О КЛАССИФИКАЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В.М. Бондаренко (Киев, Украина), М.В. Степочкина (Киев, Украина)

Квадратичные формы играют важную роль при решении многих задач в алгебре, геометрии, топологии, теории дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений, теории операторов и др. Если говорить о теории дифференциальных уравнений, то в первую очередь следует упомянуть известную теорему Ляпунова (опубликованную впервые в 1892 г. в его монографии “Общая задача об устойчивости движения”). Как сама теорема, так и связанные с нею идеи, нашли широкие обобщения и применения (см. [1]). Следует также вспомнить метод квадратичных форм Эрмита, который позволяет, в частности, применить глубокие результаты Фробениуса по теории ганкелевых форм к проблеме Рауса-Гурвица и установить тесную связь известных теорем

П. Л. Чебышева и А. А. Маркова с задачей устойчивости. Новые идеи о применении квадратичных форм в теории дифференциальных уравнений излагаются в работе Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленка и В. Л. Кулика [2].

В настоящей заметке рассматривается некоторый класс квадратичных форм, которые называются формами Титса для частично упорядоченных множеств.

Пусть Γ — конечный биграф (граф со сплошными и прерывистыми ребрами) с множеством вершин Γ_0, множеством сплошных ребер $\Gamma_1^{(1)}$ и множеством прерывистых ребер $\Gamma_1^{(-1)}$; мы будем считать, что биграф не содержит петель и кратных ребер. Ребро между вершинами x и y обозначаем парой $(x,y)=(y,x)$.

Сопоставим биграфу Γ квадратичную форму $f_\Gamma : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \to \mathbb{Z}$:

$$f_Q(z)=\sum_{i\in\Gamma_0} z_i^2-\sum_{(i,j)\in\Gamma_1^{(1)}} z_iz_j+\sum_{(i,j)\in\Gamma_1^{(-1)}} z_iz_j.$$

Пусть теперь S — конечное частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество и пусть $0\notin S$. Обозначим через $\Gamma=\Gamma(S)$ биграф, для которого $\Gamma_0=S\cup 0$, $\Gamma_1^{(1)}=\{(0,j)\,|\,j\in S\}$, $\Gamma_1^{(-1)}=\{(i,j)\,|\,i,j\in S, i<j\}$. Далее, обозначим через $q_S(z)$ квадратичную форму $f_{\Gamma(S)}(z):\mathbb{Z}^{S\cup 0}\to\mathbb{Z}$, которая называется формой Титса ч. у. множества S.

Перед тем, как сформулировать наши результаты, введем некоторые определения и обозначения; мы рассматриваем только конечные ч. у. множества.

Пусть S — ч. у. множество. Для его непересекающихся подмножеств X и Y запись $X \nearrow Y$ будет означать, что существуют элементы $x\in X$ и $y\in Y$ такие, что $x<y$. Если S является объединением своих попарно непересекающихся подмножеств $A_1,..,A_s$, то говорят еще, что S является суммой $A_1,...,A_s$ и пишут $S=A_1+\dots+A_s$; при этом элементы различных слагаемых могут быть сравнимыми между собой. Если же элементы x и y, принадлежащие различным слагаемым, всегда несравнимы, то говорят, что S является прямой суммой подмножеств $A_1,...,A_s$. Множество S называется неразложимым, если оно не является прямой суммой своих собственных подмножеств A и B.

Напомним еще понятие минимаксной суммы частично упорядоченных множеств [3]. Ч. у. множество S называется минимаксной суммой подмножеств $A_1,\dots,A_s$, если выполняются следующие условия:

a) $S=A_1+\ldots+A_s$;

b) x является минимальным, а y максимальным элементом множества S всякий раз, когда x и y принадлежат разным слагаемым и при этом $x<y$.

Минимаксную сумму $S=A_1+\ldots+A_s$ назовем односторонней, если слагаемые можно перенумеровать таким образом, что для каждой пары слагаемых X и Y, удовлетворяющих условию $X\nearrow Y$, выполняется неравенство $i(X)<i(Y)$, где $i(X)$ и $i(Y)$ — новые номера X и Y.

Всякое линейно упорядоченное множество мы называем цепным, а ч. у. множество с единственной парой несравнимых элементов — почти цепным. Заметим, что в дальнейшем мы допускаем и пустые цепные множества.

Нами доказана следующая теорема.

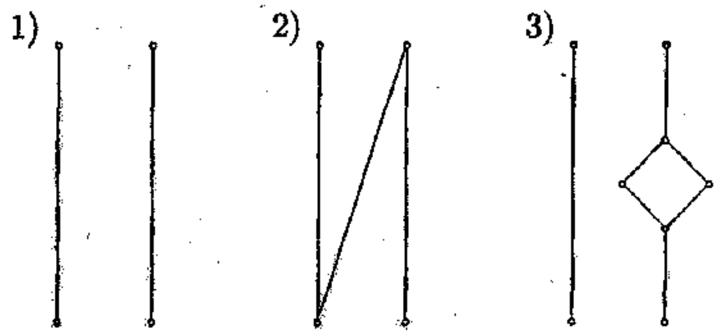
Теорема. *Пусть S частично упорядоченное множество порядка $|S| > 7$. Тогда форма Титса $q_S(x)$ положительно определена в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) S — прямая сумма двух цепных подмножеств;

2) S — односторонняя минимаксная (не прямая) сумма двух цепных подмножеств;

3) S — прямая сумма цепного и почти цепного подмножеств.

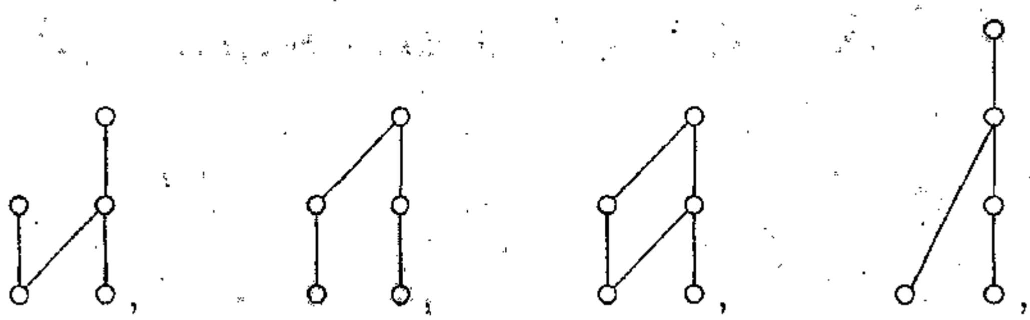
Геометрически указанные в условии теоремы ч. у. множества имеют следующий вид:

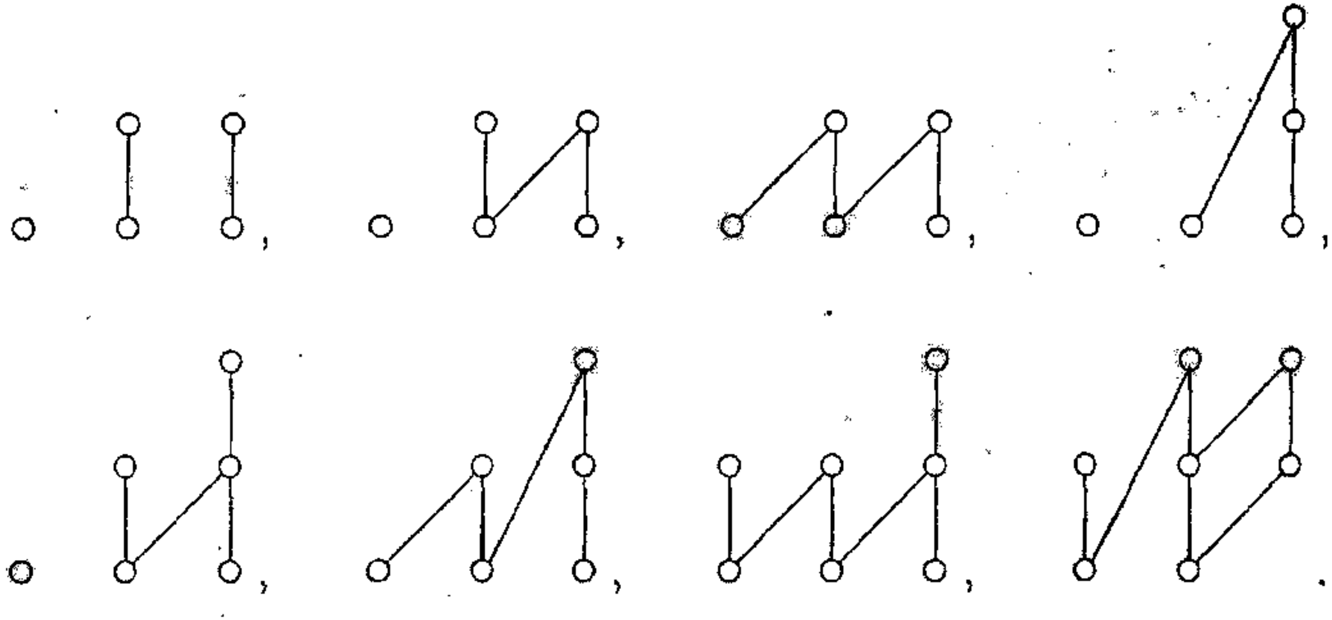


(здесь каждый вертикальный отрезок является цепью длины $d \geq 0$, а наклонные отрезки промежуточных точек не содержат).

Эта теорема существенно усиливает основной результат работы [3] для бесконечных ч. у. множеств, который (если его переформулировать в терминах конечных множеств) означает, что сформулированная выше теорема (а точнее, первая ее часть) выполняется для всех ч. у. множеств порядка $> N$, где N — достаточно большое натуральное число.

Поскольку каждое ч. у. множество порядка s, имеющее вид 1), 2) или 3), содержится в ч. у. множество порядка $s+1$ такого же вида, то из теоремы следует, что если S — частично упорядоченное множество порядка $s \leq 7$, имеющее один из видов 1)–3), то его форма Титса является положительно определенной. Однако в общем случае при $s \leq 7$ утверждение теоремы не верно (точнее, оно не верно для $s = 5, 6, 7$). В качестве примеров ч. у. множеств порядка $s = 5, 6, 7$ с положительно определенной форма Титса, которые не являются множествами вида 1)–3), можно указать следующие примеры:





Нами также описаны все ч. у. множества порядка $|S| \leq 7$, которые имеют положительно определенную форму Титса. Их число больше ста.

Литература

[1] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.

[2] *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1985. Т.21. N5. С.776–788.

[3] *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. 2003. Т.6. N1. С.3–14.