УДК 512.64+512.56

В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина
(Ин-т математики НАН Украины)

О ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ ВЕРХНЕЙ ШИРИНЫ 3

The upper width of a finite poset S is the greatest number which is the width of a poset (min, max)-equivalent to S. In the paper we study the structure of posets of upper width 3.

Верхня ширина скінченної частково впорядкованої множини S — це найбільше число, яке є шириною частково впорядкованої множини, яка (min, max)-еквівалентна S. У статті вивчається будова частково впорядкованих множин верхньої ширини 3.

1. Введение. Пусть S — конечное частично упорядоченное множество (сокращенно ч. у. множество). Запись $x \asymp y$ для элементов $x, y \in S$ будет означать, что x и y не сравнимы. Множество элементов $x \in S$, несравнимых (соотв. сравнимых) с фиксированным элементом $a \in S$, будем обозначать $S^{\asymp}(a)$ (соотв. $S(a)$). Для подмножеств Y и Z множества S будем писать $Y < Z$, если $y < z$ для любых $y \in Y, z \in Z$ (это заведомо выполняется, когда Y или Z является пустым). Одноэлементные подмножества S отождествляются с самими элементами.

Напомним введенное в [1] понятие (min, max)-эквивалентности ч. у. множеств. Определим для минимального (соотв. максимального) элемента $a \in S$ ч. у. множество $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$) следущим образом: это непересекающееся объединение подмножеств $\{a\}$ и $S \setminus a$ с наименьшим частичным порядком, который содержит заданный на $S \setminus a$ порядок, и при этом $a > S^{\asymp}(a)$ (соотв. $a < S^{\asymp}(a)$). Другими словами, $S_a^{\uparrow}$ (соответственно $S_a^{\downarrow}$) и S равны как обычные множества, а отношение частичного порядка задается следующими условиями:

a) a — максимальная (соотв. минимальная) точка $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$);

b) если $x, y \neq a$, то $x < y$ в $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$) тогда и только тогда, когда $x < y$ в S;

c) $a > x$ в $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $a < x$ $S_a^{\downarrow}$) тогда и только тогда, когда $a \asymp x$ в S.

В дальнейшем будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\downarrow}$ и т. д.

Пусть S и T — ч. у. множества, равные как обычные множества. Ч. у. множество T назовем (min, max)-*эквивалентным* ч. у. множеству S, если $T = S_{x_1x_2\ldots x_p}^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p}$ $(p \geq 0)$, где $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ и, для $i \in \{1, \ldots, p\}$, x_i — минимальная (соотв. максимальная) точка $\overline{S}_{i-1} = S_{x_1x_2\ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{i-1}}$, если $\varepsilon_i =\uparrow$ (соотв. $\varepsilon_i =\downarrow$); при $p = 0$ считаем, что $T = S$. Заметим, что среди $x_1, x_2, \ldots, x_p$ могут встречаться равные элементы.

В случае, когда ч. у. множества S и T (min, max)-эквивалентны, мы будем писать $S \cong_{(\min,\max)} T$. Если ч. у. множество T равно некоторому ч. у. множеству вида $T = S_{x_1x_2\ldots x_p}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}$ (соответственно $T = S_{x_1x_2\ldots x_p}^{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}$), то будем говорить, что T является min-эквивалентным (соответственно max-эквивалентным) ч. у. множеству S и писать $T \cong_{\min} S$ (соответственно $T \cong_{\max} S$).

В [2] доказано, что все три введенные отношения являются отношениями эквивалентности, причем все они равносильные (см. следствие 2 и предложение 11).

(Min, max)-эквивалентные ч. у. множества изучались во многих работах, но все они связаны с изучением ч. у. множеств с положительно определенной формы Титса или минимальных ч. у. множеств с неположительно определенной формой Титса (см., например, [1]- [4]). В этой статье (min, max)-эквивалентность изучается вне зависимости от формы Титса.

2. Определения различных типов сумм ч. у. множеств. На протяжении всей статьи S обозначает конечное частично упорядоченное множество (порядка $|S| > 0$). Если S является объединением своих попарно непересекающихся подмножеств $S_1, S_2, .., S_m$, то будем говорить, что S является *суммой* $S_1, S_2, .., S_m$; в этом случае пишут $S = S_1 + S_2 + \dots + S_m$. Если подмножества $S_1, S_2, .., S_m$ выбрать произвольным образом, то, как правило, элементы различных слагаемых будут сравнимыми между собой. Если же произвольные два элемента, принадлежащие различным слагаемым S_i, несравнимы, то S называется *прямой суммой* заданных подмножеств $S_1, S_2, .., S_m$. В этом случае будем писать $S = S_1 \coprod S_2 \coprod \dots \coprod S_m$.

Понятие прямой суммы ч. у. множеств можно ввести, очевидно, и внешним образом — это объединение без попарных пересечений (с частичным порядком, который индуцируется заданными порядками). Что касается суммы в общем случае, то для ее задания нужно еще дополнительно зафиксировать подмножество P_0 в множестве всех пар (x, y), где x и y — элементы из различных множеств; и тогда суммой заданных множеств будет их объединение без пересечений с частичным порядком, являюшимся наименьшим среди всех, которые продолжают заданные порядки и таких, что $x < y$ всякий раз, когда $(x, y) \in P_0$. Понятно, что с формальной точки зрения более удобно пользоваться внутренним определением суммы, когда рассматриваются подмножества частично упорядоченных множеств, и в дальнейшем мы будем пользоваться именно внутренним определением.

Введем еще одно понятие, принадлежащее первому из авторов. Сумма $S = S_1 + S_2 + \dots + S_m (m > 0)$ называется *односторонней*, если, с точностью до перестановки слагаемых, из $x < y$ и $x \in S_i, y \in S_j$, где $i \neq j$, следует, что $i < j$. Обозначим через $R_0(S)$ множество все пар $(x, y) \in S \times S$ соседних элементов x и y (т. е. сравнимых элементов x и y, таких, что не существует элемента z, удовлетворяющего неравенству $x < z < y$, если $x < y$, и неравенству $x > z > y$, если $x > y$). Если $S = S_1 + S_2 + \dots + S_m$, то число

$$r_0(S) = \frac{1}{2}(|R_0(S)| - \sum_{i=1}^{m} |R_0(S_i)|)$$

называется *рангом* заданной суммы. Очевидно, что суммы ранга 0 — это прямые суммы и только они.

3. Формулировка основного результата. Пусть S — конечное ч. у. множество. Напомним, что его шириной называют наибольшее число попарно несравнимых элементов $x_i \in S$; будем обозначать ее через $w(S)$.

Теперь введем два новых понятия. *Верхней шириной ч. у. множества* S назовем число $w_+(S) = \max_{T \cong_{(\min,\max)} S} w(T)$, а *нижней шириной* — число $w_-(S) = \min_{T \cong_{(\min,\max)} S} w(T)$.

Напомним, что *цепью* называется всякое линейно упорядоченное множество. Заметим, что в дальнейшем мы не допускаем пустых цепей.

В этой статье будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть S — ч. у. множество верхней ширины 3. Тогда S (min, max)-эквивалентно односторонней сумме двух цепей ранга $r > 0$.*

4. Вспомогательные утверждения. Докажем сначала одно утверждение об односторонних суммах. Запись $X < Y$ для подмножеств ч. у. множества S будет означать, что $x < y$ для любых $x \in X, y \in Y$.

Подмножество A ч. у. множества S назовем *верхним* (соответственно *нижним*), если $x \in A$ всякий раз, когда $x > y$ (соответственно $x < y$) и $y \in A$. Подмножество в S, которое состоит из всех элементов x, сравнимых с каждым элементом $y \in S$, обозначаем через S_0; очевидно, что оно является цепнью. Элементы S_0 (и только их) будем называть *узлами* ч. у. множества S. Отметим, наконец, что одноэлементные подмножества отождествляются нами с самими элементами.

Лемма 1. *Если ч. у. множество S ширины 2 не содержит подмножества P вида $\{a, b\} < \{c, d\}$, где a и b (соответственно c и d) несравнимы, то S является односторонней суммой двух цепей.*

Заметим, что обратное утверждение очевидно.

Доказательство. Покажем сначала, что множество узлов S_0 есть объединением нижнего и верхнего подмножеств. Предположим, что это не так. Тогда существует узел f, несравнимые элементы a, b и несравнимые элементы c, d, такие, что $\{a, b\} < f < \{c, d\}$. Значит S содержит подмножество вида P и мы пришли к противоречию. Итак, S_0 есть объединением нижнего подмножества S_{01} и верхнего подмножества S_{02}.

Как ч. у. множество ширины 2 подмножество $S \setminus S_0$ является суммой двух цепей, скажем, A и B, причем эта сумма односторонняя, иначе подмножество в $S \setminus S_0$, состоящее из всех его минимальных и максимальных элементов, имеет вид P. Значит (с точностью до перенумерации A и B) не существует элементов $a \in A, b \in B$, таких, что $a > b$. Тогда S является односторонней сумы цепей $S_{01} \cup A = [S_{01} < A]$ и $B \cup S_{02} = [B < S_{02}]$, что и требовалось доказать.

Нам понадобится еще одна лемма, уже относящаяся к (min, max)-эквивалентности. Очевидно, что ч. у. множество имеет верхнюю ширину 1 только в том случае, когда оно состоит из одного элемента.

Лемма 2. *Цепь длины $d > 1$ и прямая сумма двух цепей имеют верхнюю ширину 2.*

Действительно, если S — цепь длины $d > 1$, то ч. у. множества вида $S_a^{\uparrow}$ и $S_b^{\downarrow}$ являются прямыми суммами двух цепей, а если S — прямая сумма двух цепей A и B, то $S_c^{\uparrow}$ (соответственно $S_c^{\downarrow}$) является прямой суммой двух цепей, если цепь C ($C = A$ или $C = B$), содержащая элемент c, имеет длину $d(C) > 1$, и цепью, если $d(C) = 1$. Значит, применяя операции вида $S_a^{\uparrow}$ и $S_b^{\downarrow}$, мы в обоих случаях никогда не "выйдем" за пределы ч. у. множеств ширины 2. Из сказанного очевидным образом вытекает утверждение леммы.

5. Доказательство теоремы 1. Перед тем как перейти непосредственно к доказательству теоремы, мы рассмотрим некоторые свойства min-эквивалентных ч. у. множеств.

Пусть S — ч. у. множество. Последовательность элементов $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $0 \le p < \infty$, назовем min-*допустимой*, если выражение $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$ имеет смысл. В этом случае пишем также $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$.

Множество всех min-допустимых последовательностей обозначается $\mathcal{P}(S)$, а множество таких последовательностей без повторений — $\mathcal{P}_1(S)$. Подмножество в S, состоящее из всех элементов x_i последовательности $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, обозначается через $[\alpha]_S$. Из следствия 5 [2] имеем, что в $\mathcal{P}_1(S)$ существует последовательность α, такая, что $[\alpha]_S = X$, тогда и только тогда, когда подмножество X нижнее. Далее, из следствия 9 [2] имеем, что если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$ и $[\alpha]_S = [\beta]_S$, то $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\beta}$. В силу двух указанных утверждений для нижнего подмножества X можно корректным образом определить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$: $S^{\uparrow}_X = S^{\uparrow}_{\alpha}$, где $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ — любая из последовательностей таких, что $[\alpha]_S = X$. Тогда по предложению 6 [2] X как подмножество в $\overline{S} = S^{\uparrow}_X$ будет верхним; при этом $y < x$ для $y \in Y$ и $x \in X$ (в $\overline{S}$) тогда и только тогда, когда $y \not< x$ в S. В частности, если $S = X \coprod Y$ (соотв. $S = \{X < Y\}$), то $S^{\uparrow}_X = \{Y < X\}$ (соотв. $S^{\uparrow}_X = X \coprod Y$).

Все сказанное здесь о min-эквивалентных ч. у. множествах относится и к двойственной ситуации, когда рассматриваются max-эквивалентные ч. у. множества.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 1.

Пусть S — ч. у. множество верхней ширины 3. Зафиксируем максимальный элемент a и обозначим через $\{a\}^<$ множество всех элеметов $x \in S$, таких, что $x < a$ (мы не включаем в обозначение символ S, так как в каждом случае будет ясно, о каком ч. у. множестве идет речь). Тогда при $X = \{a\}^<$ имеем: $S^{\uparrow}_X = X \coprod S'$, где S' — некоторое подмножество ч. у. множества $S^{\uparrow}_X$. Из того, что верхняя ширина S равна 3, следует, что ширина S' не превосходит двух. С другой стороны, согласно леммы 2 ширина S' не может быть равной единице. Значит ширина S' равна двум. А тогда ч. у. множество $T = (S^{\uparrow}_X)^{\uparrow}_a$ имеет также ширину 2, причем a является его узлом. Из того, что a — узел, следует, что при любом представлении T в виде суммы двух цепей (как ч. у. множества ширины 2) ранг этой суммы не равен нулю.

Если принять во внимание лемму 1, то, чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно показать, что T не содержит подмножества $P = \{a, b\} < < \{c, d\}$, где a и b (соответственно c и d) несравнимы. Предположим противное и положим $Y = \{a\}^< \cup \{b^<\} \cup \{a, b\}$. Тогда в ч. у. множестве $T^{\uparrow}_Y$ элеметы a, b, c, d попарно несравнимы, а это невозможно в силу того, что верхняя ширина S (а значит и T) равна 3. Теорема 1 доказана.

1. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – N1. – C. 24–25.
2. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Праці Інституту математики НАН України. – 2005. – Т.2, N3. – С. 18–58.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно конечного типа // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем і інформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 22–33.
4. *V. M. Bondarenko, M. V. Styopochkina.* On finite posets of *inj*-finite type and their Tits forms // Algebra Discrete Math. – 2006. – N2. – P. 17–21.

Получено 06.05.2008