1996. Т. 32, № 8. С. 1035 – 1042

УДК 517.983.5

ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЁТЕРОВЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

В. Ф. Журавлев

Предложенный в [1] подход к исследованию периодических импульсных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [2, 3] успешно обобщен на случай общих нётеровых краевых задач. Существенная особенность этих задач — исходная дифференциальная система всюду разрешима. Однако существует множество краевых задач, для которых исходное операторное уравнение не является всюду разрешимым. К таким уравнениям относятся некоторые классы функционально-дифференциальных уравнений [4], в частности интегро-дифференциальные [5]. Это класс уравнений с нётеровым оператором. Полученные в [6, 7] необходимые и достаточные условия существования и формулы для построения общих решений линейных операторных уравнений с нётеровым оператором, действующим в банаховых или гильбертовых пространствах, позволяют решить задачу о нахождении условий разрешимости и структуре общего решения краевой задачи для нётерового операторного уравнения с импульсным воздействием.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия разрешимости, построены решения: краевых задач для нётеровых операторных уравнений, нётеровых операторных уравнений с импульсным воздействием и краевых задач для них. При решении этих задач построены обобщенный обратный оператор к импульсному нётерову и обобщенный оператор Грина линейной полуоднородной краевой задачи для импульсного нётерового операторного уравнения.

Постановка задачи. Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства вектор-функций $z : [a,b] \to R^n$ и $f : [a,b] \to R^{n_1}$, $-\infty < a \le t \le b < +\infty$, R^m — евклидово пространство m-мерных векторных констант.

Рассмотрим линейное операторное уравнение

$$(Lz)(t) = f(t), \quad z \in B_1, \quad f \in B_2, \tag{1}$$

где $L : B_1 \to B_2$ — нётеров оператор, $(\chi_L = \dim\ker L - \dim\ker L^* = s - k \neq 0)$.

Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ — фиксированная упорядоченная система точек промежутка (a, b) и в моменты времени τ_i $(i = 1, \ldots, p)$ решения уравнения (1) имеют скачки, определяемые равенствами [1]

$$\Delta z|_{t=\tau_i} = z(\tau_i + 0) - z(\tau_i - 0) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i. \tag{2}$$

Систему (1), (2) будем называть нётеровым операторным уравнением с импульсным воздействием или импульсным нётеровым операторным уравнением.

Под решением импульсного нётерового операторного уравнения будем понимать функцию $z(t)$, принадлежащую пространству $B_1 \setminus \{\tau_i\}_I$ функций банахова пространства B_1, имеющих разрывы первого рода в фиксированных точках $t = \tau_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, удовлетворяющую системе (1), (2).

Если в пространстве $B_1 \setminus \{\tau_i\}_I$ норму ввести следующим образом:

$$\|z\|_{B_1 \setminus \{\tau_i\}_I} = \|z\|_{B_1} + \sum_{i=1}^{p} |a_i|,$$

то оно станет банаховым пространством.

Пусть $l = \mathrm{col}(l_1, l_2, \ldots, l_m) : B_1 \setminus \{\tau_i\}_I \to R^m$ — линейный ограниченный m-мерный векторный функционал, определенный на пространстве $B_1 \setminus \{\tau_i\}_I$, со значениями в евклидовом пространстве R^m и пусть решения системы (1), (2) удовлетворяют еще и краевым условиям

$$lz(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m. \tag{3}$$

Систему (1) — (3) будем называть линейной краевой задачей для нётерового операторного уравнения с импульсным воздействием.

Ставится задача: получить необходимые и достаточные условия разрешимости импульсного нётерового операторного уравнения (1), (2) и краевой задачи (1) — (3), найти формулы для представления их общих решений.

Предварительные сведения. Рассмотрим линейное операторное уравнение (1) с линейным ограниченным нётеровым оператором.

При решении поставленных выше задач будем использовать обобщенное обращение оператора L в банаховых и гильбертовых пространствах. Оператор L^- называется обобщенно обратным к оператору $L : B_1 \to B_2$, если он удовлетворяет свойствам [8, с. 45]: 1) $LL^-L = L$; 2) $L^-LL^- = L^-$.

Если пространства B_1 и B_2 гильбертовы, то к нётеровому оператору L существует единственный псевдообратный в смысле Мура — Пенроуза [9, с. 358] оператор L^+, удовлетворяющий свойствам: 1) $LL^+L = L$; 2) $L^+LL^+ = L^+$; 3) $LL^+ = (LL^+)^*$; 4) $L^+L = (L^+L)^*$.

Следуя работам [6, 7], кратко изложим методику построения обобщенно обратных и псевдообратных операторов к нётеровым. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^s$ и $\{\varphi_q\}_{q=1}^k$ — базисы нуль-пространств $N(L)$ и $N(L^*)$ операторов L и ему сопряженного L^* соответственно.

По формулам из [6] построим проекторы

$$P_{N(L)}x = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i(x) f_i, \quad P_{N(L)} : B_1 \to N(L), \quad P_Y y = \sum_{q=1}^{k} \varphi_q(y)\psi_q, \quad P_Y : B_2 \to Y$$

и операторы

$$P_{Y_1}x = \sum_{i=1}^{\min(s,k)} \gamma_i(x)\psi_i, \; P_{Y_1} : B_1 \to Y_1 \subseteq Y, \; P_{N_1(L)}y = \sum_{q=1}^{\min(s,k)} \varphi_q(y) f_q, \; P_{N_1(L)} : B_2 \to N_1(L) \subseteq N(L),$$

где $\{\gamma_j\}_{j=1}^s \subset B_1^*$ — система элементов, сопряженно биортогональная системе базисных элементов $\{f_i\}_{i=1}^s$, $\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}$; $Y \subset B_2$ — подпространство, натянутое на систему элементов $\{\psi_l\}_{l=1}^k$, сопряженно биортогональную базисным элементам $\{\varphi_q\}_{q=1}^k$, $\varphi_q(\psi_l) = \delta_{ql}$.

Лемма 1 [6]. *Оператор $\bar{L} = L + P_{Y_1}$ имеет ограниченный обратный*

$$\bar{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (L + P_{Y_1})_l^{-1} & \textit{левый}, \quad \textit{если} \quad s \le k, \\ (L + P_{Y_1})_r^{-1} & \textit{правый}, \quad \textit{если} \quad s \ge k. \end{cases}$$

Эта лемма обобщает известную лемму Шмидта, справедливую только для фредгольмовых операторов, и с ее помощью получены формулы для обобщенного обращения нётеровых операторов в банаховых пространствах.

Известно [6], что нётерово операторное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда $f(t) \in B_2$ удовлетворяет условию

$$(P_Y f)(t) = 0. \tag{4}$$

При этом его общее решение представимо в виде

$$z(t) = X(t)c + (L^- f)(t), \tag{5}$$

где $X(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_s(t))$ — $n \times s$-мерная фундаментальная матрица, составленная из полной системы линейно независимых векторов нуль пространства $N(L)$ оператора L, причем, как показано в [4, с. 30], $n \le s$; $(L^- f)(t)$ — частное решение нётерового операторного уравнения (1); $L^- : B_2 \to B_1$ — линейный ограниченный обобщенно обратный оператор к нётеровому оператору L, который может быть построен по формуле [6] $L^- = \bar{L}^{-1}_{1,r} - P_{N_1(L)}$.

Если пространства B_1 и B_2 гильбертовы ($B_1 = H_1$, $B_2 = H_2$), то к оператору L существует единственный псевдообратный оператор L^+, который можно определить по формулам [7]

$$L^+ = (L^* L + P_{N(L)})^{-1} L^* = L^*(L L^* + P_{N(L^*)})^{-1}, \tag{6}$$

где $P_{N(L)}$ и $P_{N(L^*)}$ — ортопроекторы на нуль-пространства операторов L и L^* соответственно, которые можно построить по формулам

$$\begin{aligned} P_{N(L)}x &= \sum_{i,j=1}^{s} (\alpha_{i,j})^{-1}(f_j, x) f_i, \quad P_{N(L)} : H_1 \to N(L), \\ P_{N(L^*)}y &= \sum_{l,q=1}^{k} (\beta_{l,q})^{-1}(\varphi_q, y)\varphi_l, \quad P_{N(L^*)} : H_2 \to N(L^*), \end{aligned} \tag{7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в соответствующем гильбертовом пространстве, $(\alpha_{i,j})^{-1}$ и $(\beta_{l,q})^{-1}$ — элементы матриц, обратных к матрицам Грама $\alpha = [(f_i, f_j)]$ и $\beta = [(\varphi_q, \varphi_l)]$ соответственно. В этом случае формула (5) примет вид $z(t) = X(t)c + (L^+ f)(t)$.

Если оператор L действует из пространства абсолютно непрерывных на конечном промежутке $[a,b]$ функций D_p^n в пространство суммируемых на $[a,b]$ со степенью p $(1 < p < \infty)$ функций L_p^n, то обобщенный обратный оператор $L^- : L_p^n \to D_p^n$ имеет интегральное представление [10, с. 302 — 305]

$$(L^- f)(t) = \int_a^b C(t,s) f(s)\, ds,$$

ядро которого $C(t,s)$ называется обобщенной матрицей Грина задачи Коши [4].

Обобщенный оператор Грина линейной краевой задачи для нётерового операторного уравнения. Рассмотрим линейную краевую задачу (1), (3). Как было отмечено выше, нётерово операторное уравнение (1) разрешимо при выполнении условия (4) и при этом имеет место решение вида (5).

Для того чтобы решение (5) нётерового уравнения (1) удовлетворяло краевым условиям (3), необходимо и достаточно, чтобы $lz(\cdot, c) = \alpha$, откуда для определения векторной константы $c \in R^m$ получаем алгебраическую систему

$$Qc = \{\alpha - l(L^- f)(\cdot)\} = 0, \tag{8}$$

где $Q = lX(\cdot)$ — $m \times s$-мерная постоянная матрица.

Пусть Q^+ — единственная псевдообратная $s \times m$-мерная матрица [7] к матрице Q. Обозначим через P_Q $s \times s$-матрицу-ортопроектор ($P_Q^2 = P_Q^* = P_Q$), проектирующую R^s на нуль-пространство $N(Q)$ матрицы Q; $P_Q : R^n \to N(Q)$; аналогично P_{Q^*} — $m \times m$-мерная матрица-ортопроектор R^m на $N(Q^*)$; $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$. Далее обозначим через P_{Q_r} $s \times r$-мерную матрицу, столбцы которой — полная система r линейно независимых столбцов матрицы P_Q $(r = s - \operatorname{rank} Q)$; $P_{Q_d^*}$ — $d \times m$-мерная матрица, строки которой — полная система d линейно независимых строк матрицы P_{Q^*} $(d = m - \operatorname{rank} Q)$.

Для разрешимости относительно $c \in R^m$ алгебраического уравнения (8) необходимо и достаточно [7], чтобы

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - l(L^- f)(\cdot)\} = 0. \tag{9}$$

При этом уравнение (8) имеет решение вида

$$c = P_{Q_r} c_r + Q^+ \{\alpha - l(L^- f)(\cdot)\}, \tag{10}$$

где $P_{Q_r} c_r \in N(Q)$, а $c_r \in R^r$.

Подставив (10) в (5), получим общее решение краевой задачи (1), (3) $z(t) = X(t)P_{Q_r}c_r + (L^-f)(t) - X(t)Q^+l(L^-f)(\cdot) + X(t)Q^+\alpha$.

Таким образом, для краевой задачи (1), (3) справедлива

Теорема 1. *Линейная краевая задача (1), (3) для нётерового операторного уравнения (1) разрешима для тех и только тех $f(t) \in B_2$ и $\alpha \in R^m$, которые удовлетворяют условиям*

$$(P_Y f)(t) = 0, \quad P_{Q_d^*}\{\alpha - l(L^-f)(\cdot)\} = 0,$$

и при этом имеет решение вида $z(t) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q^+\alpha$, где $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$ — $n \times r$-мерная фундаментальная матрица, составленная из полной системы r линейно независимых решений соответствующей (1), (3) однородной ($f(t) = 0$, $\alpha = 0$) краевой задачи, $(Gf)(t) = (L^-f)(t) - X(t)Q^+l(L^-f)(\cdot)$ — обобщенный оператор Грина полуоднородной ($\alpha = 0$) краевой задачи (1), (3).

Обобщенный обратный оператор линейного нётерового операторного уравнения с импульсным воздействием. Рассмотрим задачу о нахождении общего решения импульсного нётерового операторного уравнения

$$(Lz)(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i. \tag{11}$$

Пусть выполнено условие (4) разрешимости нётерового операторного уравнения (1). Тогда его общее решение на промежутках $[a, \tau_1]$ и $]\tau_1, \tau_2]$ представимо в виде

$$z_1(t) = X(t)c + (L^-f)(t), \quad t \in [a, \tau_1], \quad z_2(t) = X(t)c_2 + (L^-f)(t), \quad t \in]\tau_1, \tau_2]. \tag{12}$$

Из импульсных условий (2) имеем

$$X(\tau_1 + 0)c_2 + (L^-f)(\tau_1 + 0) = (E + S_1)\{X(\tau_1 - 0)c + (L^-f)(\tau_1 - 0)\} + a_1. \tag{13}$$

С целью упрощения записей, не нарушая общности, всюду в дальнейшем будем полагать $X(\tau_i - 0) = X(\tau_i + 0)$, $(L^-f)(\tau_i - 0) = (L^-f)(\tau_i + 0)$.

Обозначим через $P_1 : R^s \to N(X(\tau_1))$ $s \times s$-мерную матрицу-ортопроектор евклидового пространства R^s на нуль-пространство $N(X(\tau_1))$ постоянной $s \times n$-мерной матрицы $X(\tau_1)$, а через $P_1^{(*)} : R^n \to N(X^*(\tau_1))$ $n \times n$-мерную матрицу-ортопроектор евклидового пространства R^n на нуль-пространство $N(X^*(\tau_1))$ $n \times s$-мерной матрицы $X^*(\tau_1)$, сопряженной к матрице $X(\tau_1)$.

Известно [7], что система (13) разрешима относительно $c_2 \in R^s$ тогда и только тогда, когда

$$P_1^{(*)}\{(E + S_1)X(\tau_1)c + S_1(L^-f)(\tau_1) + a_1\} = 0. \tag{14}$$

Так как $n \times s$-мерная матрица $X(t)$ составлена из полной системы s линейно независимых базисных векторов $\{f_i\}_{i=1}^s$, то постоянная матрица $X(\tau_1)$ имеет полный ранг ($\operatorname{rank} X(\tau_1) = n$, $n \le s$), поэтому $P_1^{(*)} \equiv 0$ и, следовательно, условие (14) всегда выполнено. При этом система (13) имеет $r = (s - n)$-параметрическое семейство решений $c_2 = P_1 c + X^+(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1)c + X^+(\tau_1)S_1(L^-f)(\tau_1) + X^+(\tau_1)a_1$, где $X^+(\tau_1)$ — единственная $s \times n$-мерная псевдообратная матрица к матрице $X(\tau_1)$ [7], которую можно построить по формуле (6): $X^+(\tau_1) = X^*(\tau_1)[X(\tau_1)X^*(\tau_1)]^{-1}$, имея в виду, что $P_{N(X^*(\tau_1))} = 0$; $P_1 c \in N(X(\tau_1))$, где $c \in R^s$ — произвольный s-мерный вектор.

Подставив полученное значение c_2 в формулу (12), получим выражение для общего решения $z_2(t)$ импульсного операторного уравнения (11) на промежутке $]\tau_1, \tau_2]$:

$$z_2(t) = X(t)[\hat{S}_1 + P_1]c + (L^-f)(t) + X(t)(L_1^-f)(\tau_1) + X(t)X^+(\tau_1)a_1,$$

где введены обозначения

$$\hat{S}_1 = X^+(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1), \quad (L_1^-f)(\tau_1) = X^+(\tau_1)S_1(L^-f)(\tau_1).$$

На промежутке $]\tau_2, \tau_3]$ решение нётерового операторного уравнения (1) имеет вид

$$z_3(t) = X(t)c_3 + (L^- f)(t), \quad t \in]\tau_2, \tau_3]. \tag{15}$$

С учетом импульсных условий (2) имеем

$$X(\tau_2 + 0)c_3 + (L^- f)(\tau_2 + 0) = (E + S_2)\{X(\tau_2 - 0)[\bar{S}_1 + P_1]c + (L^- f)(\tau_2 - 0)+$$

$$+X(\tau_2 - 0)(L_1^- f)(\tau_1) + X(\tau_2 - 0)X^+(\tau_1)a_1\} + a_2. \tag{16}$$

Как и ранее, обозначим через $P_2 : R^s \to N(X(\tau_2))$ $s \times s$-мерную матрицу-ортопроектор евклидового пространства R^s на нуль-пространство $N(X(\tau_2))$ постоянной $s \times n$-мерной матрицы $X(\tau_2)$, а через $P_2^{(*)} : R^n \to N(X^*(\tau_2))$ $n \times n$-мерную матрицу-ортопроектор евклидового пространства R^n на нуль-пространство $N(X^*(\tau_2))$ $n \times s$-мерной матрицы $X^*(\tau_2)$, сопряженной к матрице $X(\tau_2)$.

Так как постоянная $n \times s$-мерная матрица $X(\tau_2)$ имеет полный ранг, то $P_2^{(*)} \equiv 0$ и уравнение (16) всегда разрешимо относительно $c_3 \in R^s$ и имеет $r = (s - n)$-параметрическое семейство решений

$$c_3 = P_2 c + X^+(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)[\bar{S}_1 + P_1]c + X^+(\tau_2)S_2(L^- f)(\tau_2)+$$

$$+X^+(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)(L_1^- f)(\tau_1) + X^+(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)X^+(\tau_1)a_1 + X^+(\tau_2)a_2.$$

Обозначив $\bar{S}_2 = X^+(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)$, $(L_2^- f)(\tau_2) = X^+(\tau_2)S_2(L^- f)(\tau_2)$ и подставив найденное значение c_3 в соотношение (15), получим выражение для решения $z_3(t)$ на промежутке $]\tau_2, \tau_3]$:

$$z_3(t) = X(t)[\bar{S}_2\bar{S}_1 + \bar{S}_2 P_1 + P_2]c + (L^- f)(t)+$$

$$+X(t)[\bar{S}_2(L_1^- f)(\tau_1) + (L_2^- f)(\tau_2)] + X(t)[\bar{S}_2 X^+(\tau_1)a_1 + X^+(\tau_2)a_2].$$

Проведя аналогичные рассуждения на промежутке $]\tau_3, \tau_4]$ для решения $z_4(t)$, находим

$$z_4(t) = X(t)[\bar{S}_3\bar{S}_2\bar{S}_1 + \bar{S}_3\bar{S}_2 P_1 + \bar{S}_3 P_2 + P_3]c + (L^- f)(t) + X(t)[\bar{S}_3\bar{S}_2(L_1^- f)(\tau_1)+$$

$$+\bar{S}_3(L_2^- f)(\tau_2) + (L_3^- f)(\tau_3)] + X(t)[\bar{S}_3\bar{S}_2 X^+(\tau_1)a_1 + \bar{S}_3 X^+(\tau_2)a_2 + X^+(\tau_3)a_3].$$

Продолжая этот процесс дальше, для нётерового операторного уравнения с импульсным воздействием получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Нётерово операторное уравнение с импульсным воздействием (11) разрешимо при любых $a_i \in R^n$ $(i = 1, \ldots, p)$ и тех и только тех $f(t) \in B_2$, которые удовлетворяют условию $(P_Y f)(t) = 0$, и имеет общее решение вида*

$$z(t) = \bar{X}(t)c + (\bar{L}^-[f, a_i]^\tau)(t), \tag{17}$$

где $\bar{X}(t) = X(t)\sum_{i=1}^{k}\prod_{\nu=i}^{k-1}\bar{S}_\nu P_{i-1}$, $t \in]\tau_{k-1}, \tau_k]$, — *$n \times s$-мерная фундаментальная матрица соответствующего (11) однородного ($f(t) = 0$, $a_i = 0$) нётерового операторного уравнения с импульсным воздействием;* $(\bar{L}^-[f, a_i]^\tau)(t)$ — *обобщенный обратный оператор к оператору импульсного нётерового операторного уравнения (11), имеющий вид*

$$(\bar{L}^-[f, a_i]^\tau)(t) = (L^- f)(t) + \sum_{i=1}^{k-1}(\tilde{L}_i^- f)(t) + \sum_{i=1}^{k-1}\tilde{X}_i(t)a_i, \quad t \in]\tau_{k-1}, \tau_k].$$

Здесь

$$(\tilde{L}_i f)(t) = X(t)\prod_{\nu=i+1}^{k-1}\bar{S}_\nu(L_i^- f)(\tau_i), \quad (\tilde{X}_i)(t) = X(t)\prod_{\nu=i+1}^{k-1}\bar{S}_\nu X^+(\tau_i), \quad P_0 = E_s, \quad \prod_{\nu=k+1}^{k}\bar{S}_\nu = E_s.$$

Обобщенный оператор Грина линейной краевой задачи для импульсного нётерового операторного уравнения. Найдем критерий существования и структуру общего решения линейной краевой задачи для нётерового операторного уравнения с импульсным воздействием

$$(Lz)(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \tag{18}$$

$$lz(\cdot) = \alpha. \tag{19}$$

Как было показано выше, общее решение $z(t,c)$ импульсного нётерового уравнения (18) имеет вид (17). Для того чтобы оно удовлетворяло краевым условиям (19), необходимо и достаточно, чтобы $lz(\cdot,c) = \alpha$, откуда для определения векторной константы $c \in R^s$ получим алгебраическую систему

$$Dc = \alpha - l(\bar{L}^-[f,a_i]^\tau)(\cdot), \tag{20}$$

где $D = l\bar{X}(\cdot)$ — $m \times s$-мерная постоянная матрица.

Пусть D^+ — единственная псевдообратная к D $s \times m$-мерная матрица [7]. Обозначим через P_D $s \times s$-матрицу-ортопроектор, проектирующую R^s на нуль-пространство $N(D)$ матрицы D; $P_D : R^s \to N(D)$; аналогично P_{D^*} — $m \times m$-мерная матрица-ортопроектор пространства R^m на $N(D^*)$. Далее обозначим через P_{D_r} $n \times r$-мерную матрицу, столбцы которой — полная система r линейно независимых столбцов матрицы P_D $(r = s - \operatorname{rank} D)$; $P_{D_d^*}$ — $d \times m$-мерная матрица, строки которой — полная система d линейно независимых строк матрицы P_{D^*} $(d = m - \operatorname{rank} D)$.

Уравнение (20) разрешимо относительно $c \in R^s$ тогда и только тогда, когда $P_{D_d^*}\{\alpha - l(\bar{L}^-[f,a_i]^\tau)(\cdot)\} = 0$, и при этом имеет r-параметрическое семейство решений

$$c = P_{D_r}c_r + D^+\alpha - D^+l(\bar{L}^-[f,a_i]^\tau)(\cdot). \tag{21}$$

Подставив найденное решение (21) в (17), получим общее решение линейной импульсной краевой задачи для нётерового операторного уравнения

$$z(t) = \bar{X}(t)P_{D_r}c_r + \bar{X}(t)D^+\alpha + (L^-f)(t) - \bar{X}(t)D^+l(L^-f)(\cdot) + \sum_{i=1}^{k-1}(\bar{L}_i^-f)(t) -$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{k=1}^{p+1}\bar{X}(t)D^+l^{(k)}(\bar{L}_i^-f)(\cdot) + \sum_{i=1}^{k-1}\bar{X}_i(t)a_i - \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{k=1}^{p+1}\bar{X}(t)D^+l^{(k)}\bar{X}_i(\cdot)a_i, \quad t \in]\tau_{k-1},\tau_k],$$

где через $l^{(k)}$ обозначено действие функционала l на промежутках $[\tau_{k-1},\tau_k]$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Краевая задача (18), (19) разрешима для тех и только тех $f(t) \in B_2$, $\alpha \in R^m$, $a_i \in R^n$, которые удовлетворяют условиям*

$$(P_Y f)(t) = 0, \quad P_{D_d^*}\{\alpha - l(\bar{L}^-[f,a_i]^\tau)(\cdot)\} = 0,$$

и при этом имеет решение вида

$$z(t) = \bar{X}_r(t)c_r + (\bar{G}[f,a_i]^\tau)(t) + \bar{X}(t)D^+\alpha,$$

где $\bar{X}_r(t) = \bar{X}(t)P_{D_r}$ — $n \times r$-мерная фундаментальная матрица соответствующей (1), (4), (5) однородной краевой задачи,

$$(\bar{G}[f,a_i]^\tau)(t) = (L^-f)(t) - \bar{X}(t)D^+l(L^-f)(\cdot) + \sum_{i=1}^{k-1}\Big[(\bar{L}_i^-f)(t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{p+1}\bar{X}(t)D^+l^{(k)}(\bar{L}_i^-f)(\cdot)\Big] + \sum_{i=1}^{k-1}\Big[\bar{X}_i(t) - \sum_{k=1}^{p+1}\bar{X}(t)D^+l^{(k)}\bar{X}_i(\cdot)\Big]a_i,$$

$t \in]\tau_{k-1},\tau_k]$, — *обобщенный оператор Грина неоднородной краевой задачи (18), (19).*

Пример. Найдем условие разрешимости и общий вид решения краевой задачи для нётерового операторного уравнения с импульсным воздействием

$$(Lz)(t) \equiv \dot{z}(t) - z(1) + z(0) = f(t), \quad t \in [0, 2], \tag{22}$$

$$\Delta z|_{t=\tau_1} = S_1 z(\tau_1 - 0) + a_1, \quad \tau_1 \in]0, 2[, \tag{23}$$

$$lz(\cdot) = z(0) - z(2) = \alpha. \tag{24}$$

Оператор $L : D_2 \to L_2$ действует из пространства абсолютно непрерывных функций в пространство суммируемых с квадратом функций и является нётеровым [4].

Действительно, однородные уравнения $(Lz)(t) = 0$ и $(L^* y)(t) = 0$ имеют линейно независимые решения $z_1(t) = 1$, $z_2(t) = t$ и $y(t) = \chi_{[0,1]}(t)$ соответственно, $\chi_{[0,1]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$.

Ортопроекторы $P_{N(L)} : D_2 \to N(L)$ и $P_{N(L^*)} : L_2 \to N(L^*)$, построенные по формулам (7), имеют вид

$$(P_{N(L)}z)(t) = \frac{3}{2} t \int_0^2 (s-1) z(s)\, ds + \int_0^2 \Big(2 - \frac{3}{2}s\Big) z(s)\, ds, \quad (P_{N(L)}y)(t) = \chi_{[0,1]}(t) \int_0^1 \chi_{[0,1]}(s) y(s)\, ds.$$

Из теоремы 1 следует, что уравнение (22) разрешимо для тех и только тех $f(t) \in L_2$, которые удовлетворяют условию

$$(P_{N(L)}f)(t) = \chi_{[0,1]}(t) \int_0^2 \chi_{[0,1]}(s) f(s)\, ds = 0,$$

которое эквивалентно условию

$$\int_0^1 f(s)\, ds = 0. \tag{25}$$

При выполнении условия (25) уравнение (22) имеет двухпараметрическое семейство решений $z(t) = X(t)c + (L^+ f)(t)$, где $X(t) = (t \;\; 1)$ — фундаментальная матрица уравнения $(Lz)(t) = 0$;

$$(L^+ f)(t) = \int_0^t f(s)\, ds + t\chi_{[0,1]}(t) \int_0^2 \chi_{[0,1]}(s) f(s)\, ds + (t/2) \int_0^2 (\chi_{[0,1]}(s) - 1) f(s)\, ds$$

— единственный псевдообратный оператор к оператору L, построенный по формулам (6).

Построим теперь общее решение импульсного операторного уравнения (22), (23). Так как $X(t) = (t \;\; 1)$, то $X(\tau_1) = (\tau_1 \;\; 1)$. По формулам (6), (7) найдем $X^+(\tau_1)$, $P_1 : R^s \to N(X^+(\tau_1))$ и вычислим $\bar{S}_1 + P_1$:

$$X^+(\tau_1) = (1 + \tau_1^2)^{-1} [\tau_1, 1]^T,$$

$$\bar{S}_1 + P_1 = \frac{1}{1+\tau_1^2} \begin{bmatrix} 1 + (1 + s_1)\tau_1 & s_1 \tau_1 \\ s_1 \tau_1 & 1 + s_1 + \tau_1^2 \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{1+\tau_1^2} \bar{S}.$$

Следовательно,

$$(L_1 f)(t) = \frac{1}{1+\tau_1^2} \begin{bmatrix} s_1 \tau_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \left\{ \int_0^{\tau_1} f(\xi)\, d\xi + \frac{\tau_1}{2} \int_1^2 f(\xi)\, d\xi \right\}.$$

Тогда на промежутках имеем общий вид решений нётерового операторного уравнения с импульсным воздействием (22), (23):

$$z_1(t) = [t \;\; 1]c + \int_0^t f(\xi)\, d\xi + \frac{t}{2} \int_1^2 f(\xi)\, d\xi, \quad c \in R^2, \quad t \in [0, \tau_1],$$

$$z_2(t) = \frac{[t\ \ 1]}{1+\tau_1}\,\tilde{S}c + \int_0^t f(\xi)\,d\xi + \frac{t}{2}\int_1^2 f(\xi)\,d\xi + \tag{26}$$

$$+\frac{[t\ \ 1]}{1+\tau_1^2}\begin{bmatrix} s_1\tau_1 \\ s_1 \end{bmatrix}\left\{\int_0^{\tau_1} f(\xi)\,d\xi + \frac{\tau_1}{2}\int_1^2 f(\xi)\,d\xi\right\} + \frac{[t\ \ 1]}{1+\tau_1^2}\begin{bmatrix} \tau_1 \\ 1 \end{bmatrix} a_1, \quad c \in R^2, \quad t \in \,]\tau_1, 2].$$

Теперь найдем решения импульсной краевой задачи (22) — (24). Пусть для определенности $s_1 = 1$, $\tau_1 = 1$. Тогда из (26) имеем

$$z_1(t) = [t\ \ 1]c + \int_0^t f(\xi)\,d\xi + \frac{t}{2}\int_1^2 f(\xi)\,d\xi, \quad c \in R^2, \quad t \in [0,1],$$

$$z_2(t) = \frac{1}{2}\,[3t+1\ \ t+3]c + \int_0^t f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\,(t+1)\int_0^1 f(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{4}\,(3t+1)\int_1^2 f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\,[t+1]a_1, \quad c \in R^2, \quad t \in \,]1,2].$$

Для данной краевой задачи имеем $D = lX(\cdot) = [0\ \ 1] - [7\ \ 5]/2 = [-7\ \ -3]/2$, $P_{D^*} = 0$, $P_D = \frac{1}{58}\begin{bmatrix} 9 & -21 \\ -21 & 49 \end{bmatrix}$, $P_{D_r} = \frac{1}{58}\begin{bmatrix} 9 \\ -21 \end{bmatrix}$, $D^+ = D^*(DD^*)^{-1} = \operatorname{col}[-7\ \ -3]/29$.

Краевая задача (22) — (24) имеет решения для тех и только тех $f(t) \in L_2$, которые удовлетворяют условию (25), так как $P_{Q^*} = 0$ и второе условие теоремы 3 всегда выполнено. Для таких $f(t)$ решение этой задачи на промежутках имеет вид

$$z_1(t) = \frac{9t-21}{58}\,c + \int_0^t f(\xi)\,d\xi - \frac{7t+3}{29}\int_0^2 f(\xi)\,d\xi + \frac{9t-21}{116}\int_1^2 f(\xi)\,d\xi -$$

$$-\frac{21t+9}{58}\int_0^1 f(\xi)\,d\xi - \frac{(7t+3)\alpha}{29} - \frac{(21t+9)a_1}{58}, \quad t \in [0,1], \quad c \in R^1, \quad \alpha \in R^1,$$

$$z_2(t) = \frac{6t-54}{116}\,c + \int_0^t f(\xi)\,d\xi - \frac{12t+8}{29}\int_0^2 f(\xi)\,d\xi + \frac{3t-27}{116}\int_1^2 f(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{-7t+5}{58}\int_0^1 f(\xi)\,d\xi - \frac{(12t+8)\alpha}{29} + \frac{(-7t+5)a_1}{58}, \quad t \in \,]1,2], \quad c \in R^2, \quad \alpha \in R^1.$$

Литература

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.

2. *Самойленко А. М., Бойчук А. А.* // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, № 3. С. 582 — 586.

3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1677 — 1682.

4. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991.

5. *Ландо Ю. К.* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 6. С. 1112 — 1126.

6. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 10. С. 1343 — 1350.

7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* // Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. № 8. С. 6 — 9.

8. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979.

9. *Generalized* Inverses and Applications / Ed. by M. Z. Nashed. New York; San Francisco; London, 1976.

10. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л., 1950.

Институт математики НАН Украины

Поступила в редакцию
6 февраля 1995 г.