ОКТЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 10

УДК 517.929

А. А. БОЙЧУК, В. Ф. ЖУРАВЛЕВ, А. М. САМОЙЛЕНКО

ЛИНЕЙНЫЕ НЕТЕРОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Развивая и обобщая исследования по обыкновенным дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием [1, 2], в настоящей работе построим матрицу Коши линейных дифференциальных систем с запаздывающим аргументом и импульсным воздействием, а также находим критерий разрешимости и обобщенный оператор Грина линейных нётеровых импульсных краевых задач для систем с запаздыванием.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot z(t)=\sum_{i=1}^{k}A_i(t)z(h_i(t))+r(t),\quad t\in[a,b],$$
$$z(\xi)=\psi(\xi),\ \text{если}\ \xi\bar\in[a,b],\tag{1}$$

где столбцы n-мерных матриц $A_i(t)$ и n-мерный вектор $r(t)$ принадлежат пространству L_p^n-функций с суммируемыми на $[a,b]$ со степенью p $(1<p<\infty)$ компонентами $z(t)$ — n-мерный вектор-столбец из пространства D_p^n-абсолютно непрерывных функций таких, что $\dot z(t)\in L_p^n$; $h_i(t)$ измеримы на $[a,b]$, $h_i(t)\leqslant t$.

Следуя [3], определим операторы $S_{h_i}:D_p^n\to L_p^n$ и $\Psi^{h_i}(t):L_p^n\to L_p^n$ равенствами

$$(S_{h_i}z)(t)=\begin{cases}z(h_i(t)), & \text{если } h_i(t)\in[a,b],\\ 0, & \text{если } h_i(t)\bar\in[a,b],\end{cases}$$
$$\Psi^{h_i}(t)=\begin{cases}0, & \text{если } h_i(t)\in[a,b],\\ \Psi(h_i(t)), & \text{если } h_i(t)\bar\in[a,b],\end{cases}\tag{2}$$

С учетом (2) задачу (1) запишем в виде

$$(\mathscr{L}z)(t)\equiv\dot z(t)-A(t)(S_hz)(t)=f(t),\quad t\in[a,b],\tag{3}$$

где $A(t)=[A_1(t),A_2(t),\dots,A_k(t)]$ — $(n\times N)$-мерная $(N=nk)$ матрица, составленная из матриц $A_i(t)$; оператор внутренней суперпозиции $S_h:D_p^n\to L_p^n$ определен равенством $S_h=\mathrm{col}[S_{h_1},S_{h_2},\dots,S_{h_k}]$, $f(t)=r(t)+\sum_{i=1}^{k}A_i(t)\Psi^{h_i}(t)$.

Решением уравнения (3) называют [3] абсолютно непрерывную функцию $z(t)\in D_n^p$, удовлетворяющую этому уравнению почти всюду.

Известно [3], что задача Коши для уравнения (3) всюду разрешима и ее общее решение имеет вид

$$z(t)=X(t)c+\int_a^b K(t,s)f(s)ds, \tag{4}$$

где $K(t,s)$ — $(n\times n)$-мерная матрица Коши, являющаяся решением матричного уравнения

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}=A(t)(S_hK(\cdot,s))(t),\ K(s,s)=E,$$

определенная в треугольнике $\Delta=\{(t,s):a\leqslant s\leqslant t\leqslant b\}$, $K(t,s)\equiv 0$ при $s>t$; $X(t)=K(t,a)$ — нормальная фундаментальная матрица.

2. Постановка задачи. Будем искать решение уравнения (3), которое имеет скачки [1, 2], определяемые равенствами

$$\Delta z|_{t=\tau_j}=z(\tau_j+0)-z(\tau_j-0)=B_jz(\tau_j-0)+a_j \tag{5}$$

в некоторых фиксированных точках $\tau_j\in]a,b[$, $j=1,\dots,p$.

Систему

$$(\mathcal{L}z)(t)\equiv\dot z(t)-A(t)(S_hz)(t)=f(t),\ t\in[a,b], \tag{6}$$

$$\Delta z|_{t=\tau_j}=B_jz(\tau_j-0)+a_j,\quad j=1,\dots,p, \tag{7}$$

будем называть импульсной дифференциальной системой с запаздывающим аргументом.

Таким образом, решение импульсной системы с запаздыванием (6) — это функция $z(t)$, принадлежащая пространству $D_n^p\setminus\{\tau_j\}_I$ абсолютно непрерывных функций, имеющих разрывы первого рода в фиксированных точках $t=\tau_j$, $j=1,\dots,p$, удовлетворяющая системе (6) почти всюду и импульсным условиям (7).

Если, кроме того, решение системы (6), (7) удовлетворяет еще и краевым условиям

$$lz=\alpha, \tag{8}$$

где $l=\mathrm{col}\,[l_1,\dots,l_m]$ — линейный ограниченный m-мерный вектор-функционал, определенный на пространство функций $z(t)\in D_p^n\setminus\{\tau_j\}_I$, $\alpha=\mathrm{col}\,[\alpha_1,\dots,\alpha_m]\in R^m$, то имеем линейную неоднородную импульсную краевую задачу для дифференциальной системы с запаздыванием.

3. Оператор Грина задачи Коши импульсной системы с запаздыванием. Рассмотрим задачу Коши для импульсной дифференциальной системы с запаздыванием

$$(\mathcal{L}z)(t)=f(t),\quad t\in[a,b],$$

$$\Delta z|_{t=\tau_j}=B_jz(\tau_j-0)+a_j,\quad j=1,\dots,p, \tag{9}$$

где $\mathcal{L}:D_p^n\setminus\{\tau_I\}_I\to L_p^n$ — дифференциальный оператор, определяемый равенством (3), $f(t)\in L_p^n$, B_j — $(n\times n)$-постоянные матрицы такие, что $(E+B_j)$ невырождены, $a_j\in R^n$.

Построим общее решение импульсной дифференциальной системы с запаздыванием (9). Как было указано выше, задача Коши для уравнения (3) всюду разрешима и общее решение системы (3) на промежутке $[a,\tau_1]$ и $]\tau_1,\tau_2]$ имеет вид

$$\begin{aligned} z_1(t)&=X(t)c+\int_a^t K(t,s)f(s)ds,\ t\in[a,\tau_1],\\ z_2(t)&=X(t)c_2+\int_a^t K(t,s)f(s)ds,\ t\in]\tau_1,\tau_2]. \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом импульсных условий (5) имеем

$$X(\tau_1+0)c_2+\int_a^{\tau_1+0} K(\tau_1+0,s)f(s)ds=(E+B_1)\{X(\tau_1-0)c+$$

$$+\int_a^{\tau_1-0} K(\tau_1+0,s)f(s)ds\}+a_1.$$

Находя c_2 из последнего равенства и подставляя его в (10), получаем общий вид решения системы (9) на промежутке $]\tau_1,\tau_2]$

$$z_2(t)=X(t)X^{-1}(\tau_1)(E+B_1)X(\tau_1)c+\int_a^{\tau_1} X(t)X^{-1}(\tau_1)B_1K(\tau_1,s)f(s)ds+$$

$$+\int_a^t K(t,s)f(s)ds+X(t)X^{-1}(\tau_1)a_1.$$

На промежутке $]\tau_2,\tau_3]$ общее решение системы без импульсов (3) имеет вид

$$z_3(t)=X(t)c_3+\int_a^t K(t,s)f(s)ds.$$

С учетом импульсных условий (5) $z_3(\tau_2+0)=(E+B_2)z_2(\tau_2-0)+a_2$ получим для общего решения $z_3(t)$ системы (9) на промежутке $]\tau_2,\tau_3]$ следующее выражение:

$$z_3(t)=X(t)X^{-1}(\tau_2)(E+B_2)X(\tau_2)X^{-1}(\tau_1)(E+B_1)X(\tau_1)c+$$

$$+\int_a^{\tau_1} X(t)X^{-1}(\tau_2)(E+B_2)X(\tau_2)X^{-1}(\tau_2)B_1K(\tau_1,s)f(s)ds+$$

$$+\int_a^{\tau_2} X(t)X^{-1}(\tau_2)B_2K(\tau_2,s)f(s)ds+\int_a^t K(t,s)f(s)ds+$$

$$+X(t)X^{-1}(\tau_2)(E+B_2)X(\tau_2)X^{-1}(\tau_1)a_1+X(t)X^{-1}(\tau_2)a_2.$$

Продолжая этот процесс для импульсной системы (9) с запаздыванием, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Задача Коши для импульсной дифференциальной системы с запаздыванием всюду разрешима и ее решение имеет вид*

$$z(t)=\bar{X}(t)c+\int_a^b K(t,s)f(s)ds+\sum_{i=1}^{k}\int_a^{\tau_i}\bar{K}_i(t,s)f(s)ds+\sum_{i=1}^{k-1}\bar{X}_i(t)a_i,$$

где $\bar{X}(t)=X(t)\prod_{\nu=k}^{1}X^{-1}(\tau_\nu)(E+B_\nu)X(\tau_\nu)$ — ***$(n\times n)$-мерная фундаментальная матрица соответствующей (8) однородной ($f(t)=0$, $a_i=0$) импульсной системы,***

$$\bar{K}_i(t,s)=X(t)\prod_{\nu=k}^{i+1}X^{-1}(\tau_\nu)(E+B_\nu)X(\tau_i)B_iK(\tau_i,s),$$

$$a<\tau_{i-1}<s<\tau_i<\tau_k<t\leqslant\tau_{k+1}<b$$

— ***элементы (блоки) матрицы Коши $\bar{K}(t,s)$ импульсной системы с запаздыванием (8),***

$$\bar{X}_i(t)=X(t)\prod_{\nu=k}^{i+1}X^{-1}(\tau_\nu)(E+B_\nu)X(\tau_i),$$

$K(t,s)\equiv 0$, *если* $s>t$.

В дальнейшем решение (10) с учетом определения матрицы $K(t,s)$

на промежутке $]\tau_k, \tau_{k+1}]$ будем записывать в виде

$$z(t) = \bar{X}(t)c + \int_a^b \bar{K}(t,s)f(s)ds + \sum_{i=1}^{k+1} \bar{X}_i(t)a_i. \tag{11}$$

4. Обобщенный оператор Грина. Найдем критерий существования и структуру общего решения линейной нётеровой импульсной краевой задачи

$$(\mathcal{L}z)(t) = f(t),\ t \neq \tau_i,\ \Delta z|_{t=\tau_i} = B_i z(\tau_i + 0) + a_i, \tag{12}$$

$$lz = \alpha,\ \tau_i,\ t \in [a, b]. \tag{13}$$

Как было показано выше, общее решение $z(t, c)$ системы (9) имеет вид (11).

Для того чтобы решение (11) импульсной системы (9) удовлетворяло краевым условиям (8), необходимо и достаточно, чтобы $lz(\cdot, c) = \alpha$, откуда для определения векторной константы $c \in R^n$ получаем алгебраическую систему

$$Qc = \alpha - l\int_a^b K(\cdot, s)f(s)ds - \prod_{i=1}^{p} lK_i(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{p} l\bar{X}_i(\cdot)a_i, \tag{14}$$

где $Q = l\bar{X}(\cdot)$ — $(m \times n)$-мерная постоянная матрица.

Пусть Q^+ — единственная псевдообратная к $Q(n \times m)$-мерная матрица [4]. Обозначим через P_Q $(n \times n)$-матрицу (ортопроектор $P_Q^2 = P_Q = P_Q^*$), проектирующую R^n на нуль-пространство $N(Q)$ матрицы $Q: P_Q: R^n \to N(Q)$; аналогично P_{Q^*} $(m \times m)$-матрица: $R^m \to N(Q^*)$. Далее обозначим через P_{Q_r} $(n \times r)$-матрицу, столбцы которой r — линейно независимые столбцы матрицы P_Q, $(r = n - \operatorname{rank} Q)$; $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-матрица, строки которой d линейно независимые строки матрицы P_{Q^*} $(d = m - \operatorname{rank} Q)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть линейная неоднородная краевая задача (12), (13) с импульсным воздействием удовлетворяет указанным выше условиям и* $\operatorname{rank} Q = n_1 \leqslant \min(n, m)$. *Тогда соответствующая (12), (13) однородная* $(f(t) = 0,\ a_i = 0,\ \alpha = 0)$ *краевая задача имеет* $r = n - n_1$ *и только* r *линейно независимых решений. Неоднородная краевая задача (12), (13) разрешима для тех и только тех* $f(t) \alpha L_p^n$, $a_i \in R^n$ *и* $\alpha \in R^m$, *которые удовлетворяет условию*

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{p} l\int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{p} l\bar{X}_i(\cdot)a_i\} = 0, \tag{15}$$

и при этом имеет r*-параметрическое семейство решений* $z(t, c_r)$ *на пространстве* $D_p^n \setminus \{\tau_i\}_I$ *кусочно абсолютно непрерывных вектор-функций, имеющих разрывы первого рода по* t *при* $t = \tau_i$

$$z(t, c_r) = \bar{X}_r(t)c_r + \left(G\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) + \bar{X}(t)Q^+\alpha,$$

где $\bar{X}_r(t) = \bar{X}_r(t)P_{Q_r}$ — $(n \times r)$*-фундаментальная матрица однородной импульсной краевой задачи (12), (13),* $\left(G\begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\right)(t)$ — *обобщенный оператор Грина полуоднородной импульсной краевой задачи (12), (13) имеющей вид*

$$\left(G\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_a^b K(t, s)f(s)ds - \bar{X}(t)Q^+ l\int_a^b K(\cdot, s)f(s) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \{ \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(t, s)f(s)ds - \bar{X}(t)Q^+ l \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s)f(s)ds\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\{\bar{X}_i(t)-\bar{X}(t)Q^{-1}l\bar{X}_i(\cdot)\}a_i+\bar{X}(t)Q^{+}\alpha.$$

Доказательство теоремы проводится по аналогии с [2].

В случае отсутствия импульсов теорема 2 переходит в известную ранее из [5].

В случае фредгольмовой краевой задачи ($m=n$) условие $\operatorname{rank} Q=n$ ($\det Q\neq 0$, $P_Q\equiv 0$, $P_{Q^*}=0$) эквивалентно известному некритическому случаю [1, 4, 6], который характеризуется тем, что соответствующая (12) однородная импульсная краевая задача не имеет решений, кроме тривиального. В этом случае существует матрица Q^{-1}, обратная матрице Q, и система (14) однозначно разрешима относительно $c\in R^n$, в результате чего неоднородная краевая задача (12), (13) при любых $f(t)\in L_p^n$, $\alpha\in R^n$ и $a_i\in R^n$ имеет единственное решение.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть краевая задача (12), (13) удовлетворяет указанным выше условиям и $m=n$. Если* $\operatorname{rank} Q=n$ ($\det Q\neq 0$), *то соответствующая (12), (13) однородная задача не имеет решений, кроме тривиального. Неоднородная краевая задача (12), (13) разрешима для любых $f(t)\in L_p^n$, $\alpha\in R^n$ и имеет решение вида*

$$z(t)=\bar{X}(t)c+\left(G\begin{bmatrix} f\\ a_j\end{bmatrix}\right)(t)+\bar{X}(t)Q^{-1}\alpha,$$

где $\bar{X}(t)$ — $(n\times n)$-фундаментальная матрица соответствующей однородной импульсной задачи (12), а $\left(G\begin{bmatrix} *\\ *\end{bmatrix}\right)(t)$ — оператор Грина импульсной некритической полуоднородной краевой задачи (12), (13), имеющий вид

$$\left(G\begin{bmatrix} f\\ a_j\end{bmatrix}\right)(t)\overset{\text{def}}{=}\int_a^b K(t,s)f(s)ds-\bar{X}(t)Q^{-1}l\int_a^b K(\cdot,s)f(s)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\{\int_a^{\tau_i}\bar{K}_i(t,s)f(s)ds-\bar{X}(t)Q^{-1}l\int_a^{\tau_i}\bar{K}_i(\cdot,s)f(s)ds\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\{\bar{X}_i(t)-\bar{X}(t)Q^{-1}l\bar{X}_i(\cdot)\}a_i+\bar{X}(t)Q^{-1}\alpha.$$

Пример. Рассмотрим задачу о регуляризации при помощи импульсного воздействия и начальной функции не всюду разрешимой краевой задачи (12), (13).

Пусть при некоторых $f_0(t)\in L_p^n$, $a_i^0\in R^n$ и $\alpha_0\in R^m$ краевая задача (12) неразрешима, т. е. условие (15) не выполняется. Введем в эту задачу в момент времени $t=\bar{\tau}_1$ импульсное воздействие

$$\Delta z|_{t=\bar{\tau}_1}=\bar{B}_1 z(\bar{\tau}_1+0)+\bar{a}_1,\quad \tau_i\neq\bar{\tau}_1\in[a,b], \tag{16}$$

такое, что существует $(E+\bar{B}_1)^{-1}$.

Величину $\bar{a}_1$ выбираем из критерия типа (15)

$$P_{Q_1^*}l\bar{X}_1^0(\cdot)\bar{a}_1=P_{Q_1^*}\{\alpha_0-l\int_a^b K^0(\cdot,s)f_0(s)ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{p}l\int_a^{\tau_i}\bar{K}_i^0(\cdot,s)f_0(s)ds-\sum_{i=1}^{p}l\bar{X}_i^0(\cdot)a_i^0\}$$

разрешимости полученной импульсной краевой задачи (12), (13), (16) так, чтобы она стала разрешимой при любых $f_0(t)\in L_p^n$, $a_i^0\in R^n$ и $\alpha_0\in R^m$; $K^0(t,s)$ — матрица Коши задачи (12), (16), $\bar{K}_i^0(t,s)$, $\bar{X}_i^0(t)$ —

элементы (блоки) матрицы Коши и фундаментальной матрицы соответственно импульсной системы с запаздыванием (12), (16).

Введем обозначения: $S = P_{Q_d^*} l\bar{X}_1^0(\cdot)$ — $(d \times n)$-мерная матрица; P_{S^*} — $(d \times d)$-мерная матрица (ортопроектор), проектирующая R^d на $N(S^*)$; P_S — $(n \times n)$-мерная матрица (ортопроектор), пректирующая R^n на $N(S)$. Тогда из теоремы 2 следует утверждение.

Следствие. *Не всюду разрешимую краевую задачу (12), (13) можно сделать всюду разрешимой при любых $f_0(t) \in L_p^n$, $a_i^0 \in R^n$ и $\alpha_0 \in R^m$, добавляя к ней еще одно импульсное воздействие (16) тогда и только тогда, когда $P_{S^*} P_{Q_d^*} = 0$. При этом величину добавочного (регуляризирующего импульса необходимо выбирать в виде*

$$\bar{a}_1 = S^+ P_{Q_d^*} \{ \alpha_0 - l \int_a^b K^0(\cdot, s) f_0(s) ds - \sum_{i=1}^{p} l \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i^0(\cdot, s) f_0(s) ds -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} l\bar{X}_i^0(\cdot) a_i^0 \} + P_S c \qquad \forall c \in R^n.$$

Заметим, что так как правая часть дифференциальной системы с запаздывающем аргументом задачи (12) зависит от начальной функции $f(t) = r(t) + \sum_{i=1}^{k} A_i(t) \Psi^{h_i}(t)$, то краевую задачу (12), (13) можно сделать всюду разрешимой при помощи соответствующего выбора начальной функции $\psi(\xi)$ из критерия разрешимости (15), который запишем в виде

$$P_{Q_d^*} \{ \alpha - l \int_a^b K(\cdot, s) r(s) ds - \sum_{i=1}^{p} l \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s) r(s) ds - \sum_{i=1}^{p} l\bar{X}_i(\cdot) a_i \} -$$

$$- P_{Q_d^*} \{ \sum_{j=1}^{k} l \int_{a_j}^{b_j} K(\cdot, s) A_j(s) \Psi^{h_j}(s) ds - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k} l \int_{a_j}^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s) A_j(s) \Psi^{h_j}(s) ds -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} l\bar{X}_i(\cdot) a_i \},$$

где $[a_i, b_i] = [a, b] \cap [\min_{t \in [a,b]} h_i(t), \max_{t \in [a,b]} h_i(t)]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомитета Украины по вопросам науки и технологии.

Литература

1. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.
2. Самойленко А. М., Бойчук А. А.// Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, № 3. С. 582—586.
3. Азбелов Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991.
4. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач. Киев, 1990.
5. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.// Докл. АН Украины. Сер. А. 1990. № 6. С. 3—6.
6. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., 1979.

Институт математики
АН Украины

Поступила в редакцию
20 апреля 1994 г.