{5,34} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A_{5,35} = \{1,2,4,5,6,7,8\}$, $A_{5,36} = \{1,4,5,6,7,8,9\}$, $A_{5,37} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_{5,38} = \{2,4,5,6,7,8,9\}$, $A_{5,39} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_{5,40} = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$, $A_{5,41} = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

для $\mathcal{N}_6$ — $A_{6,1} = \varnothing$, $A_{6,2} = \{1\}$, $A_{6,3} = \{6\}$, $A_{6,4} = \{8\}$, $A_{6,5} = \{1,2\}$, $A_{6,6} = \{1,6\}$, $A_{6,7} = \{1,8\}$, $A_{6,8} = \{6,7\}$, $A_{6,9} = \{6,8\}$, $A_{6,10} = \{1,2,3\}$, $A_{6,11} = \{1,2,6\}$, $A_{6,12} = \{1,2,8\}$, $A_{6,13} = \{1,6,7\}$, $A_{6,14} = \{1,6,8\}$, $A_{6,15} = \{6,7,8\}$, $A_{6,16} = \{6,8,9\}$, $A_{6,17} = \{1,2,3,4\}$, $A_{6,18} = \{1,2,3,6\}$, $A_{6,19} = \{1,2,3,8\}$, $A_{6,20} = \{1,2,6,7\}$, $A_{6,21} = \{1,2,6,8\}$, $A_{6,22} = \{1,6,7,8\}$, $A_{6,23} = \{1,6,8,9\}$, $A_{6,24} = \{6,7,8,9\}$, $A_{6,25} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{6,26} = \{1,2,3,4,6\}$, $A_{6,27} = \{1,2,3,4,8\}$, $A_{6,28} = \{1,2,3,6,7\}$, $A_{6,29} = \{1,2,3,6,8\}$, $A_{6,30} = \{1,2,6,7,8\}$, $A_{6,31} = \{1,2,6,8,9\}$, $A_{6,32} = \{1,6,7,8,9\}$, $A_{6,33} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{6,34} = \{1,2,3,4,5,8\}$, $A_{6,35} = \{1,2,3,4,6,7\}$, $A_{6,36} = \{1,2,3,4,6,8\}$, $A_{6,37} = \{1,2,3,6,7,8\}$, $A_{6,38} = \{1,2,3,6,8,9\}$, $A_{6,39} = \{1,2,6,7,8,9\}$, $A_{6,40} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A_{6,41} = \{1,2,3,4,5,6,8\}$, $A_{6,42} = \{1,2,3,4,6,7,8\}$, $A_{6,43} = \{1,2,3,4,6,8,9\}$, $A_{6,44} = \{1,2,3,6,7,8,9\}$, $A_{6,45} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_{6,46} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\}$, $A_{6,47} = \{1,2,3,4,6,7,8,9\}$.

Обозначим через $N_{i,j}$ ч. у. множество $S_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{N}_i$ и $X = A_{i,j}$. Тогда легко убедиться в том, что $\mathcal{N}_{1,1} \cong N_{115}$, $\mathcal{N}_{1,2} \cong N_{114}$, $\mathcal{N}_{1,3} \cong N_{45}$, $\mathcal{N}_{1,4} \cong N_{45}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{1,5} \cong N_{114}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{2,1} \cong N_{112}$, $\mathcal{N}_{2,2} \cong N_{43}$, $\mathcal{N}_{2,3} \cong N_{113}$, $\mathcal{N}_{2,4} \cong N_{1}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{2,5} \cong N_{44}$, $\mathcal{N}_{2,6} \cong N_{41}$, $\mathcal{N}_{2,7} \cong N_{41}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{2,8} \cong N_{44}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{2,9} \cong N_{1}$, $\mathcal{N}_{2,10} \cong N_{113}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{2,11} \cong N_{43}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,1} \cong N_{46}$, $\mathcal{N}_{3,2} \cong N_{49}$, $\mathcal{N}_{3,3} \cong N_{50}$, $\mathcal{N}_{3,4} \cong N_{4}$, $\mathcal{N}_{3,5} \cong N_{53}$, $\mathcal{N}_{3,6} \cong N_{52}$, $\mathcal{N}_{3,7} \cong N_{47}$, $\mathcal{N}_{3,8} \cong N_{6}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,9} \cong N_{7}$, $\mathcal{N}_{3,10} \cong N_{54}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,11} \cong N_{51}$, $\mathcal{N}_{3,12} \cong N_{2}$,

$\mathcal{N}_{3,13} \cong N_{2}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,14} \cong N_{51}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,15} \cong N_{7}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,16} \cong N_{54}$, $\mathcal{N}_{3,17} \cong N_{6}$, $\mathcal{N}_{3,18} \cong N_{47}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,19} \cong N_{52}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,20} \cong N_{4}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,21} \cong N_{53}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,22} \cong N_{50}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{3,23} \cong N_{49}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,1} \cong N_{55}$, $\mathcal{N}_{4,2} \cong N_{17}$, $\mathcal{N}_{4,3} \cong N_{62}$, $\mathcal{N}_{4,4} \cong N_{63}$, $\mathcal{N}_{4,5} \cong N_{15}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,6} \cong N_{18}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,7} \cong N_{58}$, $\mathcal{N}_{4,8} \cong N_{69}$, $\mathcal{N}_{4,9} \cong N_{60}$, $\mathcal{N}_{4,10} \cong N_{13}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,11} \cong N_{66}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,12} \cong N_{16}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,13} \cong N_{11}$, $\mathcal{N}_{4,14} \cong N_{65}$, $\mathcal{N}_{4,15} \cong N_{68}$, $\mathcal{N}_{4,16} \cong N_{56}$, $\mathcal{N}_{4,17} \cong N_{8}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,18} \cong N_{64}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,19} \cong N_{67}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,20} \cong N_{14}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,21} \cong N_{14}$, $\mathcal{N}_{4,22} \cong N_{67}$, $\mathcal{N}_{4,23} \cong N_{64}$, $\mathcal{N}_{4,24} \cong N_{8}$, $\mathcal{N}_{4,25} \cong N_{56}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,26} \cong N_{68}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,27} \cong N_{65}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,28} \cong N_{11}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,29} \cong N_{16}$, $\mathcal{N}_{4,30} \cong N_{66}$, $\mathcal{N}_{4,31} \cong N_{13}$, $\mathcal{N}_{4,32} \cong N_{60}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,33} \cong N_{69}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,34} \cong N_{58}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,35} \cong N_{18}$, $\mathcal{N}_{4,36} \cong N_{15}$, $\mathcal{N}_{4,37} \cong N_{63}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,38} \cong N_{62}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{4,39} \cong N_{17}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,1} \cong N_{70}$, $\mathcal{N}_{5,2} \cong N_{27}$, $\mathcal{N}_{5,3} \cong N_{74}$, $\mathcal{N}_{5,4} \cong N_{84}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,5} \cong N_{25}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,6} \cong N_{29}$, $\mathcal{N}_{5,7} \cong N_{23}$, $\mathcal{N}_{5,8} \cong N_{95}$, $\mathcal{N}_{5,9} \cong N_{82}$, $\mathcal{N}_{5,10} \cong N_{19}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,11} \cong N_{94}$, $\mathcal{N}_{5,12} \cong N_{31}$, $\mathcal{N}_{5,13} \cong N_{26}$, $\mathcal{N}_{5,14} \cong N_{96}$, $\mathcal{N}_{5,15} \cong N_{80}$, $\mathcal{N}_{5,16} \cong N_{71}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,17} \cong N_{101}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,18} \cong N_{30}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,19} \cong N_{23}$, $\mathcal{N}_{5,20} \cong N_{99}$, $\mathcal{N}_{5,21} \cong N_{77}$, $\mathcal{N}_{5,22} \cong N_{77}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,23} \cong N_{99}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,24} \cong N_{28}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,25} \cong N_{30}$, $\mathcal{N}_{5,26} \cong N_{101}$, $\mathcal{N}_{5,27} \cong N_{71}$, $\mathcal{N}_{5,28} \cong N_{80}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,29} \cong N_{96}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,30} \cong N_{26}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,31} \cong N_{31}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,32} \cong N_{94}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,33} \cong N_{19}$, $\mathcal{N}_{5,34} \cong N_{82}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,35} \cong N_{95}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,36} \cong N_{23}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,37} \cong N_{29}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,38} \cong N_{25}$, $\mathcal{N}_{5,39} \cong N_{84}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,40} \cong N_{74}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{5,41} \cong N_{27}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,1} \cong N_{85}$, $\mathcal{N}_{6,2} \cong N_{93}$, $\mathcal{N}_{6,3} \cong N_{76}$, $\mathcal{N}_{6,4} \cong N_{97}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,5} \cong N_{91}$, $\mathcal{N}_{6,6} \cong N_{98}$, $\mathcal{N}_{6,7} \cong N_{111}$, $\mathcal{N}_{6,8} \cong N_{37}$, $\mathcal{N}_{6,9} \cong N_{75}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,10} \cong N_{89}$, $\mathcal{N}_{6,11} \cong N_{100}$, $\mathcal{N}_{6,12} \cong N_{110}$, $\mathcal{N}_{6,13} \cong N_{39}$, $\mathcal{N}_{6,14} \cong N_{106}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,15} \cong N_{104}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,16} \cong N_{36}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,17} \cong N_{86}$, $\mathcal{N}_{6,18} \cong N_{102}$, $\mathcal{N}_{6,19} \cong N_{109}$, $\mathcal{N}_{6,20} \cong N_{40}$, $\mathcal{N}_{6,21} \cong N_{107}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,22} \cong N_{103}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,23} \cong N_{108}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,24} \cong N_{32}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,25} \cong N_{32}$, $\mathcal{N}_{6,26} \cong N_{103}$, $\mathcal{N}_{6,27} \cong N_{108}$, $\mathcal{N}_{6,28} \cong N_{40}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,29} \cong N_{107}$, $\mathcal{N}_{6,30} \cong N_{102}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,31} \cong N_{109}$, $\mathcal{N}_{6,32} \cong N_{86}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,33} \cong N_{104}$, $\mathcal{N}_{6,34} \cong N_{36}$, $\mathcal{N}_{6,35} \cong N_{39}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,36} \cong N_{106}$, $\mathcal{N}_{6,37} \cong N_{100}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,38} \cong N_{110}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,39} \cong N_{89}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,40} \cong N_{37}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,41} \cong N_{75}$, $\mathcal{N}_{6,42} \cong N_{98}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,43} \cong N_{111}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,44} \cong N_{91}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,45} \cong N_{76}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{N}_{6,46} \cong N_{97}$, $\mathcal{N}_{6,47} \cong N_{93}^{\mathrm{op}}$.

Шаг II. Опишем (с точностью до сильного изоморфизма) все пары (Y, X) нижних собственных подмножеств в критических множествах Назаровой $\mathcal{N}_2$ – $\mathcal{N}_6$ такие, что $X \subseteq Y$ и $X < S \setminus Y$ (для $\mathcal{N}_1$ таких пар нет):

для $\mathcal{N}_2$ – $B_{2,1} = (A_{2,10}, \{4\})$;

для $\mathcal{N}_3$ – $B_{3,1} = (A_{3,18}, \{5\})$, $B_{3,2} = (A_{3,22}, \{5\})$, $B_{3,3} = (A_{3,22}, \{5, 6\})$, $B_{3,4} = (A_{3,23}, \{3\})$;

для $\mathcal{N}_4$ – $B_{4,1} = (A_{4,25}, \{5\})$, $B_{4,2} = (A_{4,32}, \{5\})$, $B_{4,3} = (A_{4,32}, \{5, 6\})$, $B_{4,4} = (A_{4,34}, \{2\})$, $B_{4,5} = (A_{4,37}, \{5\})$, $B_{4,6} = (A_{4,37}, \{5, 6\})$, $B_{4,7} = (A_{4,37}, \{5, 6, 7\})$, $B_{4,8} = (A_{4,38}, \{2\})$, $B_{4,9} = (A_{4,38}, \{2, 3\})$;

для $\mathcal{N}_5$ – $B_{5,1} = (A_{5,16}, \{4\})$, $B_{5,2} = (A_{5,22}, \{4\})$, $B_{5,3} = (A_{5,22}, \{4, 5\})$, $B_{5,4} = (A_{5,28}, \{4\})$, $B_{5,5} = (A_{5,28}, \{4, 5\})$, $B_{5,6} = (A_{5,28}, \{4, 5, 6\})$, $B_{5,7} = (A_{5,34}, \{4\})$, $B_{5,8} = (A_{5,34}, \{4, 5\})$, $B_{5,9} = (A_{5,34}, \{4, 5, 6\})$, $B_{5,10} = (A_{5,34}, \{4, 5, 6, 7\})$, $B_{5,11} = (A_{5,39}, \{4\})$, $B_{5,12} = (A_{5,39}, \{4, 5\})$, $B_{5,13} = (A_{5,39}, \{4, 5, 6\})$, $B_{5,14} = (A_{5,39}, \{4, 5, 6, 7\})$, $B_{5,14} = (A_{5,39}, \{4, 5, 6, 7, 8\})$, $B_{5,16} = (A_{5,40}, \{2\})$;

для $\mathcal{N}_6$ – $B_{6,1} = (A_{6,32}, \{1\})$, $B_{6,2} = (A_{6,39}, \{1\})$, $B_{6,3} = (A_{6,39}, \{1, 2\})$, $B_{6,4} = (A_{6,41}, \{6\})$, $B_{6,5} = (A_{6,44}, \{1\})$, $B_{6,6} = (A_{6,44}, \{1, 2\})$, $B_{6,7} = (A_{6,44}, \{1, 2, 3\})$, $B_{6,8} = (A_{6,45}, \{6\})$, $B_{6,9} = (A_{6,45}, \{8\})$, $B_{6,10} = (A_{6,45}, \{6, 8\})$, $B_{6,11} = (A_{6,46}, \{6\})$, $B_{6,12} = (A_{6,47}, \{1\})$, $B_{6,13} = (A_{6,47}, \{1, 2\})$, $B_{6,14} = (A_{6,47}, \{1, 2, 3\})$, $B_{6,15} = (A_{6,47}, \{1, 2, 3, 4\})$.

Обозначим через $N'_{i,j}$ ч. у. множество $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{N}_i$ и $(Y, X) = B_{i,j}$. Тогда легко убедиться в том, что $N'_{2,1} \cong N_{42}$, $N'_{3,1} \cong N_{3}^{\mathrm{op}}$, $N'_{3,2} \cong N_{48}$, $N'_{3,3} \cong N_{3}$, $N'_{3,4} \cong N_{5}$, $N'_{4,1} \cong N_{9}^{\mathrm{op}}$, $N'_{4,2} \cong N_{57}^{\mathrm{op}}$, $N'_{4,3} \cong N_{10}$, $N'_{4,4} \cong N_{12}^{\mathrm{op}}$, $N'_{4,5} \cong N_{61}$, $N'_{4,6} \cong$

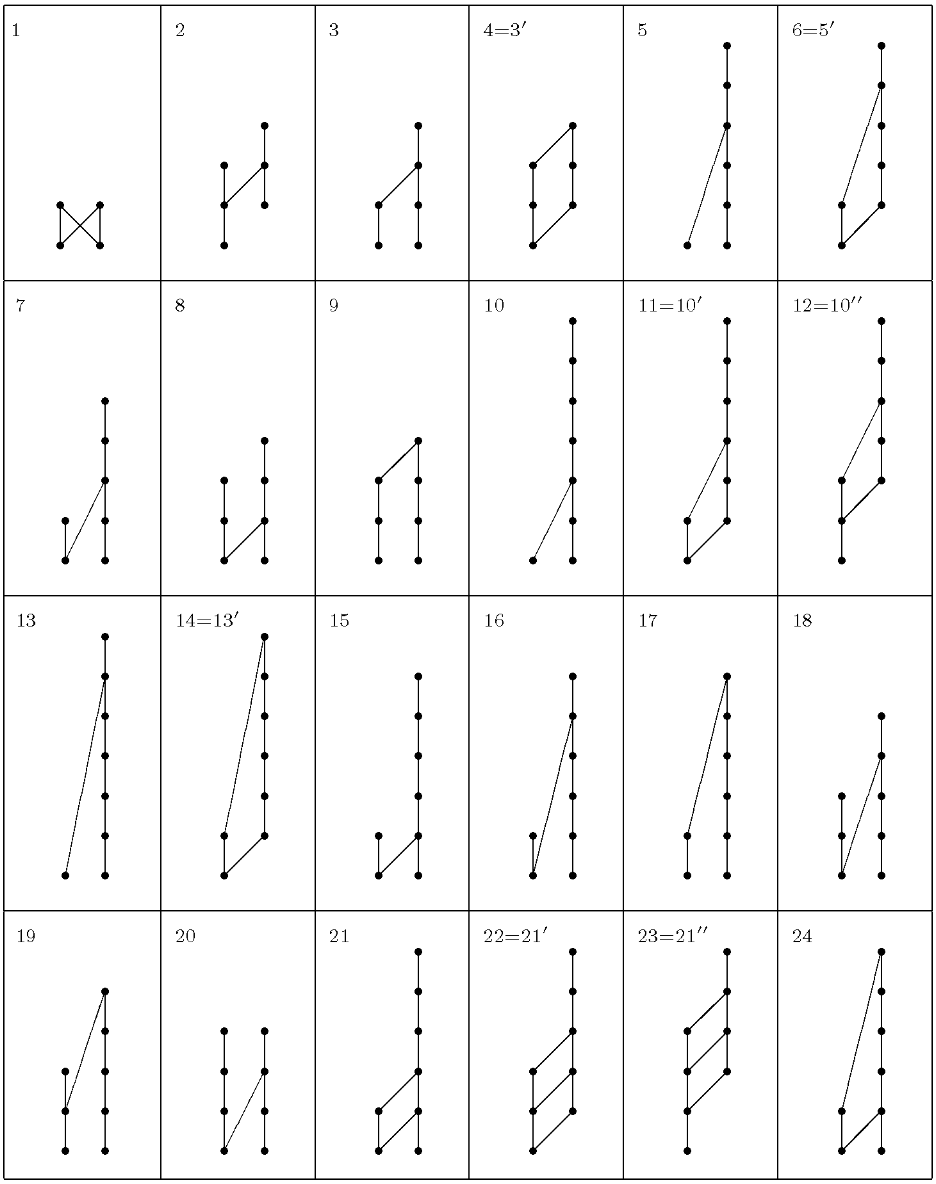
$\cong N_{57}$, $N'_{4,7} \cong N_9$, $N'_{4,8} \cong N_{59}$, $N'_{4,9} \cong N_{12}$, $N'_{5,1} \cong N_{20}^{\mathrm{op}}$, $N'_{5,2} \cong N_{72}^{\mathrm{op}}$, $N'_{5,3} \cong N_{21}^{\mathrm{op}}$, $N'_{5,4} \cong N_{78}^{\mathrm{op}}$, $N'_{5,5} \cong N_{73}^{\mathrm{op}}$, $N'_{5,6} \cong N_{22}$, $N'_{5,7} \cong N_{81}^{\mathrm{op}}$, $N'_{5,8} \cong N_{79}$, $N'_{5,9} \cong N_{73}$, $N'_{5,10} \cong N_{21}$, $N'_{5,11} \cong N_{83}$, $N'_{5,12} \cong N_{81}$, $N'_{5,13} \cong N_{78}$, $N'_{5,14} \cong N_{72}$, $N'_{5,15} \cong N_{20}$, $N'_{5,16} \cong N_{24}$, $N'_{6,1} \cong N_{33}^{\mathrm{op}}$, $N'_{6,2} \cong N_{87}^{\mathrm{op}}$, $N'_{6,3} \cong N_{34}^{\mathrm{op}}$, $N'_{6,4} \cong N_{35}$, $N'_{6,5} \cong N_{90}^{\mathrm{op}}$, $N'_{6,6} \cong N_{88}$, $N'_{6,7} \cong N_{34}$, $N'_{6,8} \cong N_{105}$, $N'_{6,9} \cong N_{38}^{\mathrm{op}}$, $N'_{6,10} \cong N_{35}^{\mathrm{op}}$, $N'_{6,11} \cong N_{38}$, $N'_{6,12} \cong N_{92}$, $N'_{6,13} \cong N_{90}$, $N'_{6,14} \cong N_{87}$, $N'_{6,15} \cong N_{33}$.

Шаг III. Легко убедиться в том, что в пп. I и II каждое из ч. у. множеств N_i и N_i^{op}, где $i = 1, 2, \ldots, 115$, встречается по одному разу (при этом если $N_i^{\mathrm{op}} \cong N_i$, то N_i встречается, а N_i^{op} — нет).

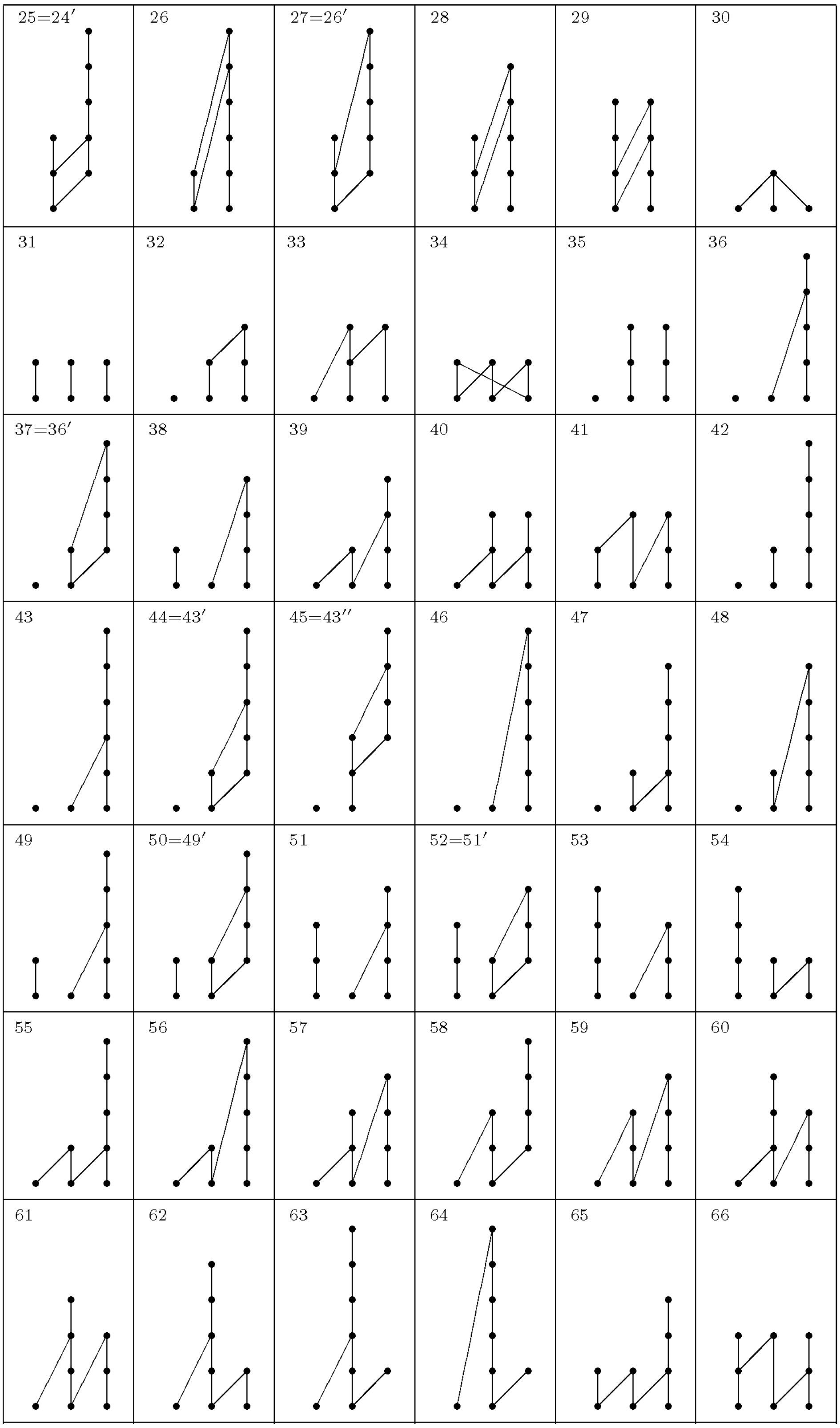
Таким образом, теорема 1 доказана.

4. Таблицы.

Таблица 1. P-критические ч. у. множества



Продолжение табл. 1



Окончание табл. 1

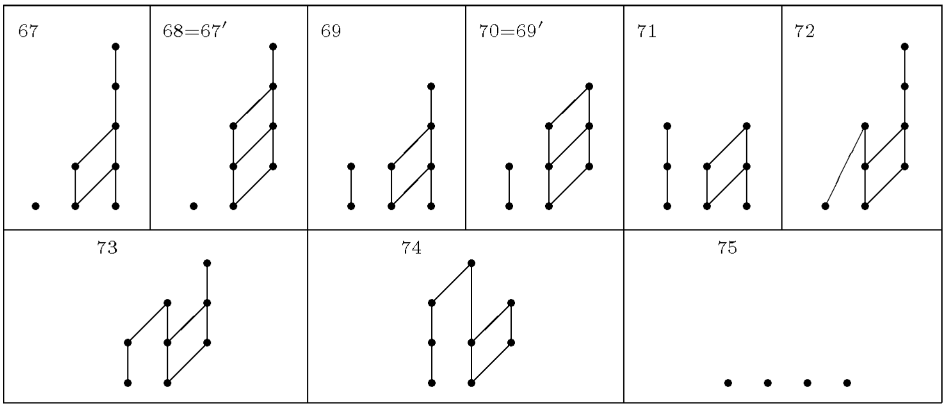
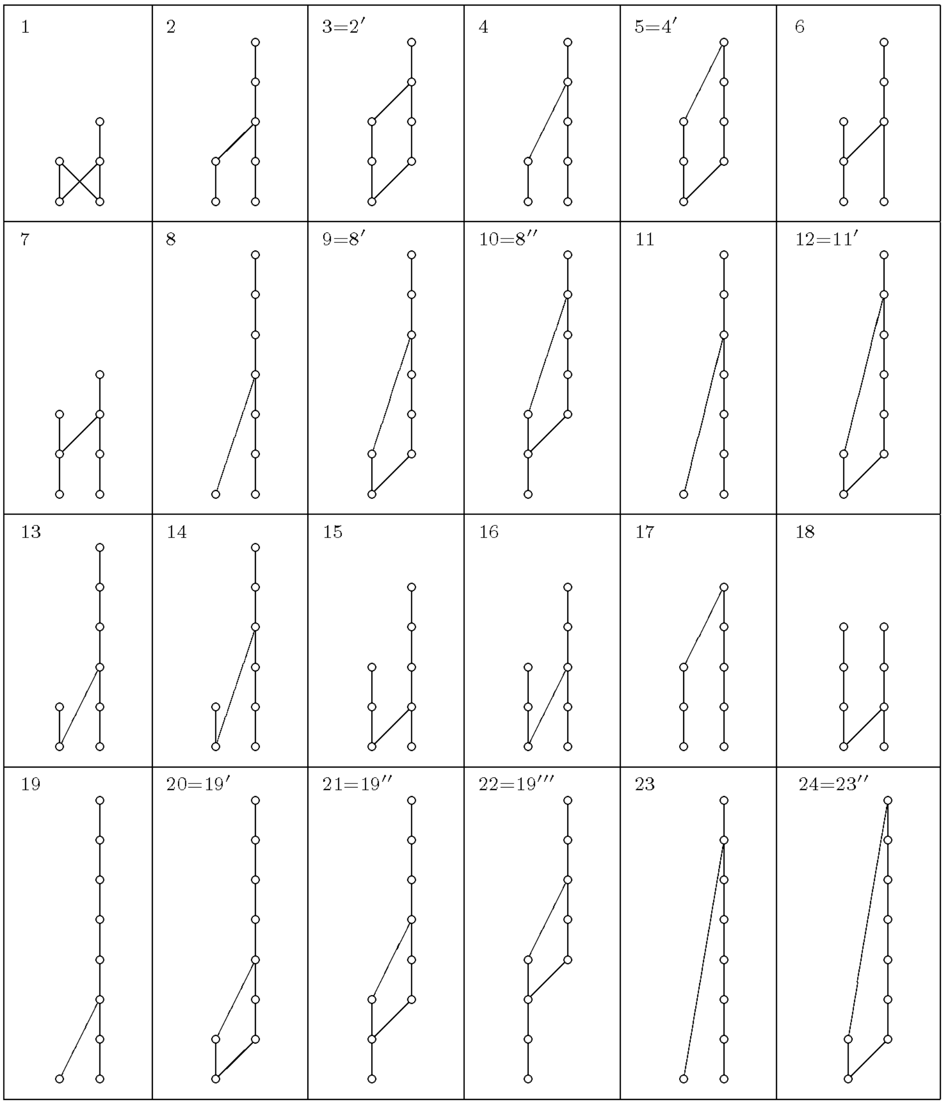
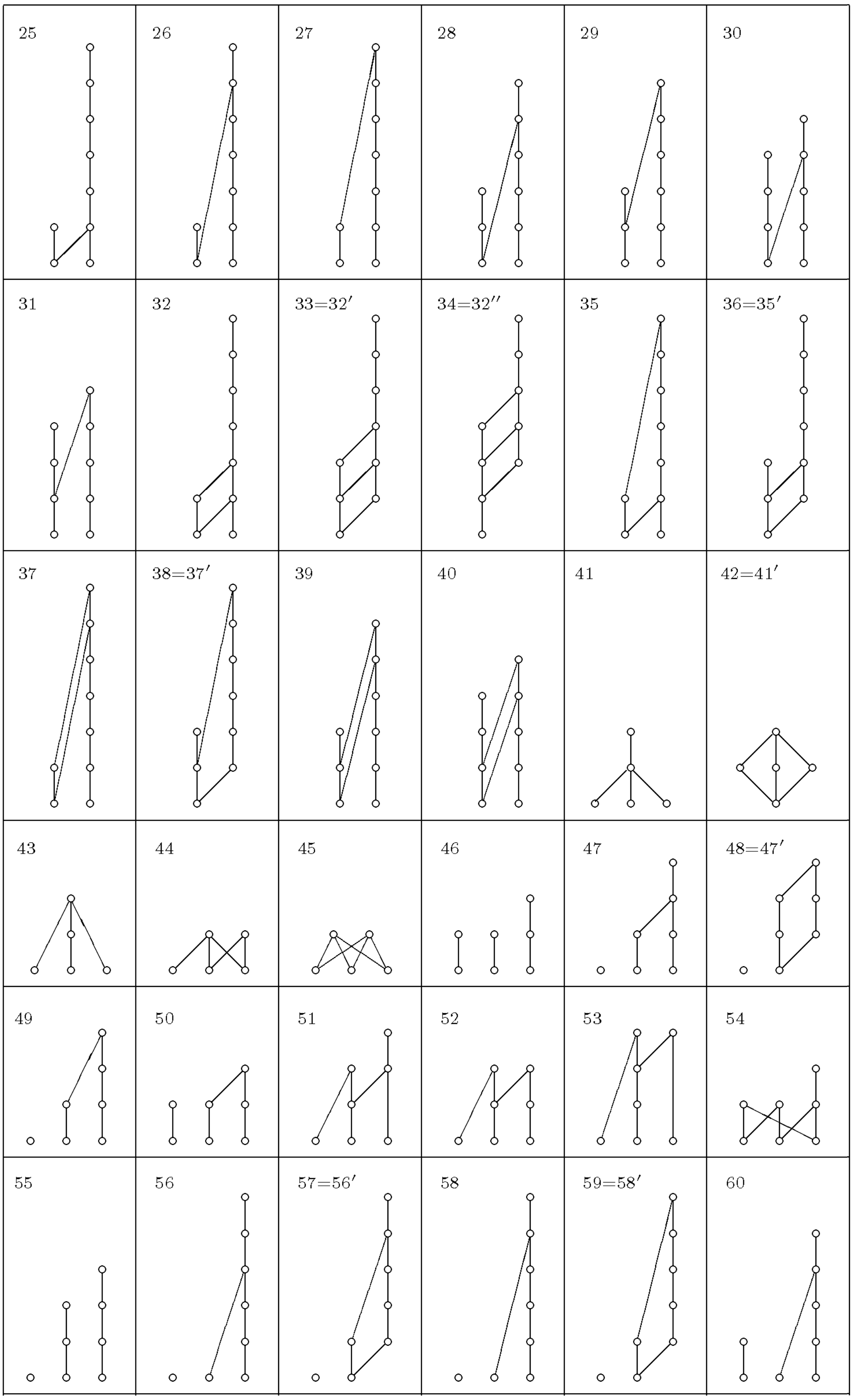


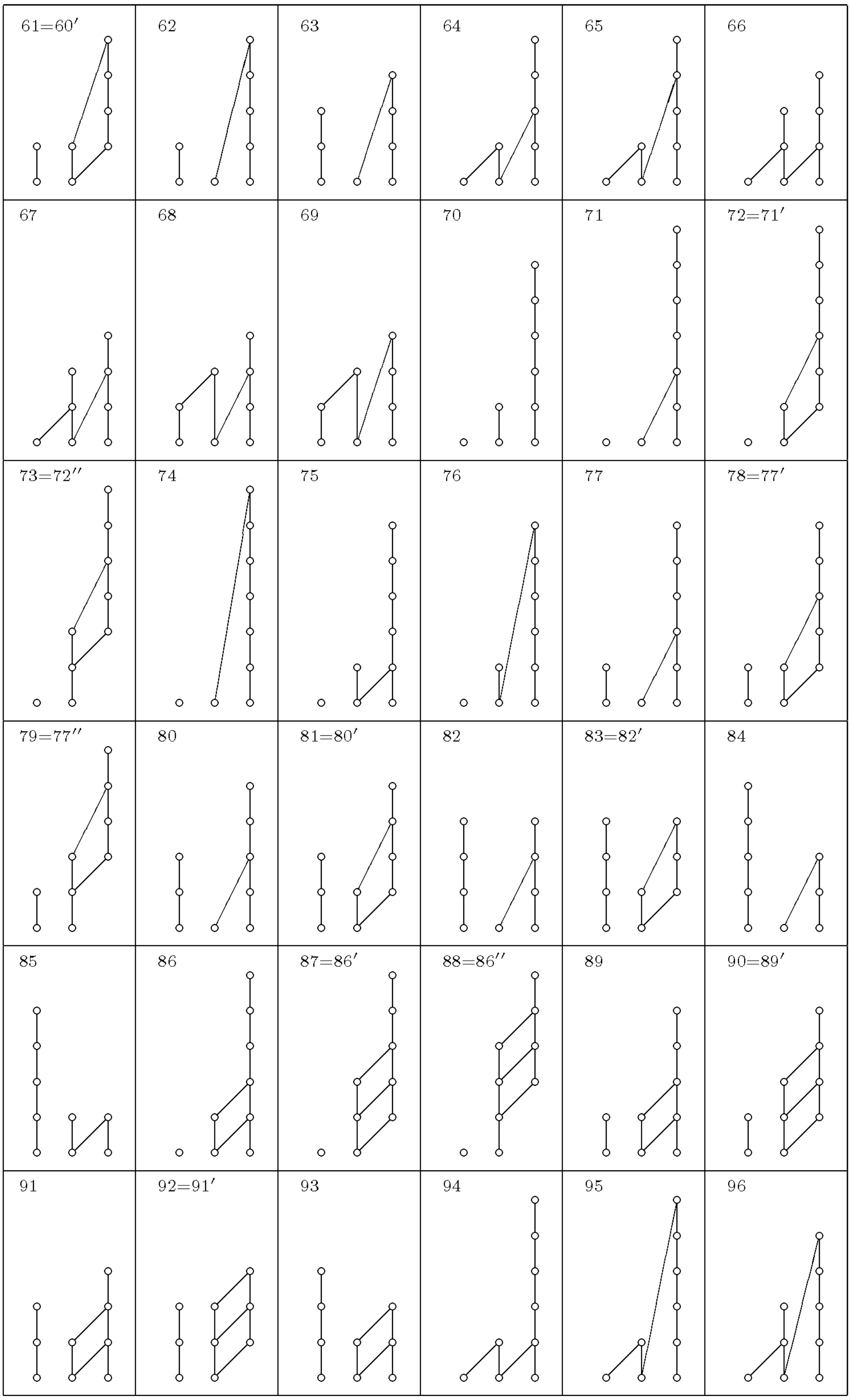
Таблица 2. NP-критические ч. у. множества



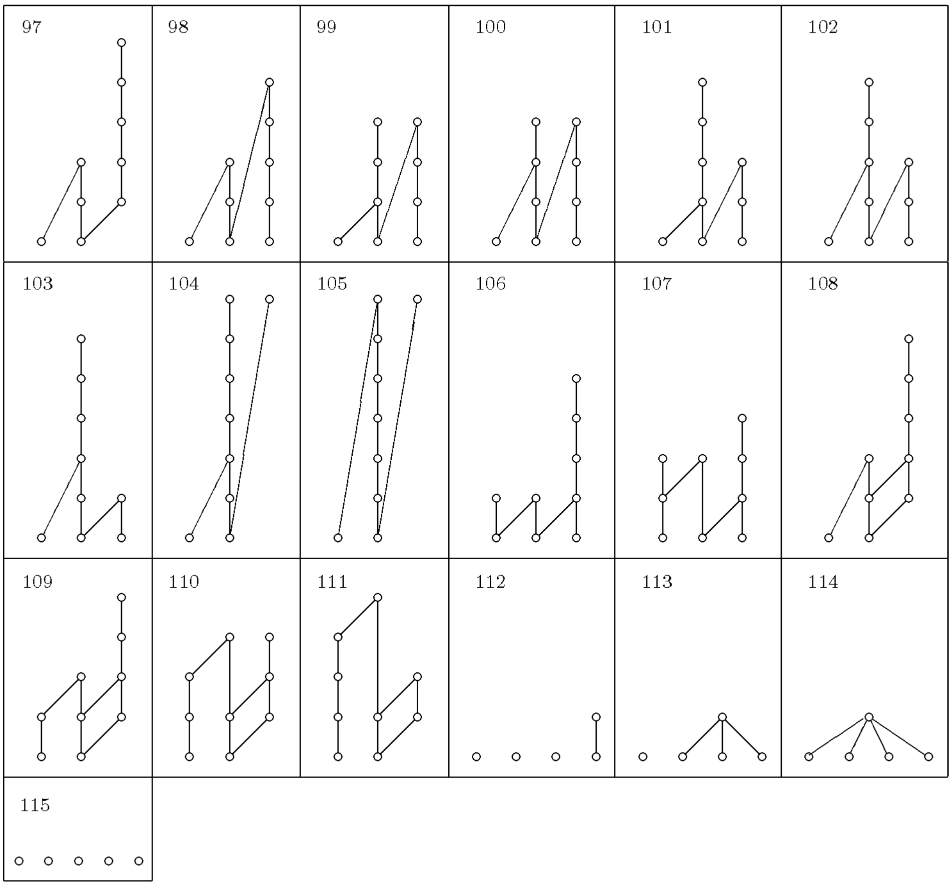
Продолжение табл. 2



Продолжение табл. 2



Окончание табл. 2



1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscr. Math. – 1972. – **6**. – S. 71 – 103, 309.
2. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. Int. Conf. Represent. Algebras. – Ottawa, Ontario: Carleton Univ., 1974. – Paper № 5.
3. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34 – 42.
4. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 5 – 70.
5. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5 – 31.
6. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. – 2003. — **6**, № 1. – С. 3 – 14.
7. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фізика і математика. – 2005. – Вип. 1. – С. 24 – 25.
8. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On posets of width two with positive Tits form // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 2. – P. 11 – 22.
9. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно-конечного типа // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2005. – Вип. 9. – С. 15 – 25.
10. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – С. 18 – 58.
11. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On finite posets of inj-finite type and their Tits forms // Algebra and Discrete Math. – 2006. – № 2. – P. 17 – 21.

12. *Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно визначеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 3. – С. 320 – 325.
13. *Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В.* Про вигляд ч. в. множин з додатно визначеною формою Тітса // Вісн. Київ. ун-ту. – 2006. – Вип. 3. – С. 11 – 14.
14. *Бондаренко В. М., Стьопочкина М. В.* О связи между inj-конечностью типа и положительностью квадратичной формы Титса для конечных частично упорядоченных множеств // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2006. – Вип. 12. – С. 20 – 27.
15. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 9. – С. 1157 – 1167.

Получено 23.12.08