

Житомирський національний агроєкологічний університет

### **АНАЛІЗ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ АПК МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ (НА ПРИКЛАДІ ДОЇЛЬНИХ УСТАНОВОК)**

*Виконане дослідження є застосування математики в питаннях створення та удосконалення технологічної системи. Особливістю механізованих технологічних процесів є їх стохастичність, описування та розрахунок, а отже і використання найчастіше методів теорії ймовірностей. Невелика частина процесів у АПК з достатньою точністю описують детермінованими математичними залежностями. Авторами використано об'єкт агропромислового виробництва, зокрема процес машинного доїння корів, який є ймовірнісним, та застосована для його моделювання і розрахунків теорія масового обслуговування. Результатами є дослідження роботи системи масового обслуговування – доїльних установок вітчизняного виробництва, використання математики для оптимізації технологічних систем агропромислового виробництва.*

**Ключові слова:** математична модель, ймовірність, оптимізаційна задача, цільність потоку, доїльна установка.

### **Постановка проблеми**

Молочне тваринництво є складною та провідною галуззю тваринництва, яке задовольняє потребу населення в молоці, відповідно до фізіологічних вимог, а харчову промисловість – необхідною сировиною.

Молочне тваринництво нашої країни знаходиться в глибокій кризі. Так, порівняно з 1990 роком загальне поголів'я корів скоротилося більш ніж у три рази, з 8,38 млн гол. до 2,36 млн гол. (станом на 01.01.15). Якщо 76 % від всього обсягу молока вироблялося молочнотоварними фермами сільськогосподарських підприємств місткістю 600...1000 корів, то нині 76,3 % незбираного молока виробляється підсобними господарствами населення, які утримують по 2–3 корови на двір [1]. При цьому, 64% сільськогосподарських підприємств з виробництва решти 23,7 % молока, володіють тваринницькими фермами промислового типу на 50...100 корів. Виникає потреба в адаптації таких змін до умов сучасних організаційних форм виробництва продукції тваринництва в цілому та молока зокрема. Аналіз існуючих методів вирішення даної проблеми [2,3,4] вказує на доцільність використання теорії масового обслуговування, тому що доільна установка є системою масового обслуговування, з характерними для неї стохастичними ознаками.

Інтеграція, в процесі підготовки інженера ВНЗ, фундаментальних математичних дисциплін зі спеціальними та професійно орієнтованими, дає можливість майбутньому фахівцю перекласти технічне завдання на мову математики, тобто створити математичну модель. За допомогою моделі інженер описує явища, процеси, завдяки чому має можливість оптимізувати досліджуваній об'єкт і впроваджувати результати дослідження у виробництво.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Важливим у діяльності інженера є застосування методів спеціальних дисциплін, які базуються на положеннях фундаментальної математики [2,4, 5, 8, 9]. Аналіз явищ та процесів [6] дає можливість інженерові об'єктивно визначитися з факторами та узагальненими змінними і цільовими функціями [5, 9]. Метод аналогії для фізично однорідних та неоднорідних порівнювальних явищ і процесів найшов своє відображення в теорії подібності та розмірностей [8], яка є інструментом кількісного дослідження.

Це дозволяє множинні зв'язки замінити їх сукупністю впливу на процес, що вивчається. Дозволяє встановити зв'язок між окремими групами величин, замінивши їх комплексами з ясным фізичним змістом. Це дозволяє зменшити кількість факторів, замінивши частину з них узагальненими змінними.

Створенню технологічної системи передують етап оптимізації. Математика дозволяє оптимізувати параметри системи [5, 7], вибрати краще рішення в умовах багатокритеріальності та невизначеності задачі [10]. Проілюструємо

використання математики як інструмента проектування технологічної системи оператор – доїльна установка – корова/оточуюче середовище.

### **Мета, завдання та методика досліджень**

Таким чином об'єктом вивчення є вищезазначена технологічна система, якій притаманні всі ознаки системи масового обслуговування.

Метою досліджень є вивчення змінних у часі стохастичних процесів різнотипних доїльних установок.

Завданням досліджень є встановлення закономірності впливу обмежуючих умов технології машинного доїння корів на реалізацію умови потоковості.

Методика досліджень базується на використанні методів математичного моделювання з використанням системи масового обслуговування (СМО).

При вирішенні задачі оптимізації визначаємо границі досліджуваної нами технологічної системи, якою є оператори машинного доїння, доїльні установки (лінійні та високопродуктивні майданчики вітчизняного виробництва), високопродуктивне стадо з надоєм більше 5000 кг на рік та середовище доїльного цеху.

Другою складовою оптимізаційної задачі є вибір та обґрунтування кількісного критерію. Для повної оцінки нами вибрано 11 критеріїв. Після цього аналізуємо варіанти СМО для вибору внутрішньосистемних змінних, які визначають взаємозв'язки моделі. Зокрема незалежні змінні, вибір яких визначається їх діапазоном, з оцінкою змінних і постійних, в основному тих змінних, які впливають на функціонування СМО. Окрім того, визначаємо рівень деталізації. Нарешті, отримаємо модель системи.

### **Результати досліджень**

Ефективність доїльної установки, її продуктивність та затрати праці на реалізацію процесу машинного доїння визначається наявною структурою та конструктивно-технологічними параметрами. Складність оцінки доїльної установки як технологічної системи полягає в тому, що її функціонування має стохастичну природу, а це, в свою чергу, викликає деякі труднощі. Тому, доїльну установку описуємо моделлю СМО з подальшою оптимізацією її параметрів та структури.

Подамо доїльну установку як багатоканальну замкнуту СМО з обмеженою чергою:

$$\begin{aligned} n &> 1, \\ 1 &< m < \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

де  $n$  – кількість каналів;

$m$  – чисельність черги.

При багатоканальних СМО і при наявній черзі, мають місце витрати із-за очікування у черзі. Суперечність у вирішенні даної технологічної задачі полягає в тому, чим більше каналів СМО, отже, менша черга, тим менші втрати продукції із-за очікування у черзі. Але при цьому простоюють і нерационально використовуються канали СМО, тобто, маємо більші капітальні затрати на СМО. І, навпаки, чим менше каналів і менші затрати на СМО, тим більші втрати молока із-за великих черг. Отже, має бути оптимальне співвідношення між кількістю каналів СМО і кількістю заявок на обслуговування та часом очікування у черзі.

Математична модель СМО включає наступні складові: вхідний потік заявок на обслуговування, черга заявок, що очікують обслуговування, система обслуговування, вихідні потоки обслугованих або втрачених заявок, характеристики якості системи, механізм (дисципліна) обслуговування. Зокрема, інтенсивність надходження заявок (середня кількість вимог, які надходять у СМО за одиницю часу) має бути стаціонарною пуассонівською:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

де  $k$  – кількість заявок (вимог), які надходять у СМО за час  $t$ ;

$\lambda$  – параметр (інтенсивність) вхідних заявок.

Щільність часу обслуговування заявок має бути описана показниковим законом:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (3)$$

де  $\mu$  – параметр показникового закону розподілу (інтенсивність обслуговування вимог).

Довжина, дисципліна черги та механізм обслуговування характеризують якість обслуговування заявок (вимог).

При дослідженні СМО розв'язуємо такі задачі: аналіз СМО, що передбачає визначення характеристик якості обслуговування, залежно від параметрів і властивостей вхідного потоку вимог, параметрів структури системи обслуговування та дисципліни обслуговування; параметричний синтез, який передбачає визначення параметрів СМО при заданій структурі, залежно від параметрів і властивостей потоку вимог, дисципліни та якості обслуговування; синтезу структури СМО з оптимізацією її параметрів таким чином, щоб при заданих потоках, дисципліні і якості обслуговування, затрати на СМО були мінімальними або були мінімальними втрати замовлень при заданих потоках, дисципліні та вартості системи. Отже, в нашому випадку СМО найбільш актуальною є задача параметричного синтезу доільної установки.

Дана задача може бути вирішена після визначення показників ефективності СМО, яку ми досліджуємо.

У загальному вигляді модель системи описуємо: кількістю каналів ( $n$ ), середньою щільністю потоку вимог ( $\lambda$ ), середньою тривалістю обслуговування заявки ( $t_{обс}$ ) та загальною кількістю заявок, які може прийняти система ( $n+m$ ).

Показники ефективності оцінюємо через ймовірнісні стани системи, її якість та умови функціонування і, розрахункові показники, які оцінюють економічний стан системи.

Першу чергу складають показники:

- інтенсивність потоку обслуговування

$$\mu = \frac{1}{t_{обс}}, \quad (4)$$

- показник навантаження на один канал

$$\psi = \frac{\lambda}{n\mu}, \quad (5)$$

- ймовірність простоювання системи

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n \psi^{n+1} (1 - \psi^m)}{n!(1 - \psi)} \right]^{-1}, \quad (6)$$

де  $k$  – кількість зайнятих обслуговуванням каналів,  $k=1,2,\dots,n$ .

- ймовірність наявності у системі  $k$  заявок

$$P_k = \frac{n^k}{k!} \psi^k P_0, \quad (7)$$

- ймовірність відмови системи

$$P_q = P_{n+m}, \quad (8)$$

- відносна пропускна здатність (продуктивність) системи

$$Q = 1 - P_q, \quad (9)$$

- абсолютна пропускна здатність (продуктивність) системи

$$A = \lambda \cdot Q, \quad (10)$$

- середнє число зайнятих каналів

$$N_c = \frac{A}{\mu}, \quad (11)$$

- середня кількість заявок у черзі

$$N_e = \frac{n^n}{n!} \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m (m+1) - m\psi}{(1-\psi)^2} P_0, \quad (12)$$

- середня кількість заявок у системі

$$N = N_\zeta + N_e, \quad (13)$$

- середня тривалість обслуговування заявки

$$T_\zeta = \frac{N_\zeta}{\lambda}, \quad (14)$$

- середня тривалість перебування заявки у черзі

$$T_e = \frac{N_e}{\lambda}, \quad (15)$$

- загальний час затрачений системою на обслуговування заявки

$$T = T_\zeta + T_e, \quad (16)$$

- середня кількість вільних каналів

$$N_0 = \sum (n-k) P_k, \quad (17)$$

Показники другої групи оцінюємо через ефективність системи, що розраховується за залежністю:

$$E = (g_{оч} \cdot N_e + g_{np} \cdot N_0 + g_{обс} \cdot N) \cdot t, \quad (18)$$

де  $g_{оч}$ ,  $g_{np}$ ,  $g_{обс}$  – відповідно, вартість втрат на очікування, простоювання та обслуговування за одиницю часу;

$t$  – тривалість інтервалу функціонування системи, що досліджується.

Та, окрім цього, оцінюємо оптимальну кількість каналів, що забезпечують роботоздатність системи з ймовірністю  $P \geq 0,97$ :

$$0,97 = 1 - \frac{(\rho)^{n+m}}{n^m n!} P_0, \quad (19)$$

де  $\rho$  – показник інтенсивності навантаження на СМО.

Виконуємо розрахунки і результати заносимо у табл. 1.

Таблиця 1. Показники СМО «доїльна установка»

Показник	Марка та тип доїльної установки								
	УИД-10	УДБ-100	УДМ-100	МВС-12	УДА-8	УДА-16	Карусель	Паралель	УДЛ-12
Середня кількість потоку заявок ( $\lambda$ ), корів/год	5,3	66,7	66,7	133,3	133,3	133,3	146,7	120	100
Інтенсивність потоку обслуговування ( $\mu$ ), корів/год	8	68	75	75	65	70	100	100	60
Показник навантаження на один канал ( $\psi$ ), канал <sup>-1</sup>	0,66	0,12	0,15	0,15	0,22	0,12	0,12	0,10	0,14
Ймовірність простоювання системи ( $P_0$ )	0,34	0,375	0,411	0,169	0,175	0,149	0,231	0,301	0,189
Середнє число зайнятих каналів ( $N_c$ )	0,660	0,981	0,889	1,777	1,743	1,904	1,467	1,200	1,667
Середня кількість заявок у черзі ( $N_e$ )	1,216	$10^{-6}$	$6 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^{-6}$	$10^{-4}$	$7 \times 10^{-6}$	$10^{-6}$	0	$2 \times 10^{-6}$
Середня тривалість обслуговування заявки ( $T_c$ )	0,355	0,014	0,133	0,013	0,015	0,014	0,010	0,010	0,017
Ймовірність утворення черги ( $P_{оч}$ )	0,656	$10^{-5}$	$3 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$
Коефіцієнт зайнятості каналів ( $K_s$ )	0,70	0,10	0,10	0,15	0,20	0,12	0,12	0,10	0,140
Фактична продуктивність СМО, гол./год	5	65	67	135	114	133	150	120	102
Оптимальна кількість каналів СМО	1	8	6	12	8	16	12	12	12

Показники середньої щільності потоку заявки ( $\lambda$ ) та інтенсивність потоку обслуговування ( $\mu$ ) беремо на підставі статистичної обробки даних виробничої експлуатації доїльних установок.

Розрахунковий показник навантаження на канал ( $\psi$ ) засвідчує, що ступінь вихідних та вхідних потоків є узгодженими і СМО в цілому, є стійкими.

Показник ймовірності того, що обслуговуванням зайнято  $k$  каналів свідчить, що при  $k > 3$   $P_{обс} \leq 0,05$ , а при  $k = n$ ,  $P_{обс} \leq 2,8 \times 10^{-4}$  і менше. Це означає, що обслуговуванням зайнято 2–3 канали.

Ймовірність простоювання каналів доїльної установки змінюється в межах 14,9–41,1%, при цьому максимальне значення має доїльна установка УДМ-100  $t_{np} = 24,66$  хв, а мінімальне – УДА-16  $t_{np} = 8,94$  хв. протягом кожної години роботи. Всі інші доїльні установки мають проміжне значення.

Оцінка ймовірності відмови обслуговування будь-яким каналом  $P_e = 0$ , тобто всі заявки обслуговуються, а відносна пропускна здатність установок складає 100%, тобто всі заявки будуть обслуговані. Допустимий рівень обслуговування має бути вищим за 90%, відповідно до зоотехнічних вимог. У зв'язку з тим, що відносна пропускна здатність  $Q = 1$  у всіх установок, їх абсолютна пропускна здатність буде рівна середній щільності потоку заявок ( $A = \lambda$ ).

Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів (доїльних апаратів) мінімальна для УИД-10,  $N_{\zeta} = 0,66$ , а максимальна для УДА-16,  $N_{\zeta} = 1,904$ . Середня кількість заявок у черзі менша для УИД-10 складає  $N_e = 1,216$  при  $P_{оч} = 0,656$ , а для всіх інших  $N_e = 0$ .

### Висновки та перспективи подальших досліджень

Оскільки всі доїльні установки не мають черги, за винятком УИД-10 ( $N = 1,887$ ), то середня кількість заявок у СМО співпадає з кількістю заявок, що обслуговуються. Середня тривалість обслуговування заявок для установок типу «Карусель» та «Паралель» є найменшою і складає  $T_{\zeta} = 0,6$  хв, а максимальна для УИД-10,  $T_{\zeta} = 21,3$  хв. Для усіх інших дане значення знаходиться в межах  $T_{\zeta} = 0,9$ – $7,98$  хв (див. табл. 1).

Найбільш зайнятою є доїльна установка УИД-10  $K_3 = 0,70$ , а найменш зайнятими є установка типу «Паралель», УДБ-100 та УДМ-100,  $K_3 = 0,10$ . Всі інші установки мають проміжне значення.

У подальшому доцільно виконати дослідницьку роботу з питань фотохронометражу даних технологічних систем, включно імпортного виготовлення – типу доїльних установок індивідуального обслуговування тварин, високопродуктивних майданчиків та автоматів доїння.

---

---

### Література

---

---

1. Виробництво основних видів продукції тваринництва у 2014 році [Електронний ресурс] / Держ. комітет статистики України. – Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua>.
  2. Новиков О. А. Прикладные вопросы теории массового обслуживания / О. А. Новиков, С. И. Петухов. – М. : Советское радио, 1969. – 400 с.
  3. Савран В. П. Зоотехнические основы совершенствования технологии и автоматизации доения коров на фермах промышленного типа : автореф. дис. на соискание учен. степени доктора с.-х. наук / В. П. Савран. – К. : УСХА, 1991. – 48 с.
  4. Сологуб Д. И. Автомобильные технологические перевозки. / Д. И. Сологуб. – К. : Вища шк., 1973. – 176 с.
  5. Реклейтис Г. Оптимизация в технике : пер. с англ. : в 2-х кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Регсдвел. – М. : Мир, 1986. – Кн. 1. – 350 с., Кн. 2. – 320 с.
  6. Николаев В. И. Системотехника: методы и приложения / В. И. Николаев, В. М. Брук. – Л. : Машиностроение, 1985. – 199 с.
  7. Уайлд Д. Оптимальное проектирование : пер. с англ. / Д. Уайлд. – М. : Мир, 1981. – 272 с.
  8. Гухман А. А. Введение в теорию подобия : учеб. пособие / А. А. Гухман. – М. : Высшая шк., 1973. – 295 с.
  9. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М. : Мир, 1972. – 381 с.
  10. Нагірний Ю. П. Обґрунтування інженерних рішень / Ю. П. Нагірний. – К. : Урожай, 1994. – 215 с.
- 
-