О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФОРМАХ ТИТСА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ Ч. У. МНОЖЕСТВ

Бондаренко В. М., Степочкина М. В.
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

Пусть S — конечное частично ч. у. множество. Его квадратичной формой Титса называют форму

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i.$$

Для минимального (соотв. максимального) элемента $a \in S$ обозначим через $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$) ч. у. множество $T = T' \cup \{a\}$, где $T' = S \setminus \{a\}$ как ч. у. множества, а элемент a является уже максимальным (соотв. минимальным), причем a сравнимо с x в T тогда и только тогда, когда a несравнимо с x в S. Будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\downarrow}$ и т. д.

Ч. у. множество T назовем (min, max)-эквивалентным ч. у. множеству S, если T равно некоторому ч. у. множеству вида $\overline{S} = S_{x_1x_2\ldots x_p}^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p}$ $(p \geq 0)$, где $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ и, для $i \in \{1, \ldots, p\}$, x_i — минимальный (соотв. максимальный) элемент $S_{x_1x_2\ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{i-1}}$, если $\varepsilon_i = \uparrow$ (соотв. $\varepsilon_i = \downarrow$).

Ч. у. множество S назовем NP(соотв. WNP)-критическим, если форма Титса любого его собственного подмножества неотрицательна (соотв. слабо неотрицательна), но форма $q_S(z)$ таковой не является.

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 *Для произвольного фиксированного ч. у. множества S имеют место следующие утверждения:*

1) *если форма Титса всякого ч. у. множества, которое* (min, max)-*эквивалентно S, слабо неотрицательна, то форма Титса самого S неотрицательна;*

2) *если форма Титса S неотрицательна, то форма Титса всякого ч. у. множества, которое* (min, max)-*эквивалентно S, также неотрицательна (и тем более слабо неотрицательна).*

Теорема 2 *Ч. у. множество S является NP-критическим тогда и только тогда, когда оно* (min, max)-*эквивалентно некоторому WNP-критическому ч. у. множеству.*

Мы также явно описали все NP-критические ч. у. множества и ч. у. множества с неотрицательной формой Титса. Аналоги всех этих результатов для положительных форм доказаны в [1].

1. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, N3. – С. 18-58.