Динамические системы, том 1(29), №2 (2011), 227–241

УДК 517.983

Слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений в критическом случае

В. Ф. Журавлев

Житомирский национальный агроэкологический университет,
Житомир 10008. *E-mail: vfz2008@ukr.net*

Аннотация. Рассмотрены слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений с нетеровым оператором в линейной части краевой задачи в критическом случае. Получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения, построена сходящаяся итерационная процедура для его построения.

Ключевые слова: слабонелинейная краевая задача, нетеров оператор, критический случай первого порядка.

1. Вступление

Решение слабонелинейных краевых задач существенным образом зависит от возможности построения решений соответствующей линейной (порождающей) краевой задачи и предполагает использование информации о линейном операторе исходного операторного уравнения. Оно основано на построении обобщенного оператора Грина порождающей линейной полуоднородной краевой задачи. Такие краевые задачи рассматривались для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в периодическом случае [5], для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и систем функционально-дифференциальных уравнений в общем нетеровом случае [1], [2], для импульсных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [12] и импульсных систем с запаздывающим аргументом [3].

Одной из отличительных особенностей этих задач является то, что исходные дифференциальные системы являются всюду разрешимыми [9]. Для не всюду разрешимых операторных уравнений подобные краевые задачи еще мало изучены. К таким задачам относятся, например, слабонелинейные краевые задачи для интегро-дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений и др., у которых исходное линейное операторное уравнение является нетеровым, то есть, не всюду разрешимым.

В данной статье ставятся следующие задачи. С использованием конструкций обобщенно-обратного оператора в банаховом пространстве найти критерии разрешимости и формулы для представления решений линейных краевых задач для нетеровых операторных уравнений, построить обобщенный оператор Грина для этих задач. Получить необходимые и достаточные условия разрешимости слабонелинейных краевых задач с нетеровым оператором в линейной части исходного операторного уравнения. Применяя методы типа Ляпунова-Шмидта [1], [2], [5], [7], [10], найти условия перехода от исходной краевой задачи к операторной системе, для решения которой применимы итерационные алгоритмы. Используя принцип неподвижной точки, построить сходящиеся итерационные алгоритмы для отыскания решений таких краевых задач.

2. Постановка задачи

Обозначим через $\mathbf{B}_1$ банахово пространство вектор-функций $z\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}^n$, определенных на конечном промежутке $\mathcal{I}$; $\mathbf{B}_2$ — банахово пространство вектор-функций $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}^{n_1}$; $\mathcal{I}_{\varepsilon_0} = [0, \varepsilon_0]$ — промежуток значений малого параметра ε; $\mathbf{C}_n[\varepsilon]$ — пространство непрерывных по ε функций $c\colon \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{R}^n$.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу с малым неотрицательным параметром ε, $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$

$$Lz(\cdot,\varepsilon)(t) = f(t) + \varepsilon Z(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{2.1}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2.2}$$

где

(a1) $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — нетеров оператор, ($\mu = \dim N(L) < \infty$, $\nu = \dim N(L^*) < \infty$, $\mu \neq \nu$);

(a2) $Z : \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{B}_2 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — нелинейный по z ограниченный оператор, который в окрестности порождающего решения $\|z - z_0\| \leq q$ имеет производную Фреше по z и непрерывен по ε, q — достаточно малая константа;

(a3) $Z(0,t,0) = 0,\ Z'_z(0,t,0) = 0$;

(a4) $f \in \mathbf{B}_2$; (2.3)

(a5) $\ell : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{R}^m$ — линейный ограниченный вектор-функционал;

(a6) $J : \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{R}^m \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — нелинейный по z ограниченный вектор-функционал, который в окрестности порождающего решения $||z - z_0|| \leq q$ имеет производную Фреше по z и непрерывный по ε;

(a7) $J(0,0) = 0,\ J'_z(0,0) = 0$;

(a8) $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Наряду с задачей (2.1), (2.2) рассмотрим линейную краевую задачу

$$Lz_0(t) = f(t), \tag{2.4}$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \tag{2.5}$$

которая получается из (2.1), (2.2) при $\varepsilon = 0$.

По аналогии с подобными задачами для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1], [2], [5]), краевую задачу (2.4), (2.5), которая получается из задачи (2.1), (2.2) при $\varepsilon = 0$, будем называть порождающей краевой задачей для задачи (2.1), (2.2). Решения задачи (2.4), (2.5) будем называть порождающими.

Рассмотрим задачу об условиях существования и построении решений $z(t,\varepsilon)$ краевой задачи (2.1), (2.2), принадлежащих пространству $\mathbf{B}_1$ по t, пространству $\mathbf{C}_n[\varepsilon]$ по ε и обращающихся при $\varepsilon = 0$ в порождающее решение краевой задачи (2.4), (2.5). В дальнейшем это пространство будем обозначать $\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]$.

3. Линейные краевые задачи

Сначала рассмотрим задачу об условиях разрешимости и представлении решений порождающей линейной краевой задачи (2.4), (2.5) с нетеровым оператором.

Обозначим через $\dim N(L) = \mu < \infty$ и $\dim N(L^*) = \nu < \infty$ — размерности нуль-пространств операторов L и ему сопряженного L^*, соответственно. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\mu} \subset N(L)$, $f_i = \mathrm{col}(f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, \dots, f_i^{(n)})$ — базис подпространства $N(L)$, а $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\nu} \subset N^*(L)$, $\varphi_s(\cdot) = \mathrm{col}(\varphi_s^{(1)}(\cdot), \varphi_s^{(2)}(\cdot), \dots, \varphi_s^{(n_1)}(\cdot))$ — базис подпространства $N^*(L) \subset \mathbf{B}_2^*$. Для элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\mu}$ и функционалов $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\nu}$ существуют сопряженно биортогональные система функционалов $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^{\mu} \subset \mathbf{B}_1^*$, $\gamma_j(\cdot) = \mathrm{col}(\gamma_j^{(1)}(\cdot), \gamma_j^{(2)}(\cdot), \dots, \gamma_j^{(n)}(\cdot))$ и полная система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\nu} \subset Y_L \subset \mathbf{B}_2$, $\psi_k = \mathrm{col}(\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \dots, \psi_k^{(n_1)})$. Подпространство $Y_L \subset \mathbf{B}_2$ изоморфно нуль-пространству $N(L^*)$ сопряженного оператора L^*.

Функционалы $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^{\mu}$ и $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\nu}$, определенные на подпространствах $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ и $Y_L \subset \mathbf{B}_2$ (по теореме Хана-Банаха), могут быть продолжены с сохранением норм на пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$, соответственно.

Обозначим

$$X = (f_1, \quad f_2, \quad \dots, \quad f_\mu),$$
$$\mathit{\Gamma}(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \dots, \gamma_\mu(\cdot))^T,$$
$$\mathit{\Phi}(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_\nu(\cdot))^T,$$
$$\mathit{\Psi} = (\psi_1, \quad \psi_2, \quad \dots, \quad \psi_\nu)$$

матрицы размерностей $(n\times\mu)$, $(\mu\times n)$, $(\nu\times n_1)$ и $(n_1\times\nu)$, соответственно. Отметим, что $\mathit{\Gamma}(X) = E_\mu$, $\mathit{\Phi}(\mathit{\Psi}) = E_\nu$ — единичные матрицы.

По аналогии с [6], операторы проектирования $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ и $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$ построим по формулам:

$$\mathcal{P}_{N(L)}(z) = X\mathit{\Gamma}(z), \quad \forall z \in \mathbf{B}_1, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{P}_{Y_L}(y) = \mathit{\Psi}\mathit{\Phi}(y), \quad \forall y \in \mathbf{B}_2. \tag{3.2}$$

Сначала рассмотрим условия существования и представление решений неоднородной задачи Коши

$$Lz(t) = f(t), \tag{3.3}$$

$$z(t_0) = z_0, \ t_0 \in \mathcal{I}. \tag{3.4}$$

Известно [2], [12], что операторное уравнение (2.4) с нетеровым оператором, вследствие его нормальной разрешимости, имеет решение для тех и только тех $f(t) \in \mathbf{B}_2$, которые удовлетворяют условию

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = \Psi(t)(\Phi f)(\cdot) = 0. \tag{3.5}$$

Условие (3.5), в силу линейной независимости столбцов матрицы $\Psi(t)$, эквивалентно условию

$$(\Phi f)(\cdot) = 0.$$

При выполнении условия (3.5) общее решение уравнения (2.4) представимо в виде:

$$z_0(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + (L^- f)(t), \tag{3.6}$$

где $\hat{z} = \hat{z}(t)$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{B}_1$, L^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор к нетеровому оператору L [2]. Используя представление (3.1) проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$, для каждого $z(t) \in N(L)$ получим

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) = X(t)(\Gamma\hat{z})(\cdot) = X(t)c, \tag{3.7}$$

где $c = \mathrm{col}(\gamma_1\hat{z}(\cdot), \gamma_2\hat{z}(\cdot), \ldots, \gamma_\mu\hat{z}(\cdot))$ — произвольный вектор-столбец констант, $c \in \mathbf{R}^\mu$.

С учетом (3.7) общее решение нетерового уравнения (2.4) примет вид:

$$z_0(t) = X(t)c + (L^- f)(t), \tag{3.8}$$

где $X(t)$ — $(\mu \times \mu)$-мерная фундаментальная матрица уравнения (2.4).

Обозначим через $X(t_0) : \mathbf{R}^\mu \to \mathbf{R}^n$– $(n \times \mu)$-мерную постоянную матрицу, $t_0 \in \mathcal{I}$, $P_{N(X(t_0))} : \mathbf{R}^\mu \to N(X(t_0))$ — $(\mu \times \mu)$-мерную матрицу-ортопроектор, $P_{N(X^*(t_0))} : \mathbf{R}^n \to N(X^*(t_0))$ — $(n\times n)$-мерную матрицу-ортопроектор, $X^+(t_0)$ — $(\mu\times n)$-мерную матрицу, псевдообратную к матрице $X(t_0)$ [1], [2], [11].

Из (3.7) имеем что любой элемент $z(t)$ из нуль-пространства $N(L)$ представим в виде

$$z(t) = X(t)c.$$

Это соотношение справедливо для любого $t \in \mathcal{I}$, в том числе и для $t = t_0$. Следовательно, для любого $z_0 = z_0(t_0)$ существует элемент $c \in \mathbf{R}^\mu$ такой, что выполняется равенство

$$z_0 = z_0(t_0) = X(t_0)c.$$

Существование для любого $z_0 = z_0(t_0)$ элемента $c \in \mathbf{R}^\mu$ означает, что уравнение

$$X(t_0)c = z_0$$

разрешимо при любой правой части $z_0 \in \mathbf{R}^n$. Это значит, что $\mathrm{rank}\, X(t_0) = n$, нуль-пространство $N(X^*(t_0)) = \{0\}$ и, как следствие, ортопроектор на нуль-пространство $N(X^*(t_0)) \subset \mathbf{R}^n$ равен нулю, $P_{N(X^*(t_0))} \equiv 0, \forall t_0 \in \mathcal{I}$.

При $t = t_0$, из (3.8) получим алгебраическое уравнение

$$X(t_0)c = z_0 - (L^- f)(t_0),$$

которое, с учетом $P_{N(X^*(t_0))} \equiv 0$, всюду разрешимо и имеет общее решение

$$c = P_{N(X(t_0))}c_\mu + X^+(t_0)[z_0 - (L^- f)(t_0)], \tag{3.9}$$

где $c_\mu \in \mathbf{R}^\mu$ — произвольный вектор-столбец констант.

Подставив найденное c из (3.9) в равенство (3.8), получим общее решение задачи Коши (3.3), (3.4)

$$\begin{aligned} z(t) = X(t)\{P_{N(X(t_0))}c_\mu + X^+(t_0)[z_0 - (L^- f)(t_0)]\} + (L^- f)(t) = \\ = X_0(t)c_\mu + X(t)X^+(t_0)z_0 + (G_0 f)(t), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $X_0(t) = X(t)P_{N(X(t_0))}$, $(G_0 f)(t) = (L^- f)(t) - X(t)X^+(t_0)L^- f)(t_0)$ — линейный ограниченный оператор, который будем называть оператором Грина полуоднородной ($z_0 = 0$) задачи Коши (3.3), (3.4).

Таким образом, для задачи Коши (3.3), (3.4) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — нетеров оператор. Задача Коши (3.3), (3.4) разрешима для любых $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in \mathcal{I}$ и тех и только тех $f(t) \in \mathbf{B}_2$, которые удовлетворяют условию (3.5), и ее общее решение представимо в виде*

$$z(t) = X_0(t)c_\mu + X(t)X^+(t_0)z_0 + (G_0 f)(t).$$

Замечание 1. Если операторное уравнение (3.3) всюду разрешимо, то $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$ и условие (3.5) будет всегда выполнено. В этом случае оператор L будет иметь ограниченный правый обратный оператор L_r^{-1} [6], а обобщенный оператор Грина будет иметь вид:

$$(G_0 f)(t) = (L_r^{-1} f)(t) - X(t)X^+(t_0)L_r^{-1})(t_0).$$

Далее рассмотрим условия разрешимости и представление решений линейной порождающей краевой задачи (2.4), (2.5).

Обозначим через $Q = \ell X(\cdot)$ $(m \times \mu)$-мерную постоянную матрицу, $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^\mu \to N(Q)$ — $(\mu \times \mu)$-мерную матрицу-ортопроектор; $P_{N(Q^*)} : \mathbf{R}^m \to N(Q^*)$ — $(m \times m)$-мерную матрицу-ортопроектор; $P_{N_\rho(Q)}$ — $(\mu \times \rho)$-мерную матрицу, составленную из полной системы $\rho = \mu - \operatorname{rank} \mathrm{Q}$ линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{N(Q)}$, $P_{N_d(Q^*)}$ — $(d \times m)$-мерную матрицу, составленную из полной системы $d = m - \operatorname{rank} \mathrm{Q}$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора $P_{N(Q^*)}$, Q^+ — псевдообратную к матрице Q $(\mu \times m)$-мерную матрицу, которую можно построить по формулам $Q^+ = (Q^*Q + P_{N(Q)})^{-1}Q^* = Q^*(QQ^* + P_{N(Q^*)})^{-1}$ [11].

Для порождающей краевой задачи (2.4), (2.5) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *— нетеров оператор. Тогда, если* $\operatorname{rank} Q \leq \min(m, \mu)$*, то соответствующая (2.4), (2.5) однородная* $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *краевая задача имеет* ρ *и только* ρ *линейно независимых решений*

$$z(t) = X_\rho(t) c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho,$$

где $X_\rho(t) = X(t) P_{N_\rho(Q)}$ *—* $(n \times \rho)$*-мерная фундаментальная матрица однородной краевой задачи.*

Неоднородная краевая задача (2.4), (2.5) разрешима для тех и только тех $f(t) \in \mathbf{B}_2$ *и* $\alpha \in \mathbf{R}^m$*, которые удовлетворяют* $\nu + d$ *линейно независимым условиям*

$$\begin{cases} (\Phi f)(\cdot) = 0, \\ P_{N_d(Q^*)}\{\alpha - \ell L^- f)(\cdot)\} = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

и при этом имеет ρ*-параметрическое семейство линейно независимых решений*

$$z(t, c_\rho) = X_\rho(t) c_\rho + (Gf)(t) + X(t) Q^+ \alpha, \tag{3.12}$$

где $G : \mathbf{B}_2 \to \ker \ell \subset \mathbf{B}_1$,

$$(Gf)(t) = (L^- f)(t) - X(t) Q^+ \ell (L^- f)(\cdot) \tag{3.13}$$

– обобщенный оператор Грина полуоднородной $(\alpha = 0)$ *краевой задачи (2.4), (2.5).*

Доказательство. Подставив (3.8) в (2.5), получим алгебраическую систему

$$Qc + \ell(L^- f)(\cdot) = \alpha,$$

которая разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие [2, с. 92]

$$P_{N_d(Q^*)}\{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)\} = 0,$$

при выполнении которого она имеет ρ-параметрическое семейство решений

$$c = P_{N_\rho(Q)} c_\rho + Q^+ \{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)\}. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.8), получим общее решение краевой задачи (2.4), (2.5)

$$z_0(t) = z(t, c_\rho) = X(t)\{P_{N_\rho(Q)} c_\rho + Q^+[\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)]\} + (L^- f)(t) =$$

$$= X_\rho(t) c_\rho + (L^- f)(t) - X(t) Q^+ \ell (L^- f)(\cdot) + X(t) Q^+ \alpha =$$
$$= X_\rho(t) c_\rho + (Gf)(t) + X(t) Q^+ \alpha.$$

□

В качестве следствий из доказанной теоремы, рассмотрим два «крайних» случая, когда $\operatorname{rank} Q = \mu$ и $\operatorname{rank} Q = m$.

Следствие 1. *Если* rank $Q = \mu$, *то* $\mu \leq m$. *В этом случае однородная краевая задача (2.4), (2.5) не имеет решений, кроме тривиального.*

Неоднородная краевая задача (2.4), (2.5) с нетеровым оператором $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *разрешима для тех и только тех* $f(t) \in \mathbf{B}_2$ *и* $\alpha \in \mathbf{R}^m$, *которые удовлетворяют* $\nu + d$, $(d = m - \mu)$ *линейно-независимым условиям*

$$\begin{cases} (\varPhi f)(\cdot) = 0, \\ P_{N_d(Q^*)}\{\alpha - \ell L^- f)(\cdot)\} = 0 \end{cases}$$

и при этом имеет единственное решение

$$z(t) = (Gf)(t) + X(t)Q^+\alpha.$$

Доказательство. Если rank $Q = \mu$, то $P_{N(Q)} \equiv 0$ и $X_\rho(t) = 0$. В этом случае псевдообратная матрица Q^+ находится по формуле $Q^+ = (Q^*Q)^{-1}Q^*$. □

Следствие 2. *Если* rank $Q = m$, *то* $m \leq \mu$. *В этом случае однородная краевая задача (2.4), (2.5) имеет* ρ *и только* ρ *линейно независимых решений*

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho, \ \rho = \mu - m.$$

Неоднородная краевая задача (2.4), (2.5) с нетеровым оператором $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *разрешима для тех и только тех* $f(t) \in \mathbf{B}_2$, *которые удовлетворяют* ν *линейно независимым условиям*

$$(\varPhi f)(\cdot) = 0$$

и при этом имеет ρ*-параметрическое семейство линейно независимых решений*

$$z(t, c_\rho) = X_\rho(t)c_\rho + (Gf)(t) + X(t)Q^+\alpha.$$

Доказательство. Если rank $Q = m$, то $P_{N(Q^*)} = 0$ и второе условие в (3.11) будет всегда выполнено. В этом случае псевдообратная матрица Q^+ находится по формуле $Q^+ = Q^*(QQ^*)^{-1}$. □

Замечание 2. Если операторное уравнение (2.4) является всюду разрешимым, то краевая задача (2.4), (2.5) будет нетеровой. Такие задачи подробно рассмотрены в случаях, когда $(Lz)(t) = \dot{z}(t) - A(t)z(t)$ — обыкновенный дифференциальный оператор [1], [12], дифференциальный оператор с сосредоточенным запаздыванием $(Lz)(t) = \dot{z}(t) - A(t)(S_h)z(t)$ [2], [3]. В этих случаях правый обратный оператор L_r^{-1} имеет интегральное представление [8]

$$(L_r^{-1} f)(t) = \int_a^b K(t, s)g(s)ds,$$

где $K(t, s)$ — матрица Коши.

Обобщенный оператор Грина имеет вид:

$$(Gf)(t) = \int_a^b K(t, s)f(s)ds - X(t)Q^+\ell \int_a^b K(\cdot, s)f(s)ds.$$

Замечание 3. Если функционал ℓ удовлетворяет условию

$$\ell \int_a^b K(\cdot, s) f(s) ds = \int_a^b \ell K(\cdot, s) f(s)\, ds,$$

то обобщенный оператор Грина имеет представление

$$(Gf)(t) = \int_a^b G(t, s) f(s)\, ds,$$

ядро которого $G(t, s) = K(t, s) - X(t) Q^+ \ell K(\cdot, s)$ называется обобщенной матрицей Грина.

4. Слабонелинейные краевые задачи. Критический случай первого порядка

Рассмотрим краевую задачу (2.1), (2.2) в случае, когда порождающая краевая задача (2.4), (2.5) неоднозначно разрешима. Такой случай для аналогичных задач для всюду разрешимых обыкновенных дифференциальных систем назван [1] критическим случаем первого порядка.

Будем искать условие существования и алгоритм построения решений $z(t,\varepsilon) \in \mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]$ краевой задачи (2.1), (2.2), обращающихся при $\varepsilon = 0$ в одно из порождающих решений уравнения краевой задачи (2.4), (2.5). Из теоремы 2 следует, что порождающая краевая задача (2.4), (2.5) имеет решение тогда и только тогда, когда $f(t) \in \mathbf{B}_2$ и $\alpha \in \mathbf{R}^m$ удовлетворяют условиям (3.11), при выполнении которых она имеет семейство решений (3.12) $z(t, c_\rho) = z_0(t, c_\rho)$.

4.1. Необходимое условие существования решений

Предположим, что $f(t) \in \mathbf{B}_2$ и $\alpha \in \mathbf{R}^m$ таковы, что условия (3.11) выполнены. Покажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть краевая задача (2.1), (2.2) удовлетворяет условиям (2.3) и имеет решение $z(t,\varepsilon)$, непрерывное по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в некоторое порождающее решение $z_0(t, c_\rho)$ вида (3.12), полученное при $c_\rho = c_0$. Тогда элемент $c_0 \in \mathbf{R}^\rho$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{cases} \Phi Z(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon) = 0, \\ P_{N_d(Q^*)}\{J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) - \ell L^- Z(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда при всех $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ справедливы тождества

$$Lz(\cdot,\varepsilon)(t) \equiv f(t) + \varepsilon Z(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon),$$

$$(\ell z)(\cdot) \equiv \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), \varepsilon).$$

Используя теорему 1 и учитывая справедливость условий (3.11), для этой краевой задачи получим, что при всех $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon \neq 0$ нелинейные оператор $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ удовлетворяют условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} \varPhi Z(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) = 0, \\ P_{N_d(Q^*)}\{J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^- Z(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} = 0. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Тогда, поскольку нелинейные оператор $Z(z,t,\varepsilon)$ и функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (a2), (a3) и (a5), (a6) из (2.3) в окрестности ($\varepsilon = 0$) решения $z_0(t,c_0)$, то, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $z(t,\varepsilon) \to z_0(t,c_0)$, получим систему равенств

$$F(c_0) = \left[\begin{array}{l} \varPhi Z(z(\cdot,c_0),\cdot,0)(\cdot) \\ P_{N_d(Q^*)}\{J(z(\cdot,c_0),0) - \ell L^- Z(z(\cdot,c_0),\cdot,0)(\cdot)\} \end{array} \right] = 0, \tag{4.2}$$

которые доказывают теорему. □

Если система (4.2) имеет некоторое решение $c_0 = c_0^\sharp \in \mathbf{R}^\rho$, то константа $c_0^\sharp$ определяет то порождающее решение $z_0(t,c_0^\sharp)$, которому может отвечать решение $z(t,\varepsilon)$ исходной системы (2.1), (2.2), обращающееся в $z_0(t,c_0^\sharp)$ при $\varepsilon = 0$.

Система операторных уравнений (4.2) аналогична известному в теории периодических нелинейных колебаний [1], [2] уравнению для порождающих амплитуд. Поэтому, в дальнейшем, будем ее называть системой уравнений для порождающих констант краевой задачи (2.1), (2.2).

Если система уравнений (4.2) не имеет решений, то краевая задача (2.1), (2.2) не обладает искомым решением. Таким образом, необходимое условие (4.2) неоднозначно разрешимой краевой задачи может быть удовлетворено выбором элемента $c_0^\sharp = c_\rho$ в семействе порождающих решений (3.12).

4.2. Достаточное условие существования решений

Найдем достаточные условия существования решения краевой задачи (2.1), (2.2). Выполняя в задаче (2.1), (2.2) замену переменных

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^\sharp) + x(t,\varepsilon),$$

в которой константа $c_0^\sharp \in \mathbf{R}^\rho$ удовлетворяет системе уравнений для порождающих констант (4.2), приходим к следующей задаче: найти условия существования и алгоритм построения решения $x(t,\varepsilon) \in \mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]$, обращающегося в нуль при $\varepsilon = 0$ краевой задачи

$$\begin{gathered} Lx(\cdot,\varepsilon)(t) = \varepsilon Z(z_0(t,c_0^\sharp) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \\ \ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Используя свойства (2.3) нелинейных оператора $Z(z,t,\varepsilon)$ и функционала $J(z,\varepsilon)$, выделим у них линейные части по x и члены нулевого порядка по ε. В результате получим разложения:

$$\begin{gathered} Z(z_0(t,c_0^\sharp)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=Z_0(t,c_0^\sharp)+L_0x(\cdot,\varepsilon)(t)+R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \\ J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=J_0(\cdot,c_0^\sharp)+\ell_0x(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $Z_0(t,c_0^\sharp)=Z(z_0(t,c_0^\sharp),t,0):\ \mathbf{B}_1\times\mathcal{I}\to\mathbf{B}_2$;

$J_0(\cdot,c_0^\sharp)=J_0(z_0(\cdot,c_0^\sharp,0):\ \mathbf{B}_1\times\mathcal{I}\to\mathbf{R}^m$;

$L_0:\mathbf{B}_1\times\mathcal{I}_{\varepsilon_0}\to\mathbf{B}_2\times\mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — линейный ограниченный оператор, представляющий собой производную Фреше нелинейного оператора $Z(z,t,\varepsilon)$ по z при $z=z_0(t,c_0^\sharp)$;

$\ell_0:\mathbf{B}_1\times\mathcal{I}_{\varepsilon_0}\to\mathbf{R}^m\times\mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — линейный ограниченный вектор-функционал, представляющий собой производную Фреше от нелинейного функционала $J(z,\varepsilon)$ по z при $z=z_0(t,c_0^\sharp)$;

$R:\mathbf{B}_1\times\mathcal{I}\times\mathcal{I}_{\varepsilon_0}\to\mathbf{B}_2\times\mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — нелинейный оператор, удовлетворяющий условиям (a2) и (a3) из (2.3);

$\ell_1:\mathbf{B}_1\times\mathcal{I}\times\mathcal{I}_{\varepsilon_0}\to\mathbf{R}^m\times\mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — нелинейный вектор-функционал, удовлетворяющий условиям (a6) и (a7) из (2.3).

Рассматривая нелинейности в краевой задаче (4.3) как неоднородности и применяя к ней теорему 1, получим для ее решения $x(t,\varepsilon)$ следующее представление

$$x(t,\varepsilon)=X_\rho(t)c(\varepsilon)+x^{(1)}(t,\varepsilon),\ \ c(\varepsilon)\in\mathbf{C}_\rho[\varepsilon],$$

где неизвестный вектор $c(\varepsilon)$ определяется из условий разрешимости типа (4.1)

$$\left\{\begin{array}{r} \Phi\{Z_0(\cdot,c_0^\sharp)+ \\ P_{N_d(Q^*)}\{J_0(\cdot,c_0^\sharp)+\ell_0x(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} +L_0x(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)=0, \\ -\ell L^-[Z_0(\cdot,c_0^\sharp)+L_0x(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]=0. \end{array}$$

Здесь $\mathbf{C}_\rho[\varepsilon]$ — пространство непрерывных по ε функций со значениями в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^\rho$, $c(\cdot):\mathcal{I}_{\varepsilon_0}\to\mathbf{R}^\rho$.

Неизвестная вектор-функция $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ определяется по формуле

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon[(GZ(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t)+X(t)Q^+J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)],$$

где G — обобщенный оператор Грина (3.13).

Используя разложения (4.4) и тот факт, что векторная константа $c_0^\sharp$ необходимо удовлетворяет системе уравнений для порождающих констант (4.2), для нахождения решения $x(t,\varepsilon)\in\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]$ слабонелинейной краевой задачи (2.1), (2.2) приходим к эквивалентной операторной системе

$$x(t,\varepsilon)=X_\rho(t)c(\varepsilon)+x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$\mathcal{B}_0c(\varepsilon)=-\left[\begin{array}{r} \Phi\{L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ P_{N_d(Q^*)}\{\ell_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \end{array}\right.$$

$$\begin{matrix} +R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ -\ell L^{-}[L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{matrix} \Bigg],$$

$$\tag{4.5}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^{\sharp})+L_0[X_\rho(\cdot)c(\varepsilon)+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)+$$
$$+X(t)Q^{+}\{J(z_0(\cdot,c_0^{\sharp})+\ell_0[X_\rho(\cdot)c(\varepsilon)+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}],$$

где

$$\mathcal{B}_0=\begin{bmatrix} \Phi L_0 \\ P_{N_d(Q^*)}[\ell_0+\ell L^{-}L_0]\} \end{bmatrix} X_\rho(\cdot)$$

– $((\nu+d)\times\rho)$-мерная постоянная матрица.

Обозначим через $P_{N(\mathcal{B}_0)}:\mathbf{R}^\rho\to N(\mathcal{B}_0)$ и $P_{N(\mathcal{B}_0^*)}:\mathbf{R}^{\nu+d}\to Y_{\mathcal{B}_0}$ матрицы-ортопроекторы, а через $\mathcal{B}_0^{+}$ — $(\rho\times(\nu+d))$-мерную псевдообратную матрицу к матрице $\mathcal{B}_0$.

4.3. Построение единственного решения

Предположим, что $\dim\ker\mathcal{B}_0=0$, т.е. $P_{N(\mathcal{B}_0)}=0$. Тогда второе уравнение операторной системы (4.5) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие [2]

$$P_{N(\mathcal{B}_0^*)}\begin{bmatrix} \Phi\{L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ P_{N_d(Q^*)}\{\ell_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell L^{-}[L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{bmatrix}=0, \tag{4.6}$$

при выполнении которого оно будет однозначно разрешимо

$$c(\varepsilon)=-\mathcal{B}_0^{+}\begin{bmatrix} \Phi\{L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ P_{N_d(Q^*)}\{\ell_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell L^{-}[L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{bmatrix}.$$

Пусть $P_{N(\mathcal{B}_0^*)}\begin{bmatrix} \Phi \\ P_{N_d(Q^*)} \end{bmatrix}=0$. Тогда условие (4.6) всегда выполняется и при $P_{N(\mathcal{B}_0)}=0$ операторная система (4.5) примет вид:

$$x(t,\varepsilon)=X_\rho(t)c(\varepsilon)+x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c(\varepsilon)=-\mathcal{B}_0^{+}\Bigg[\begin{matrix} \Phi\{L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ P_{N_d(Q^*)}\{\ell_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \end{matrix}$$

$$\tag{4.7}$$

$$\begin{matrix} +R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ -\ell L^{-}[L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{matrix} \Bigg],$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^{\sharp})+L_0[X_\rho(\cdot)c(\varepsilon)+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)+$$
$$+\varepsilon X(t)Q^{+}\{J(z_0(\cdot,c_0^{\sharp})+\ell_0[X_\rho(\cdot)c(\varepsilon)+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}].$$

Используя [1], [2], [4], [5], приведем операторную систему (4.7) к системе, для решения которой применим метод простых итераций.

Введем следующие обозначения:

$y(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x(t,\varepsilon), c(\varepsilon), x^{(1)}(t,\varepsilon))$– вектор-столбец из банахова пространства $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon] \times \mathbf{C}_\rho[\varepsilon] \times \mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]$;

$$(\mathcal{W}_1\varphi(\cdot,\varepsilon)(t) = -\mathcal{B}_0^+ \begin{bmatrix} \Phi L_0 \\ P_{N_d(Q^*)}[\ell_0 - \ell L^- L_0] \end{bmatrix} \varphi(\cdot,\varepsilon)$$

– ограниченный оператор;

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 & X_\rho(t) & I_{\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]} \\ 0 & 0 & \mathcal{W}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

— клеточно-матричный оператор верхнетреугольного вида, где $I_{\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]}$ — тождественный оператор в пространстве $\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]$;

$$\mathcal{U}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathcal{B}_0^+ \begin{bmatrix} \Phi R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) \\ P_{N_d(Q^*)}\{\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^- R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \end{bmatrix} \\ \varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + L_0[X_\rho(\cdot)c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))\})(t)+ \\ +X(t)Q^+\{J(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + \ell_0[X_\rho(\cdot)c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}] \end{bmatrix} -$$

векторная операторная функция, которая удовлетворяет условиям (a2), (a3) из (2.3).

Операторы, которые входят в клеточно-матричный оператор (4.8), линейные ограниченные по определению и как суперпозиции линейных ограниченных операторов.

Используя введенные обозначения, операторную систему (4.7) можно представить в виде

$$y(t,\varepsilon) = (\mathcal{W}y(\cdot,\varepsilon))(t) + (\mathcal{U}(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t). \tag{4.9}$$

В силу структуры клеточно-матричного оператора $\mathcal{W}$ верхнетреугольного вида с нулевыми клетками на главной диагонали и ниже операторная система (4.9) преобразуется в систему

$$\mathcal{V}y(t,\varepsilon) = \mathcal{U}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{V} = I_{\mathbf{B}} - \mathcal{W} = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]} & -X_\rho(t) & -I_{\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]} \\ 0 & I_{\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]} & -\mathcal{W}_1 \\ 0 & 0 & I_{\mathbf{B}_1\mathbf{C}_n[\varepsilon]} \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{V}$ — верхнетреугольный клеточный, с тождественными операторами на главной диагонали. По аналогии с [4] можно показать, что оператор $\mathcal{V}$ имеет ограниченный обратный. Поскольку оператор $\mathcal{W}$ — нелинейный и зависит от ε, а оператор $\mathcal{V}^{-1}$ ограничен, то за счет выбора значений параметра ε можно добиться того, чтобы суперпозиция операторов $\mathcal{V}^{-1}\mathcal{W}$ была сжимающим оператором. Из принципа сжимающих отображений следует, что система (4.7) имеет единственное решение.

Используя метод простых итераций для нахождения решений краевой задачи (2.1), (2.2) в классе вектор-функций непрерывных по ε, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$, получаем следующий итерационный процесс.

Приближения $x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)$ к $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ будем искать как частные решения краевых задач

$$\begin{gathered} Lx_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)(t) = \varepsilon\{Z_0(t,c_0^\sharp) + (L_0[X_\rho(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])(t) + R(x_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}, \\ \ell x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{J_0(\cdot,c_0^\sharp) + \ell_0[X_\rho(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

По теореме 1 с учетом разложений (4.4) решение задачи (4.10) представимо в виде

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + L_0[X_\rho(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + \\ + X(t)Q^+\{J(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + \ell_0[X_\rho(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}]. \end{aligned}$$

Из необходимого и достаточного условия разрешимости краевой задачи (4.10), с учетом выбора $c_0^\sharp \in \mathbf{R}_\rho$ из системы уравнений для порождающих констант (4.2), приходим к уравнению

$$\mathcal{B}_0 c_k(\varepsilon) = -\begin{bmatrix} \Phi\{L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ P_{N_d(Q^*)}\{\ell_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^-[L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)] \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

из которого находится k-е приближение $c_k(\varepsilon)$ к $c(\varepsilon)$. Разрешимость систем (4.11) для каждого k обеспечивается выполнением условия

$$P_{N(\mathcal{B}_0^*)}\begin{bmatrix} \Phi \\ P_{N_d(Q^*)} \end{bmatrix} = 0,$$

а единственность — условием $P_{N(\mathcal{B}_0)} = 0$.

Тогда $(k+1)$-е приближение $x_{k+1}(t,\varepsilon)$ к $x(t,\varepsilon)$ запишется в виде:

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_\rho(t)c_k(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $x_0(t,\varepsilon) = x_0^{(1)}(t,\varepsilon) = 0$, $x_1(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$

Таким образом, для краевой задачи (2.1), (2.2) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть краевая задача (2.1), (2.2) удовлетворяет условиям (2.3), а соответствующая порождающая краевая задача (2.4), (2.5) при выполнении условия (3.11) имеет семейство порождающих решений (3.12). Тогда для каждого элемента* $c_0 = c_0^\sharp \in \mathbf{R}^\rho$*, удовлетворяющего системе уравнений для порождающих констант (4.2), при выполнении условий*

$$P_{N(\mathcal{B}_0)} = 0, \quad P_{N(\mathcal{B}_0^*)} \begin{bmatrix} \Phi \\ P_{N_d(Q^*)} \end{bmatrix} = 0$$

краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение $z(t,\varepsilon)$ *непрерывное по* ε*, обращающееся в порождающее решение* $z(t, c_0^\sharp)$ *при* $\varepsilon = 0$*. Это решение можно найти с помощью сходящегося на* $[0, \varepsilon_*] \subset \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ *итерационного процесса*

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t, c_0^\sharp) + x_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_\rho(t) c_k(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c_k(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+ \begin{bmatrix} \Phi\{L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ P_{N_d(Q^*)}\{\ell_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^-[L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{bmatrix},$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot, c_0^\sharp) + L_0[X_\rho(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+$$

$$+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t) + X_\rho(t)Q^+\{J(z_0(\cdot, c_0^\sharp)+$$

$$+\ell_0[X_\rho(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}],$$

$$x_0(t,\varepsilon) = x_0^{(1)}(t,\varepsilon) = 0, \quad x_1(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Замечание 4. Подобные краевые задачи для всюду разрешимых систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрены в [1], [2], а для дифференциальных систем с сосредоточенным запаздыванием в [2], [3].

Список цитируемых источников

1. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. — 320 с.
3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1994. — **30**, № 10. — С. 1677 – 1682.
4. *Бойчук О. А., Панасенко Є. В.* Слабконелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь у критичному випадку у банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 4. — С. 483 – 496.
5. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

6. *Журавлев В. Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных $n-$ $(d-)$ нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве //УМЖ. — 2010. — Т. 62, №2. — С. 167 – 182.
7. *Канторович Л. В.* Некоторые дальнейшие приложения принципа мажорант Ляпунова // Докл. АН СССР. — 1951. — *80*, *№* 6. — С. 848 – 851.
8. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 548 с.
9. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 2071. — 104 с.
10. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
11. *Турбин А. Ф.* Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной мтрицы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1974. — Т. 14, № 3. — С. 772 – 776.
12. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.

Получена 10.12.2011