Бродський Ю. Б.
Молодецька К. В.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АГРОЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Бродський Ю. Б., Молодецька К. В.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Підручник

Житомир
2016

УДК 519.86
ББК 65.9(Укр)23
Б 88

*Рекомендовано до друку Вченою радою Житомирського національного агроекологічного університету,
протокол № 10 від 8 червня 2016 р.*

Рецензенти:

Яценко О. М. – доктор економічних наук, професор, заступник завідувача кафедри міжнародної торгівлі Київського національного економічного університету імені В. Гетьмана;

Подчашинський Ю. О. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих систем управління та автоматики Житомирського державного технологічного університету;

Ткачук В. І. – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економіки і підприємництва Житомирського національного агроекологічного університету.

Бродський Ю. Б.

Б 88 Моделювання економічної динаміки: підручник / Ю. Б. Бродський, К. В. Молодецька. – Житомир : Вид-во «Житомирський національний агроекологічний університет», 2016. – 132 с.
ISBN 978-966-8706-820

У підручнику представлений курс моделювання економічної динаміки, який викладається студентам економічних спеціальностей. Представлено системні аспекти моделювання соціально-економічних систем, теоретичні засади моделювання систем, особливості математичного апарату моделювання економічної динаміки. Розглянуто математичні моделі економічної динаміки в системах із неперервним і дискретним часом, особливості моделювання взаємовідношень в економічних системах, порядок дослідження стійкості динамічних систем. Підручник призначений для студентів вищих навчальних закладів, магістрантів, аспірантів та викладачів.

ISBN 978-966-8706-820

Роздруковано з оригіналу-макета замовника.

ЗМІСТ

“...Якщо ви захочете, щоб дерево приносило більше плодів,
ніж раніше, вам не потрібно нічого робити з його гілками,
а потрібно розпушити землю і підкласти новий ґрунт під коріння”
Ф. Бекон

“…Не тільки результат дослідження, але й шлях,
що веде до нього, повинен бути істинним”
Ґ. Гегель

“… вчений … повинен прямувати вузькою стежкою
між западнею надспрощення і болотом надускладнення”
Р. Беллман

ВСТУП

На сучасному етапі еволюційні процеси у суспільстві, науково-технічний прогрес, інтеграційні процеси у різних сферах діяльності виступають рушійною силою економічного розвитку. Наслідками таких явищ є ускладнення процесів у соціально-економічних системах, тому для їх дослідження необхідно застосовувати методологію моделювання економічної динаміки і сучасний комп’ютерний інструментарій. Економічна динаміка вивчає детерміновану в часі поведінку складних соціально-економічних систем під впливом внутрішніх і зовнішніх факторів з метою аналізу рівноваги й управління стійкістю. Тому моделювання економічної динаміки є необхідною умовою якісного і кількісного аналізу економічних процесів та систем й ефективним інструментарієм для прийняття управлінських рішень.

Підручник складається із семи розділів і практикуму. В першому розділі розглянуто системний аспект моделювання соціально-економічних систем. Викладено основні поняття і визначення, фундаментальні основи системного аналізу, наведено основні відомості системології. Другий розділ присвячено питанням моделювання систем, представлено теоретичні основи моделювання, сучасні види моделювання систем. Особливу увагу приділено аспектам моделювання економічних систем, його етапам і принципам. В третьому розділі посібника наведено математичний апарат, який покладено в основу моделювання динаміки соціально-економічних систем. Викладено особливості застосування диференціального та інтегрального числення в економіці, опису соціально-економічних процесів диференціальними рівняннями. Розглянутий математичний апарат є фундаментом дослідження економічної динаміки.

В четвертому розділі систематизовано найпоширеніші моделі економічної динаміки з неперервним часом. Проаналізовано модель макроекономічної динаміки Харрода-Домара, порядок прогнозування попиту на основі рівняння Ферхюльста, модель процесів «соціальної дифузії», зростання виробництва з врахуванням інвестицій, модель Еванса встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару, модель Солоу для дослідження впливу основних факторів виробництва на динаміку зміни його обсягу.

Окремий розділ підручника присвячено моделюванню взаємовідношень в соціально-економічних системах: хижацтво, конкуренція, симбіоз, коменсалізм, а також модель конфлікту. Дискретні моделі в економіці розглянуто в шостому розділі на прикладі павутиноподібної моделі ринкової рівноваги. Також представлено теоретичні основи циклічних процесів в економіці, наведено модель ділового циклу Самуельсона-Хікса. Сьомий розділ підручника містить методологію аналізу стійкості та рівноваги соціально-економічних систем. Представлено приклади дослідження на стійкість диференціальних рівнянь і систем. Кожен розділ завершується питаннями для контролю знань.

Вкінці підручника представлено практикум із завданнями до кожного розділу. Наведені задачі покликані сформувати у студентів компетентності до формалізації задач, моделювання засобами сучасного комп’ютерного інструментарію і ПЕОМ, аналізу та інтерпретації отриманих розв’язків й вироблення рекомендацій для прийняття управлінських рішень.

4. МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ В СИСТЕМАХ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

4.1. Модель Харрода-Домара

Прикладом моделі економічної динаміки з неперервним часом є лінійна модель макроекономічної динаміки запропонована Харродом і Домаром, які вважали, що можна досягнути стійкого зростання не тільки обсягів випуску дефіцитної продукції підприємства, але й світової ринкової економіки [7, 8]. Модель описує динаміку доходу з урахуванням інвестицій:

$$Y(t) = C(t) + U(t), \tag{4.1}$$

де $Y(t)$ – дохід підприємства; $C(t)$ – споживання; $U(t)$ – інвестиції.

Основні припущення моделі:

1) темпи зростання доходу $\frac{dY(t)}{dt}$ пропорційні інвестиціям:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha U(t); \tag{4.2}$$

де α – коефіцієнт капіталовіддачі, а $\frac{1}{\alpha}$ – коефіцієнт

капіталоємності приросту доходу;

2) інвестиційний лаг нульовий, тобто інвестиції миттєво переходять в приріст капіталу;

3) споживання $C(t)$ виступає екзогенною змінною, задається як початкова умова і може дорівнювати нулю, не змінюватись в часі, зростати лінійно або за іншим законом, тобто мати власну динаміку.

Враховуючи рівняння (4.1) перепишемо (4.2) у вигляді лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha(Y(t) - C(t)). \tag{4.3}$$

Проаналізуємо рівняння (4.3) для різних початкових умов.

Нехай споживання $C(t)=0$. Тоді всі ресурси надходять в інвестиції і досягаються максимальні темпи зростання. Рівняння (4.3) стає однорідним:

$$\frac{dY(t)}{dt}=\alpha Y(t)\,, \tag{4.4}$$

Відповідно, розв'язок рівняння (4.4) має вигляд експоненціальної залежності:

$$Y(t)=Y\left(0\right)e^{\alpha t}\,, \tag{4.5}$$

що є ідеалізованим рішенням, оскільки при часі $t\to\infty$ дохід збільшується необмежено $Y(t)\to\infty$.

Якщо $C\left(t\right)=C=const$, тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.3) є сумою загального і частинного розв'язків рівняння

$$\frac{dY(t)}{dt}=\alpha Y(t)-\alpha C=\alpha Y(t)\left(1-\frac{C}{Y(t)}\right)=\alpha\left(1-\frac{C}{Y(t)}\right)Y(t)\,, \tag{4.6}$$

а саме

$$Y(t)=\left(Y(0)-C\right)e^{\alpha t}+C\,. \tag{4.7}$$

Величину $\alpha\left(1-\dfrac{C}{Y(t)}\right)$ називають неперервним темпом приросту доходу, а вираз у дужках $\left(1-\dfrac{C}{Y(t)}\right)$ – нормою накопичення.

Для моделі з постійно зростаючим темпом споживання

$$C(t)=C(0)e^{rt}$$

рівняння (4.3) має вигляд

$$\frac{dY(t)}{dt}=\alpha\left(Y(t)-C(0)e^{rt}\right), \tag{4.8}$$

а його розв'язок

$$Y(t) = \left(Y(0) - \frac{C(0)}{1 - \frac{r}{\alpha}} \right) e^{\alpha t} + \frac{C(0)}{1 - \frac{r}{\alpha}} e^{rt} . \tag{4.9}$$

Аналіз виразу (4.9) показує, що темп приросту споживання r не повинен перевищувати коефіцієнт капіталовіддачі α (тобто загального темпу приросту), оскільки тоді споживання займе більшу частину доходу, відповідно зменшаться інвестиції, а потім і дохід: якщо $r > \alpha \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{r}{\alpha}} < 0$, то множник e^{rt} зростає швидше множника $e^{\alpha t}$, тому з часом друга від'ємна складова переважить першу.

4.2. Модель прогнозування попиту на основі рівняння Ферхюльста

Розглянемо задачу забезпечення споживача новою продукцією протягом певного періоду часу t до моменту максимального насичення $t_{\max}$. Досвід показує, що попит на нову продукцію на початкових етапах зростає досить повільно, далі динаміка змінюється – швидкість процесу зростає, а в період насичення попит сповільнюється (динаміка знижується) і в граничних значеннях може прямувати до нуля. Звідси швидкість зміни попиту визначається забезпеченістю і насиченістю ринку продукцією [11, 12].

Позначимо максимальне значення забезпеченості продуктом, тобто насиченість, як $y_{\max}$, а швидкість зміни забезпеченості – похідною $\frac{dy(t)}{dt}$. Нехай швидкість пропорційна забезпеченості продукцією $y(t)$ і незабезпеченості $\left(y_{\max} - y(t)\right)$, тоді структура математичної моделі буде нагадувати рівняння Ферхюльста (3.35).

Таким чином, модель економічної динаміки, що описує забезпечення споживача новим товаром, можна записати у вигляді нелінійного диференційного рівняння першого порядку

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)\left(y_{\max} - y(t)\right), \tag{4.10}$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Коефіцієнт k і насиченість $y_{\max}$ визначимо як наведено нижче. Нехай є статистичні дані y_t за попередні роки $t = 1, 2, ...m$. Диференціальне рівняння (4.10) перепишемо у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky_{\max} y_t - ky_t^2. \tag{4.11}$$

При $\Delta t = 1$ і $ky_{\max} = b$ маємо

$$\Delta y_t = by_t - ky_t^2 \tag{4.12}$$

Для визначення b і k використаємо метод найменших квадратів по точках $t = 1, 2, ...m$, одержимо залежність для

$$L = \sum_{t=1}^{m}\left(\Delta y_t - by_t + ky_t^2\right) \to \min. \tag{4.13}$$

За вимогою необхідної умови наявності екстремуму похідні від L по b і k повинні дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b} &= 2\sum_{t=1}^{m}\left(\Delta y_t - by_t + ky_t^2\right)\left(-y_t\right) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial k} &= 2\sum_{t=1}^{m}\left(\Delta y_t - by_t + ky_t^2\right)y_t^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

На основі (4.14) формуємо систему нормальних лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} b\sum_{t=1}^{m} y_t^2 - k\sum_{t=1}^{m} y_t^3 &= \sum_{t=1}^{m} y_t \Delta y_t, \\ b\sum_{t=1}^{m} y_t^3 - k\sum_{t=1}^{m} y_t^4 &= \sum_{t=1}^{m} y_t^2 \Delta y_t. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему, визначимо b і k, а потім знайдемо $y_{\max} = \frac{b}{k}$. Для визначення $y(t)$ розв'яжемо рівняння

$$\frac{dy(t)}{y(t)(y_{\max} - y(t))} = kdt.$$

і одержимо розв'язок у вигляді логістичної функції

$$y(t) = \frac{y_{\max}}{1 + Ce^{-ky_{\max}t}}, \tag{4.15}$$

в якій $y_{\max}$ і k були раніше визначені за методом найменших квадратів.

Для визначення постійної інтегрування C у якості початкової умови задамо, щоб функція проходила через останню точку m, тобто виконувалася умова

$$y_m = \frac{y_{\max}}{1 + Ce^{-ky_{\max}m}}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно C, одержимо

$$C = \frac{(y_{\max} - y_m)e^{ky_{\max}m}}{y_m}.$$

Кінцева залежність попиту від часу приймає вид

$$y(t) = \frac{y_{\max} y_m}{y_m + \left(y_{\max} - y_m\right)e^{-ky_{\max}(t-m)}}. \tag{4.16}$$

Прогнози попиту одержують при підстановці в цю формулу значень

$$t > m.$$

4.3. Моделі "соціальної дифузії"

Найважливішою складовою в соціально-економічних системах виступає інформація. Ринок інформації і знань визначається нелінійним законом, тому динаміку інформаційного процесу можна описати моделлю з насиченням. Розглянемо моделі "соціальної дифузії" на прикладі моделювання рекламної кампанії [6]. Рекламну кампанію можна поділити на три етапи:

1) *початковий етап*, коли витрати на рекламу можуть перевищувати прибуток внаслідок невеликої інформованості потенційних покупців про нові товари – попит малий;

2) *розвинутий* – етап швидкого збільшення попиту (реалізації продукції);

3) *етап насичення* – попит зменшується, тому рекламувати товари недоцільно.

Отже, весь процес організації реклами можна подати у вигляді логістичної кривої – функції з насиченням.

В основу побудови математичної моделі покладена ідея "насичення", тобто швидкість зростання з часом t будь-якої величини $y(t)$ пропорційна добутку поточного значення цієї величини та різниці граничного – максимального $y_{\max}$ або насиченого $y_н$ й поточного $y(t)$ значень

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx y(t)\cdot\left(y_н - y(t)\right). \qquad (4.17)$$

В моделі необхідно врахувати витрати на рекламу залежно від часу $a(t)$ і ступеня контактів (спілкування, взаємодії) потенційних покупців $b(t)$. Причому, коефіцієнт $b(t)$ повинен визначатись кількістю контактів за одиницю часу $k(t)$ і рівнем агітації ξ, який змінюється в межах $\xi \in [0;1]$, якщо $\xi = 1$, то агітація має максимальний успіх.

Тоді загальна модель рекламної компанії буде мати вигляд

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left(a(t) + b(t)\right)\left(y_{\max} - y(t)\right)y(t)\,, \qquad (4.18)$$

або

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left(a(t) + \xi k(t)\right)\left(y_{\max} - y(t)\right)y(t)\,. \qquad (4.19)$$

4.4. Лінійні та нелінійні моделі зростання виробництва з урахуванням фондів та інвестицій

В періоди економічної кризи часто виникає ситуація, коли підприємства не виділяють ресурсів на розвиток виробництва, оновлення обладнання, технологій тощо. Відповідно, протягом деякого часу на підприємстві відбувається амортизація обладнання, втрата фондів [7, 8]. Для опису даного процесу в лінійному наближенні можна використати модель природного зростання (3.10) з доповненням: по-перше, потрібно врахувати зменшення фондів – знак мінус "–", а також динаміку зменшення – залежність коефіцієнта від часу $k(t)$.

В результаті отримаємо *лінійну* динамічну модель виробництва продукції $y(t)$ на підприємстві з урахуванням втрати фондів

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t)y(t)\ . \qquad (4.20)$$

Якщо фонди зменшуються постійно $k(t) = C = const,$ то рівень виробництва спадає, а розв'язок диференціального рівняння (4.20) описує такий процес у вигляді спадаючої експоненціальної функції (рис. 4.1):

$$\frac{dy(t)}{dt} = -Cy(t)\ ,\ \ y_0 = 10\ , \text{звідки}\ \ y(t) = y_0 e^{-Ct}\ . \qquad (4.21)$$

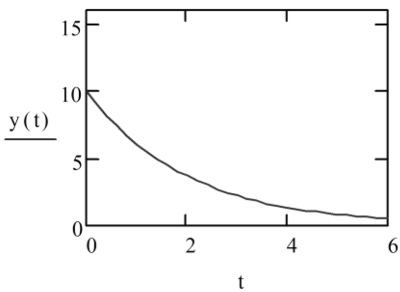

Рис. 4.1.

Виконаємо додавання в рівняння (4.20) складової $u(t)$, знак якої описує потік зовнішніх капіталовкладень, інвестиції або додаткові втрати (наприклад, витрати виробництва, виплати податків, споживчі витрати тощо). Отримані моделі запишемо у вигляді диференціальних рівнянь (4.22), (4.23), а рис. 4.2–4.3 пояснюють відповідну динаміку:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t)y(t) + u(t)\,, \tag{4.22}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t)y(t) - u(t)\,. \tag{4.23}$$

Запишемо *нелінійну* модель зростання виробництва з урахуванням інвестицій, які можуть визначатись і часом, і виробництвом, тобто бути функцією двох змінних при умові $u(t, y(t)) > 0$.

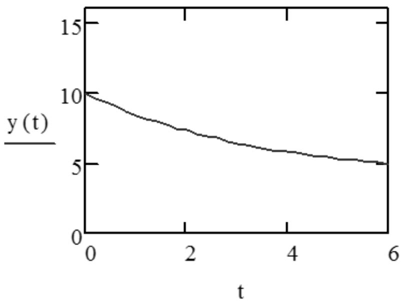

Рис. 4.2.

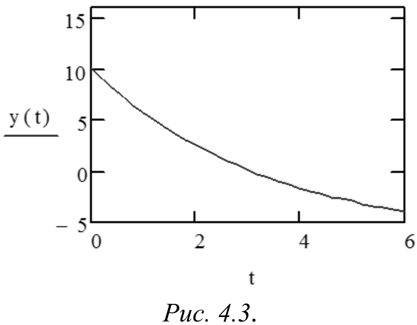

Рис. 4.3.

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_0 y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}}\right) + u(t, y(t)). \tag{4.24}$$

Якщо для зручності позначити $y(t)=y_t$, де індекс t величини y_t буде визначати залежність випуску продукції від часу t, то запишемо рівняння (4.24) у спрощеному вигляді

$$\frac{dy(t)}{dt}=k_0 y_t\left(1-\frac{y_t}{y_{\max}}\right)+u(t,y_t). \tag{4.25}$$

4.5. Модель Еванса

Для побудови моделі розглянемо спрощену економічну систему як ринок одного товару і агрегування у вигляді об'єднання споживачів в одну групу, а виробників – в іншу. Загальна рівновага цієї економічної системи – це стан, при якому всі основні характеристики складових системи не виходять за рамки визначених норм. Тобто, обсяг виробництва і пропорції обміну є такими, що на ринку досягнуто рівність між попитом та пропозицією, при цьому жоден з учасників ринкових угод не зацікавлений змінювати свої обсяги покупок або продажів [13].

На етапі підготовки до прийняття рішень про заходи економічної політики важливо виявити чи є економічна рівновага стійкою або нестійкою. Для збереження рівноважного стану економічної системи потрібні відповідні дії, які корегують процес відновлення рівноваги, тобто перевищення ціною рівноважного значення обов’язково породжує дію, яка впливає на зниження ціни. В умовах конкуренції це означає, що зростання ціни веде до розширення пропозиції порівняно з попитом.

Розглянемо механізм встановлення рівноваги в досліджуваній економічній системі. Якщо ціна на ринку вища рівноважної, то пропозиція перевищує попит і виникає затоварення. В цій ситуації товаровиробники готові зменшувати ціни з метою залучення більшого числа покупців. Отже, при цінах вищих ніж рівноважні відбувається тиск на них в сторону зменшення. Якщо ж ціна на ринку нижча рівноважної, то попит перевищує пропозицію і товар стає дефіцитним. У цій ситуації споживачі готові заплатити вищу ціну, але знизити ризик придбання потрібного товару. Таким чином, при значеннях ціни нижчих рівноважної відбувається тиск на ціну в сторону збільшення. На ринках багатьох видів товарів, як правило, установлюється рівновага, при якій попит дорівнює пропозиції.

Модель Еванса представляє собою лінійну неперервну модель динаміки встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару. Компонентами моделі є попит $q(t)$, пропозиція $s(t)$, ціна $p(t)$. Основні припущення моделі наведені нижче.

1) Попит і пропозиція є лінійними функціями від ціни

$$q(t) = a - bp(t), \tag{4.26}$$

$$s(t) = \alpha + \beta p(t), \tag{4.27}$$

де a, $b > 0$ – попит з ростом ціни падає; α, $\beta > 0$, – пропозиція з ростом ціни зростає.

Природно вважати, що $a > \alpha$, тобто при нульовій ціні $p(t) = 0$ (благодійність) попит перевищує пропозицію, а товар є бажаним;

2) Ціна змінюється залежно від співвідношень між попитом та пропозицією

$$\Delta p(t) = \gamma\left(q(t) - s(t)\right)\Delta t, \tag{4.28}$$

де $\gamma > 0$, а Δ означає приріст.

Отже, збільшення ціни прямопропорційне перевищенню попиту над пропозицією і тривалості Δt цього перевищення. В процесі граничного переходу $\Delta t \to 0$ з рівняння (4.28) одержуємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dp(t)}{dt} = \gamma\left(q(t) - s(t)\right). \tag{4.29}$$

Підставляючи в це рівняння лінійні залежності попиту і пропозиції від ціни, отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з початковою умовою (задача Коші)

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\gamma\left(b + \beta\right)p(t) + \gamma\left(a - \alpha\right), \quad p(0) = p_0 \tag{4.30}$$

або

$$\frac{dp(t)}{dt}+\gamma\left(b+\beta\right)p(t)=\gamma\left(a-\alpha\right), \quad p(0)=p_0 . \tag{4.31}$$

Розв’язок (4.31) представляє собою суму загального розв’язку відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dp(t)}{dt}+\gamma\left(b+\beta\right)p(t)=0 , \tag{4.32}$$

і частинного розв’язку неоднорідного рівняння (4.31).

Загальний розв'язок рівняння (4.32) має вигляд

$$p(t)=Ce^{-\gamma\left(b+\beta\right)t} . \tag{4.33}$$

Частинний розв'язок знайдемо методом варіації довільної сталої за умови, що $C=c(t)$. Підставимо (4.33) в (4.31) і після перетворень отримаємо

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{-\gamma(b+\beta)t}-\gamma\left(b+\beta\right)c(t)\,e^{-\gamma\left(b+\beta\right)t}+\gamma\left(b+\beta\right)c(t)e^{-\gamma\left(b+\beta\right)t}=$$
$$=\gamma\left(a-\alpha\right),$$

звідки

$$\frac{dc(t)}{dt}=\gamma\left(a-\alpha\right)e^{\gamma\left(b+\beta\right)t} . \tag{4.34}$$

Після інтегрування знаходимо $c\left(t\right)$

$$c(t)=\frac{a-\alpha}{b+\beta}e^{\gamma\left(b+\beta\right)t}+C_0 . \tag{4.35}$$

Підстановка (4.35) в (4.33) дає наступний результат

$$p(t)=\frac{a-\alpha}{b+\beta}+C_0e^{-\gamma\left(b+\beta\right)t} . \tag{4.36}$$

З урахуванням початкової умови $p(0)=p_0$ визначимо константу C_0:

$$p(0)=\frac{a-\alpha}{b+\beta}+C_0, \quad \text{звідки } C_0=p_0-\frac{a-\alpha}{b+\beta},$$

і отримаємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$p(t)=\frac{a-\alpha}{b+\beta}+\left(p_0-\frac{a-\alpha}{b+\beta}\right)e^{-\gamma(b+\beta)t}= \\ =p_0e^{-\gamma(b+\beta)t}+\frac{a-\alpha}{b+\beta}\left(1-e^{-\gamma(b+\beta)t}\right). \tag{4.37}$$

Рівноважну ціну p_r можна визначити при умові граничного наближення $t\to\infty$ з рівняння (4.37)

$$p_r=\frac{a-\alpha}{b+\beta}. \tag{4.38}$$

Таким чином, отриманий розв'язок (4.37) відображає динаміку ціни від початкової p_0 до врівноваженої p_r.

Розглянемо ситуацію, коли ціна стала врівноваженою і не змінюється в часі, тобто $\frac{dp(t)}{dt}=0$. Тоді динамічна модель Еванса перетворюється на стаціонарну, а рівноважна ціна p_r називається *стаціонарною точкою* рівняння (4.31). Для такого випадку рівноважну ціну можна визначити з умови рівності попиту і пропозиції без врахування залежності від часу t: $q(p)=s(p)$. Звідси отримаємо рівняння (4.38). Графічно результати моделювання подано на рис. 4.4.

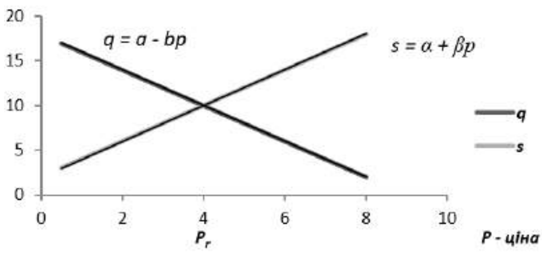

Рис. 4.4.

4.6. Неокласична модель економічного зростання Солоу

Модель розроблена лауреатом Нобелівської премії (1987 р.) Робертом Солоу і вперше опублікована у його праці "Внесок до теорії економічного зростання" (1956 р.). За допомогою цієї моделі можна досліджувати вплив основних факторів виробництва (праці, технології, капіталу) на динаміку зміни обсягу виробництва (економічне зростання), коли економічна система перебуває у рівноважному сталому стані. Крім того, економічна система вважається агрегованою, тобто виробляється єдиний універсальний продукт, і замкненою – відсутній імпорт та експорту.

Розглянемо основні припущення моделі, введемо позначення, нормовані величини [7]. Отже, стан економіки в моделі Солоу задається п'ятьма змінними: $Y(t)$ – випуск або дохід на момент часу t, $K(t)$ – капітал, $L(t)$ – трудові ресурси, $I(t)$ – інвестиції (капіталовкладення), $C(t)$ – споживання.

Частина національного доходу (фонд накопичення) I – використовується на збільшення капіталу для розширення виробництва (інвестування). Інша частина утворює фонд споживання C і задовольняє суспільні потреби.

Розміри випуску продукції визначаються виробничою функцією фондів (капіталу) і праці

$$Y = F(K, L). \tag{4.39}$$

Функція $F(K, L)$ задовольняє вимоги до виробничих функцій і вважається лінійно-однорідною: $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$, де $\lambda > 0$. Введемо нові нормовані величини.

1) $y = f(k)$ – продуктивність праці, тоді

$$y = f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1), \tag{4.40}$$

де $k = \dfrac{K}{L}$ – фондоозброєність (величина капіталу на одного

працівника); $f(k) > 0$, $f''(k) < 0$, що слідує з визначення виробничої функції.

Випуск, або валовий національний продукт Y використовується на споживання C та інвестиції I, тобто баланс виробництва і розподілу національного доходу має вигляд

$$Y = I + C\ ;$$

2) $\rho = const$ – норма інвестицій (норма накопичення), $0 < \rho < 1$, тобто

$$I = \rho Y\ , \tag{4.41}$$

тоді

$$C = \left(1 - \rho\right) Y\ , \tag{4.42}$$

Нехай має місце природний приріст трудових ресурсів, тобто

$$\frac{dL(t)}{dt} = \alpha L(t)\ ,$$

де α – коефіцієнт пропорційності.

Розв'язуючи це диференціальне рівняння, маємо

$$L\left(t\right) = L_0 e^{\alpha t}\ , \tag{4.43}$$

де $L_0 = L\left(0\right)$ – трудові ресурси на початку спостереження.

Отже, робоча сила є зростаючою із заданим постійним темпом α. Повинні виконуватися очевидні умови

$$I \ge 0\ ,\ C \ge 0\ .$$

Інвестиції використовуються на відновлення (амортизацію) основних фондів і на їх приріст, тобто

$$I = \beta K + \frac{dK}{dt}\ ,$$

де β – норма амортизації.

Враховуючи наведені припущення, запишемо

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \beta K\ , \qquad K\left(0\right) = K_0\ .$$

Отже, динамічна односекторна модель Солоу задається системою рівнянь

$$C = \left(1 - \rho\right) Y\ , \tag{4.44}$$

$$Y = F\left(K, L\right), \tag{4.45}$$

$$L(t) = L_0 e^{\alpha t}, \tag{4.46}$$

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \beta K, \ K(0) = K_0. \tag{4.47}$$

Похідна функції фондоозброєності k за часом має вигляд

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d(K/L)}{dt} = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{\rho Y - \beta K}{L} - \frac{K\alpha}{L} =$$
$$= \rho Y - \beta K - \alpha K = \rho Y - K(\beta + \alpha).$$

Отже,

$$\frac{dk}{dt} = \rho Y - K(\beta + \alpha), \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0} \tag{4.48}$$

Рівняння (4.48) називають *основним рівнянням неокласичної теорії економічного зростання*.

Поведінка макропоказників моделі Солоу повністю визначається рівнянням (4.48) і динамікою (4.46) трудових ресурсів $L(t) = L_0 e^{\alpha t}$.

Рівняння (4.48) – це диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються, і початковою умовою (задача Коші), тому воно має єдиний розв'язок.

Дослідження стаціонарних траєкторій в моделі Солоу

Дослідимо стаціонарні траєкторії в моделі Солоу. Для цього розглянемо стаціонарну траєкторію – таку, на якій фондоозброєність k є постійною і дорівнює своєму початковому значенню $k(t) = k_e = const$. Таке значення фондоозброєності називається *стаціонарним*. На стаціонарній траєкторії $\frac{dk}{dt} = 0$.

Розглянемо поведінку макропоказників K, L, C, I, Y на стаціонарній траєкторії. Відповідно до рівняння (4.48), якщо $\frac{dk_e}{dt} = 0$, то

$$\rho f(k) - k_e(\beta + \alpha) = 0, \qquad (4.49)$$

тобто k_e – це розв'язок рівняння (4.49).

Доведемо, що це рівняння має розв'язок. Характеристики виробничої функції $y = f(k) = F(k,1)$, $f'(k) > 0$, але $f'(k) \to 0$ при $k \to \infty$, що випливає з вимог до виробничої функції, наведених вище. Отже, $f(k)$ – зростаюча функція, але темп її зростання сповільнюється. В той же час $k(\beta + \alpha)$ зростає з постійним темпом. Тобто, якщо $\rho f'(k_0) > (\beta + \alpha)$, то рівняння (4.49) має єдиний розв'язок k_e при $k > 0$ (рис. 4.5).

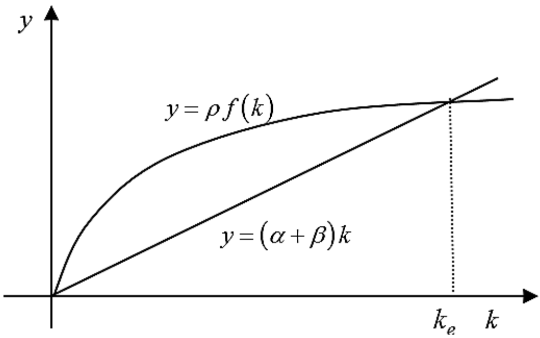

Рис. 4.5.

Виникає питання, як поводяться параметри K, L, C, I, Y на стаціонарній траєкторії? Оскільки $L(t) = L_0 e^{\alpha t}$, а $k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$, то $K(t) = kL(t) = kL_0 e^{\alpha t}$; аналогічно $Y(t) = f(k_e)L(t) = f(k_e)L_0 e^{\alpha t}$. Далі маємо $C(t) = (1-\rho) f(k_e)$, $I(t) = \rho f(k_e) L_0 e^{\alpha t}$.

Запишемо у зручній формі:

$$L(t) = L_0 e^{\alpha t}, \quad K(t) = k_e L(t) = k_e L_0 e^{\alpha t},$$

$$y(t) = f(k_e)L(t) = f(k_e)L_0 e^{\alpha t}, \qquad (4.50)$$

$$C(t) = (1-\rho) f(k_e) L_0 e^{\alpha t},$$

$$I(t)=\rho f(k_e)L_0e^{\alpha t}.$$

Отже, на стаціонарній траєкторії всі основні макропоказники зростають пропорційно трудовим ресурсам, за експоненціальним законом.

”Золоте правило зростання” Солоу. Поняття магістралі

Введемо додаткові змінні $\omega=\frac{C}{L}$, $i=\frac{I}{L}$, які відносять величини C, I до одиниці затраченої робочої сили, отже частка накопичення національного доходу $\rho=\frac{I}{Y}=\frac{i}{y}$. Спочатку розглянемо процес зростання економіки з темпом $v=\beta+\alpha$. В такому випадку величина k постійна, а з (4.49) випливає, що

$$\rho f(k)=vk,$$

а

$$\omega=(1-\rho)f(k)=f(k)-vk.$$

Режим, у якому фонд споживання на одиницю робочої сили максимальний, виділяється умовою $\frac{d\omega}{dk}=0$, а з неї випливає, що $\frac{df(k)}{dk}=v$. Тоді запишемо $\omega=f(k)-k\frac{df(k)}{dk}$. Отже,

$$f(k)-k\frac{df(k)}{dk}=\frac{\partial F}{\partial L}.$$

Таким чином, пропорції суспільного відтворення, при яких фонд споживання на одиницю витраченої робочої сили максимальний, задаються умовою рівності оплати робочої сили граничній продуктивності праціZr

$$\omega=\frac{\partial F}{\partial L}.$$

Це знамените "золоте правило зростання" Р. Солоу. Це правило можна інтерпретувати як рівновагу на ринку робочої сили. Якщо записати рівняння для функції F у вигляді

$$F = \frac{\partial F}{\partial K} K + \frac{\partial F}{\partial L} L ,$$

то золотим правилом зростання

$$\frac{\partial F}{\partial K} K = F - \omega L .$$

Нехай за масштаб цін обрано ціну одиниці продукту. Тоді F виражає вартість національного доходу. Величина ωL виражає частину вартості, розподіленої на оплату робочої сили. Тоді $F - \omega L$ виражає частину вартості, розподіленої на оплату капіталу, який використовується. Одиниця капіталу оцінюється нормою відсотка r. Отже, із "золотого правила" можна зробити висновок, що

$$r = \frac{\partial F}{\partial K} ,$$

тобто норма відсотка дорівнює граничній продуктивності капіталу. Отже, ринок капіталу також знаходиться в рівновазі.

В моделюванні економічної динаміки процес суспільного відтворення, пропорції якого відповідають "золотому правилу зростання", називають *магістраллю*. Значить, якщо вважати, що в економіці діють ринкові механізми регулювання, то в кожен момент часу на магістралі виконуються умови рівноваги і, відповідно, економіка майже безперервно переходить з одного стану рівноваги в інший. На якісному рівні цей результат формулюється так: можна по-різному визначати критерій якості траєкторії зростання економіки, але на великих інтервалах часу оптимальне зростання практично збігається з магістраллю. В теорії економічного зростання його називають *теоремою про магістраль*.

Отже, магістраль можна вважати деякою "динамічною" характеристикою економічної системи, що відображає її ефективну структуру. Однак, виникає питання виявлення механізмів створення та підтримки в системі таких структур, що є для авторів задачею подальшого дослідження.

Контрольні питання

1. Який економічний процес описує модель Харрода-Домара?
2. Записати математичну модель Харрода-Домара у вигляді диференціального рівняння. Перерахувати основні припущення моделі.
3. Провести аналіз рівняння моделі Харрода-Домара для різних початкових умов споживання.
4. Які припущення використані в моделі прогнозування попиту на основі рівняння Ферхюльста?
5. Яка функція є розв'язком диференціального рівняння моделі Ферхюльста? Представити в графічному вигляді.
6. Пояснити процес побудови математичної моделі "соціальної дифузії".
7. Що спільного і відмінного в моделей зростання з врахуванням фондів та інвестицій?
8. Порядок визначення рівноважної ціни на ринку одного товару з використанням моделі Еванса.
9. Навести основні припущення моделі Солоу.
10. Поняття стаціонарної траєкторії і магістралі в моделі Солоу. Пояснити "золоте правило зростання" Солоу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Згуровський М. З. Основи системного аналізу : підруч. / М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова. – К. : Видавнича група BHV, 2007. – 544 с.

2. Бродський Ю. Б. Системний аналіз в економіці : навч. посіб. / Ю. Б. Бродський, К. В. Молодецька, О. М. Николюк. – Житомир : ЖНАЕУ, 2014. – 174 с.

3. Бродський Ю. Б. Інформатика та системологія : навч. посіб. / Ю. Б. Бродський, К. В. Молодецька. – Житомир : ЖНАЕУ, 2014. – 244 с.

4. Томашевський В. М. Моделювання систем : підруч. / В. М. Томашевський. – К. : Видавнича група BHV, 2005. – 352 с.

5. Бродский Ю. Б. Економіко-математичне моделювання : консп. лекцій з дисц. / Ю. Б. Бродський, В. П. Малютіна. – Житомир : ЖНАЕУ, 2010. – 116 с.

6. Бродський Ю. Б. Конспект лекцій з дисципліни "Комп'ютерні системи обробки економічної інформації" / Ю. Б. Бродський, К. В. Молодецька, О. М. Николюк. – Житомир : ЖНАЕУ, 2015. – 100 с.

7. Новожилова М. В. Моделювання економічної динаміки : навч.-метод. посіб. для сам. роботи / М. В. Новожилова, П. М. Коюда, І. А. Чуб. – Харків : ХДТУБА, 2006. – 140 с.

8. Петров Л. Ф. Методы динамического анализа экономики : учеб. пос. / Л. Ф. Петров. – М. : ИНФРА-М, 2010. – 239 с.

9. Рогоза М. Є. Нелінійні моделі та аналіз систем : навч. посіб. : [в 2 ч.] / М. Є. Рогоза, С. К. Рамазанов, Е. К. Мусаєва. – 2-ге вид., зі змінами. – Ч. 2. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – 1147 с.

10. Моделирование экономической динамики : учеб. пособ. / Т. С. Клебанова, Н. А. Дубровина, О. Ю. Полякова [та ін.]. – 2-е изд., стереот. – Х. : Издательский дом «ИНЖЭК», 2005. – 244 с.

11. Бродський Ю. Б. Універсальна модель системи: методологічний аспект / Ю. Б. Бродський, І. Г. Грабар, Ю. О. Тимонін // Вісн. ЖНАЕУ. – 2009. – № 1. – С.358–366.

12. Тимонин Ю. А. Исследование нелинейной логистической функции для моделирования экономической стагнации / Ю. А. Тимонин, Ю. Б. Бродский // Вісн. ЖНАЕУ. – 2010. – № 1 (26). – Т.2. – С. 31–38.

13. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем : учеб. для студ. вузов / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2005. – 295 с.

14. Ахтямов А. М. Математические модели экономических процессов : монография / А. М. Ахтямов. – УФА : РНЦ Баш ГУ, 2009. – 140 с.

15. Бродський Ю. Б. Основи використання інструментарію MathCad для математичних розрахунків та моделювання : метод. рекоменд. та завд. для самост. роб. / Ю. Б. Бродський. – Житомир : ЖНАЕУ, 2012. – 91 с.

16. Герасимов Б. И. Дифференциальные динамические модели : учеб. пособ. / Б. И. Герасимов, Н. П. Пучков, Д. Н. Протасов. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с.

17. Власов М. П. Моделирование экономических процессов / М. П. Власов, П. Д. Шимко. – Ростов : Фенікс, 2005. – 409 с.

18. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: навч. посіб. / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр. – Тернопіль : Навчальна книга, 2006. – 304 с.

19. Кирьянов Д. Mathcad 15 / Mathcad Prime 1.0 / Дмитрий Кирьянов. – СПб. : БХВ-Питер, 2012. – 432 с.

20. Форрестер Д. Мировая динамика : [пер. с англ.] / Д. Форрестер. – М. : АСТ, Terra Fantastica, 2003. – 379 с.

21. Грязнова А. Г. Економічна теорія: підруч. / А. Г. Грязнова, Т. В. Чечелеве. – М. : Вид-во «Іспит», 2005. – 592 с.

22. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навч. посіб. / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.

23. Тараненко Ю. К. Моделювання динамічних змін капіталу в еколого-економічних системах / Ю. К. Тараненко, О. Г. Холод //

Бюлетень Міжнар. Нобелівського економічного форуму. – 2012. – № 1(5), Т. 1. – С. 391–397.

24. Найман Э. Расчет показателя Херста с целью выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков и макроэкономических индикаторов / Э. Найман // Экономист. – 2009. – № 10. – С. 18–28.

25. Месарович М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Д. Мако, И. Тахакара. – М. : Мир, 1973. – 344 с.

26. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике [пер. с англ.] / М. Табор. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 318 с.

27. Пригожин И. Порядок из хаоса : Новый диалог человека с природой [пер. с англ.] / И. Пригожин, И. Стенгерс ; под. общ. ред. В. И. Аршинова, Ю. Л. Климонтовича, Ю. В. Сачкова. – М. : Наука, 1984. – 432 с.

28. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. – М. : Мир, 1985. – 419 с.

29. Данилевич С. Б. Сучасні інформаційні технології в економіці. Бізнес-аналіз даних засобами MathCAD : [Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.] / О. В. Дьячкова, С. Б. Данилевич; Нар. укр. акад. – Х. : Вид-во НУА, 2006. – 172 с.