МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЖУРАВЛЬОВ ВАЛЕРІЙ ПИЛИПОВИЧ

УДК 517.9

УЗАГАЛЬНЕНО ОБОРОТНІ ОПЕРАТОРИ ТА НОРМАЛЬНО РОЗВ'ЯЗНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2013

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики Національної академії наук України.

Науковий консультант –
доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
БОЙЧУК Олександр Андрійович,
Інститут математики НАН України, завідувач лабораторією крайових задач теорії диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
СЛЮСАРЧУК Василь Юхимович,
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
СТАНЖИЦЬКИЙ Олександр Миколайович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри загальної математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
ТЕПЛІНСЬКИЙ Юрій Володимирович,
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, завідувач кафедри диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться 24 лютого 2014 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирівська, 58.

Автореферат розіслано 21 січня 2014 р.

Секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 **Моклячук М.П.**

Загальна характеристика роботи

Багато задач математичного моделювання природних, фізичних технічних, економічних, соціальних та інших процесів зводяться до лінійних, нелінійних або слабконелінійних крайових задач для різноманітних класів операторних рівнянь. Розробці конструктивних методів аналізу лінійних та слабконелінійних крайових задач для широкого класу систем звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, інтегро-диференціальних систем присвячені численні роботи як вітчизняних, так і зарубіжних вчених: М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, Д. І. Мартинюка, В. І. Арнольда, Ф. В. Аткінсона, М. М. Вайнберга, В. О. Треногіна, Б. П. Демидовича, І. Т. Кігурадзе, І. Тауфера (I. Taufer), Й. Мавіна (J. Mawhin), М. Фурі (M. Furi), О. Вейводи (O. Veivoda).

Враховуючи важливість практичного застосування, найбільш повно та глибоко вивчені крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь. Такі задачі у періодичному (фредгольмовому) випадку вивчалися: М. М. Боголюбовим, Ю. О. Митропольським, А. М. Самойленком, І. Г. Малкіним, Є. О. Гребеніковим, Ю. О. Рябовим, Д. К. Лікою, А. А. Андроновим, А. А. Віттом, С. Е. Хайкіним, В. А. Якубовичем, В. М. Старжинським, А. М. Самойленком було запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних систем звичайних диференціальних рівнянь, який завдяки своїй простоті і ефективності був застосований А. М. Самойленком, М. О. Перестюком, М. Й. Ронто, В. А. Ронто, О. П. Трофимчук до дослідження широкого кола крайових задач з різного роду крайовими умовами. У загальному нетеровому випадку конструктивні методи аналізу крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь розроблені О.А. Бойчуком та його учнями.

Крайові задачі для систем диференціальних рівнянь із зосередженим запізненням у періодичному випадку вивчалися А. Д. Мишкісом, С. М. Шимановим, Ю. О. Митропольським, Д. І. Мартинюком, В. П. Рубаніком, Л. Е. Ельсгольцем. С. Б. Норкіним, Дж. Хейлом (J. Hale) та ін. вітчизняними та зарубіжними вченими. У випадку всюди розв'язної крайової задачі – М. В. Азбелєвим, В. П. Максимовим, Л. Ф. Рахматулліною та їх учнями.

Системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і крайові задачі для них у періодичному (фредгольмовому) некритичному випадку вивчалися А. Д. Мишкісом, А. М. Самойленком, М. О. Перестюком, А. Халанаєм (A. Halanay), Д. Векслером (D. Wexler) та іншими вченими. У періодичному критичному та загальному нетеровому випадках – А. М. Самойленком, М. О. Перестюком, О. А. Бойчуком та їх учнями. А. М. Самойленком, М. О. Перестюком, С. І. Трофімчуком для систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу введено поняття узагальненого розв’язку, запропоновано класифікацію імпульсних систем і вказано умови, достатні для належності імпульсної системи до того чи іншого класу.

Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями проведено А. М. Самойленком, О. М. Станжицьким.

Розв’язність інтегро-дифференціальних рівнянь досліджували А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея та їх учні, питання нормальної розв’язності та індексу цих рівнянь розглянуті Ю. К. Ландо, проекційно-ітеративні методи побудови розв'язків крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь розроблені Ю. Д. Соколовським, А.Ю. Лучкою, А. Б. Антоневичем, Я. В. Радино.

При дослідженні перелічених вище крайових задач використовувались класичні методи дослідження. Класична теорія крайових задач почала свій розвиток задовго до появи методів функціонального аналізу. Постановка крайових задач у загальному операторному вигляді стала можливою з використанням функціонального аналізу, який все частіше почав застосовуватися в якості апарату для дослідження загальних крайових задач для різних класів операторних рівнянь (Й. Мавін (J. Mawhin), С. Швабік (S. Schwabik), О. Вейвода (O. Veivoda), М. Тврди (M. Tvrdy), Д. Векслер (D. Wexler)).

О. А. Бойчуком та його учнями із застосуванням апарату узагальнено-обернених матриць було доведено загальні теореми про розв’язність та представлення розв’язків критичних крайових задач для різних класів лінійних і слабконелінійних рівнянь, розроблено конструктивні методи аналізу крайових задач для автономних та неавтономних систем звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь з зосередженим запізненням, диференціальних рівнянь з імпульсною дією у загальному нетеровому випадку.

Подальшим узагальненням стала теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь у банахових просторах, коли скінченновимірний евклідів простір значень шуканої функції змінювався на загальний банахів простір[1]. Так, К. Г. Валєєвим та О. А. Жаутиковим[2] вперше було доведено теореми існування та єдиності розв'язків для лінійних та нелінійних нескінченних систем диференціальних рівнянь.

Дослідження умов існування періодичних розв’язків диференціальних і різницевих рівнянь у банаховому просторі обмежених числових послідовностей **m** проведено А. М. Самойленком, Ю. В. Теплінським[3]. О. А. Бойчуком та Є. В. Панасенком отримано критерій існування розв’язків лінійних крайових задач у критичному випадку для звичайних диференціальних рівнянь у

---

[1] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

[2] *Валеев К.Г., Жаутиков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. -Алма-Ата: Наука, 1974. - 412 с.

[3] *Самойленко А.М., Теплінський Ю.В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. - Киев: ІМ НАН України, 2008. - 496 с.

банаховому просторі. Щільність множини нерозв’язних задач Коші у множині усіх задач Коші у нескінченновимірних банахових просторах досліджено В. Ю. Слюсарчуком. О. А. Бойчуком та О. О. Покутним визначено умови біфуркації множини обмежених на всій осі $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ розв'язків лінійних та слабкозбурених диференціальних рівнянь у банаховому просторі, О. М. Странжицьким досліджено експоненціальну дихотомію стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм, а В. Ю. Слюсарчуком – експоненціальну дихотомію розв’язків дискретних систем.

З точки зору теорії операторів у функціональних просторах означені вище крайові задачі мають наступні особливості: вихідні рівняння цих крайових задач мають розв’язки при будь-якій правій частині. За термінологією С. Г. Крейна такі рівняння називаються всюди розв'язними. Значна частина цих результатів фактично отримана при умові, що лінійний оператор L вихідного рівняння лінійної породжуючої крайової задачі має обернений. А інша частина цих задач досліджувалась у припущенні, що вони фредгольмові. Як було наголошено в монографії [4] «*Відмова від фредгольмовості головної частини оператора* L *робить клас рівнянь* $Lz = f$ *настільки широким, що для цього класу не вдається побудувати скільки-небудь змістовної теорії*». Проте множина фредгольмових операторів складає досить вузький клас у множині нормально розв’язних операторів з доповнювальним ядром та образом, серед яких розрізняють узагальнено оборотні оператори наступних класів: фредгольмові, нетерові, n-нормальні з доповнювальним образом $R(L)$, d-нормальні з доповнювальним ядром $N(L)$, топологічно фредгольмові, звідно оборотні (якщо оператор діє з банахового простору **B** в **B**), топологічно нетерові.

Таким чином, клас крайових задач для не всюди розв’язних операторних рівнянь значно ширший ніж той, що розглядався раніше. До таких задач належать, наприклад, задачі для інтегральних рівнянь, інтегро-диференціальних рівнянь, задачі для сингулярних диференціальних систем та ін.

Актуальність теми. Актуальність вивчення крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь обумовлена, перш за все, важливістю практичного застосування крайових задач у різних областях знань: теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування, задачах економіки, радіотехніки, механіки, біології, імунології, медицини та ін.

Крайові задачі, в яких вихідне операторне рівняння не є всюди розв'язним, а оператор діє у нескінченновимірних банахових або гільбертових просторах, вивчались дуже мало. Тому актуальною є потреба побудови загальної концепції дослідження крайових задач для операторних рівнянь, лінійні частини яких не мають обернених операторів у банахових та гільбертових просторах.

---

[4] *Азбелєв М. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию фунционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – С. 29

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно загального плану досліджень відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України в рамках держбюджетної теми "Аналітичні та якісні методи теорії нелінійних диференціальних рівнянь" (номер державної реєстрації №0105U007978).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова загальної концепції дослідження лінійних та слабконелінійних крайових задач для операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах з нормально розв'язними операторами, які мають доповнювальні ядра та образи. Завданнями дослідження є отримання конструкцій узагальнено-обернених та псевдообернених операторів до узагальнено оборотних, визначення конструктивних умов існування та розробка алгоритмів побудови розв'язків рівнянь з узагальнено оборотними операторами та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах.

Об'єктом дослідження є операторні рівняння з узагальнено оборотними операторами, лінійні крайові задачі для них та слабконелінійні (з узагальнено оборотною лінійною частиною) крайові задачі у банахових та гільбертових просторах. У роботі досліджуються інтегральні рівняння Фредгольма з виродженими ядрами та лінійні і слабконелінійні крайові задачі для них у банахових та гільбертових просторах, а також крайові задачі для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією.

Предмет дослідження: умови існування та формули для представлення загальних розв'язків лінійних крайових задач для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами, необхідні, достатні умови існування, а також збіжні ітераційні процедури для побудови розв’язків слабконелінійних крайових задач з узагальнено оборотною лінійною частиною у банахових та гільбертових просторах.

Методи дослідження: методи теорії операторів та функціонального аналізу, апарат узагальнено-обернених та псевдообернених матриць, методи теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. При аналізі слабконелінійних крайових задач використовуються методи теорії збурень: малого параметра Ляпунова–Пуанкаре, асимптотичних методів нелінійної механіки, методів розв'язку некоректних задач.

Наукова новизна дослідження: На захист виносяться наступні основні результати, що визначають наукову новизну:

1. Вперше доведено аналог леми Е. Шмідта (E. Schmidt) для топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, n-нормальних та d-нормальних операторів та теореми про загальний вигляд операторів кожного з цих класів у банахових просторах, які узагальнюють теореми С. М. Нікольського для фредгольмових та Ф. В. Аткінсона для нетерових операторів, відповідно. Отримано конструкції узагальнено-обернених, лівих, правих псевдообернених та псевдообернених операторів до топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, n-нормальних та d-нормальних

операторів у банахових та гільбертових просторах, відповідно. Вперше побудовано узагальнено-обернені та псевдообернені оператори до інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром.

2. Вперше визначено критерії розв'язності та запропоновано формули для представлення загальних розв'язків операторних рівнянь з нормально розв'язними операторами з доповнюваними ядром та образом, на основі яких доведено теореми про необхідні і достатні умови існування та загальний вигляд розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.
3. Вперше знайдено необхідні та достатні умови існування та загальний вигляд розв'язків лінійних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь з нормально розв'язними операторами з доповнюваними ядрами та образами у банахових та гільбертових просторах, побудовано узагальнені оператори Гріна для цих задач. Отримано умови існування та представлення розв’язків лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах. Досліджено властивості узагальненого оператора Гріна та його зв’язок з узагальнено-оберненим оператором лінійної крайової задачі.
4. Для слабконелінійних операторних рівнянь (лінійна частина яких – нормально розв'язний оператор з доповнювальними ядром та образом) вперше досліджено необхідні умови існування розв'язків, побудовано операторне рівняння для породжуючих елементів, визначено достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язків, запропоновано ітераційні алгоритми для їх побудови та доведено їх збіжність. Встановлено необхідні умови існування розв'язків слабконелінійних операторних рівнянь, лінійна частина яких – не всюди розв'язне операторне рівняння Фредгольма з виродженим ядром, отримано достатні умови існування розв'язків, запропоновано збіжні ітераційні процедури для їх побудови у банахових просторах.
5. Встановлено необхідні та достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язків слабконелінійних крайових задач, лінійні частини вихідних рівнянь яких – нетерові оператори. Запропоновано збіжні ітераційні процедури для побудови цих розв'язків. Побудовано систему операторних рівнянь для породжуючих констант та визначено необхідні умови існування розв’язків. Встановлено достатні умови існування принаймні одного розв'язку слабконелінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у скінченновимірних гільбертових просторах. Запропоновано збіжні ітераційні процедури для побудови цих розв'язків.
6. Вперше побудовано узагальнено-обернений оператор до лінійного нетерового операторного рівняння з імпульсною дією, знайдено необхідні та

достатні умови розв'язності та формулу для представлення загального розв'язку (за допомогою побудованого узагальненого оператора Гріна) лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією.

7. Вперше побудовано оператор Гріна задачі Коші лінійної диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією. Визначено необхідні та достатні умови існування та представлення загальних розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією.

8. Для слабконелінійних крайових задач для диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією у скінченновимірних банахових просторах знайдено необхідні умови існування розв'язків, побудовано операторне рівняння для породжуючих констант, із застосуванням проекторів встановлено достатні умови існування принаймні одного розв'язку та запропоновано збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків таких задач.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати, які отримані в роботі, можуть бути використані в якісній теорії крайових задач для різноманітних класів операторних рівнянь з урахуванням їх специфіки, теорії керування та теорії стійкості у випадках, коли вихідне операторне рівняння не є всюди розв'язним, дослідженні умов існування обмежених на всій числовій осі розв'язків крайових задач у банахових просторах, при моделюванні та дослідженні різноманітних фізичних, економічних, біологічних та інших процесів.

Особистий внесок здобувача. Загальний план дослідження та його основний напрямок визначено спільно з науковим консультантом – членом-кореспондентом НАН України О. А. Бойчуком. У спільних роботах співавторам належить постановка задач та обговорення можливих шляхів їх розв’язання. В цих роботах особистий внесок автора полягає у доведенні теорем про існування та загальний вигляд ров’язків лінійних та слабконелінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь та теорем про умови (достатні та необхідні) існування розв’язків слабконелінійних крайових задач з нетеровою лінійною частиною [1], у встановленні умов розв’язності та побудові загальних розв’язків нетерових рівнянь у банахових просторах [2], у доведенні теорем про розв’язок задачі Коші та лінійної крайової задачі для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією та побудова узагальненого оператора Гріна відповідної напіводнорідної лінійної крайової задачі [3], у доведенні теорем про існування та загальний вигляд розв’язків лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та теорем про умови (достатні та необхідні) існування розв’язків слабконелінійних крайових задач з нетеровою лінійною частиною та імпульсною дією [5], у доведенні аналога леми Е. Шмідта на випадок топологічно нетерових операторів, теорему про конструкцію узагальнено-оберненого оператора до топологічно нетерового у банаховому просторі [20], у доведенні теореми про конструкцію псевдооберненого оператора у гільбертових просторах [21]. Всі результати, які ввійшли до дисертаційного дослідження, отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати, викладені у дисертації доповідались та обговорювались на: науково-технічному семінарі "Моделювання і дослідження стійкості фізичних процесів" (м. Київ, 1992); конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь і математичної фізики – другі Боголюбовські читання" (м. Київ, 1992); Міжнародній науковій конференції: International Conference Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation (м. Київ, 1993); Міжнародній науковій конференції: 20-th Summer School "Applications of Mathematics in Engineering" (Varna, Bulgaria, 1994); Міжнародній науковій конференції: International Conference "Nonlinear Differential Equations" (Kiev, 1995); Міжнародній науковій конференції: International Conference Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation (м. Київ, 1995); Міжнародній науковій конференції: International Conference Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation (м. Київ, 1996); Всеукраїнській конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 1996); П'ятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 1996); Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-ти річчя академіка А. М. Самойленка (м. Мелітополь, 2008); Міжнародній науковій конференції: International Conferese "Dynamical system modeling and stability investigation" (м. Київ, 2009 р.); Міжнародній науковій конференції до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди (м. Чернівці, 2009); Українському математичному конгресі – 2009 (до 100-річчя М. М. Боголюбова) (м. Київ, 2009); XIII Міжнародній конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2010); десятій Кримській міжнародній математичній школі "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Крим, Алушта 2010); міжнародній науково-технічній конференції SAIT 2011 "Системный анализ и информационные технологии" (Киев, 2011); Міжнародній конференції "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", присвячену видатному математику І. Г. Петровському (Москва, 2011); міжнародній конференції "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем" (Киев, 2011); міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (Київ, 2011); конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академика Я. С. Підстригача КМУ СПММ-2011 (Львів, 2011); Міжнародній конференції до 50-річчя кафедри прикладної математики (Чернівці, 2012); Conference on Differential and Difference Equations and Applications (Terechova, Slovakia, 2012); Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications" (Mersin, Turkey, 2012); Міжнародній науковій конференції “Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” (Севастополь, 2013), міжнародній математичній конференції “Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка” (Слов’янськ, 2013),

наукових семінарах:

- спільному науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань (Інститут математики НАН України) та кафедри диференціальних та інтегральних рівнянь (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), керівники – академік НАН України А.М. Самойленко та академік НАН України М.О. Перестюк, жовтень 2012 р., березень 2013 р.;
- науковому семінарі кафедри загальної математики (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), керівник – доктор фізико-математичних наук, професор О. М. Станжицький, квітень 2013 р.;
- Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь, керівники: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кориспондент НАН України Б. Й. Пташник, доктори фізико-математичних наук, професори М. І. Іванов, П. І. Каленюк, листопад 2013 р.
- науковому семінарі кафедри математичної фізики (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), керівники – доктори фізико-математичних наук, професори Т. А. Мельник та В. Г. Самойленко, грудень 2013 р.

Публікації. За темою дисертаційного дослідження опубліковані: монографія у співавторстві [1], 19 статей [2 – 20] у періодичних іноземних та фахових вітчизняних періодичних наукових журналах та збірниках праць та 2 статті у збірниках наукових праць [21, 22]. З фахових статей – 15 самостійних робіт автора [4], [6 – 19]. 13 статей опубліковано у виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази [2 – 11], [18 – 20]. Результати дисертації також опубліковані у збірниках матеріалів та тез міжнародних та всеукраїнських конференцій [23 – 48].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, коротких висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел, що налічує 283 найменування. Повний обсяг роботи складає 332 сторінки, з них список використаних джерел займає 31 сторінку.

Автор висловлює щиру подяку науковому консультанту члену-корреспонденту НАН України, професору О.А. Бойчуку за підтримку, цінні зауваження та поради, постійну увагу до роботи, плідне співробітництво та обговорення одержаних результатів.

Основний зміст роботи

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету та завдання дослідження, визначено наукову новизну і значення одержаних результатів, зроблено короткий огляд сучасного стану проблем, які досліджуються у роботі.

Перший розділ **«Огляд літератури»** присвячено огляду літературних джерел за темою дисертації та основних результатів, отриманих протягом останніх десятиліть, проаналізовано стан наукової проблеми та розвиток основних напрямів досліджень крайових задач для різних класів функціонально-диференціальних рівнянь, розглянуто деякі питання теорії лінійних операторів, які пов'язані з узагальненим оберненням та псевдо оберненням нормально розв'язних операторів з доповнювальними ядрами та образами у банахових та гільбертових просторах.

У *другому розділі* **«Загальний вигляд узагальнено оборотних операторів у банахових просторах»** на основі доведених лем, які узагальнюють відому лему Е. Шмідта [5] для фредгольмових операторів, на випадок узагальнено оборотних операторів, доведено теореми про загальний вигляд нормально розв'язних операторів з доповнювальним ядром та образом у банахових простpax.

У підрозділі 2.1 доведено ряд лем, які використовуються при доведенні основних тверджень другого розділу, а також розглянуто способи побудови проекторів у випадку, коли банахові та гільбертові простори мають базиси Ю. Шаудера (J. Shauder).

У підрозділі 2.2 доведено лему, яка узагальнює лему Е. Шмідта на випадок топологічно нетерових операторів.

Нехай $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ – лінійний обмежений нормально розв'язний оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$, причому ядро $N(L)$ та образ $R(L)$ доповнювальні у просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно. Це означає, що існують обмежені проектори [6] $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$, які індукують розбиття $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ у прямі топологічні суми

$$\mathbf{B}_1 = N(L) \oplus X_L, \quad \mathbf{B}_2 = Y_L \oplus R(L)$$

замкнених підпросторів $N(L)$ та X_L, Y_L та $R(L)$.

Для підпросторів $N(L)$ та Y_L розглянемо три випадки:

(*a1*). *Підпростір $N(L)$ лінійно ізоморфний доповнювальному в Y_L підпростору Y_1; $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$, $Y_L + Y_1 \oplus Y_2$;* (1)

(*a2*). *Підпростір Y_L лінійно ізоморфний доповнювальному в $N(L)$ підпростору $N_1(L)$; $Y_L \cong N_1(L) \subset N(L)$, $N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L)$;* (2)

(*a3*). *Нуль-простір $N(L)$ лінійно ізоморфний підпростору Y_L.*

---

[5] *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.

[6] *Кадец М. И., Митягин Б.С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // УМН. – 1973. – **28**, В. 6. – С. 77 – 94.

Продовжимо нулем на підпросторі X_L у випадках (а1), (а3), а на підпросторі $X_L \oplus N_2(L)$ – у випадку (а2) оператори, які здійснюють ізоморфізм підпростору $N_1(L) \subseteq N(L)$ на підпростір $Y_1 \subseteq Y_L$. Позначимо розширення цих операторів на весь простір $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$. Аналогічно продовжимо нулем на підпросторі $Y_2 \oplus R(L)$ у випадку (а1), а на підпросторі $R(L)$ – у випадках (а2), (а3) оператори, які здійснюють ізоморфізм підпростору $Y_1 \subseteq Y_L$ на підпростір $N_1(L) \subseteq N(L)$. Позначимо розширення цих операторів на весь простір $\mathbf{B}_2$ через $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$.

Лема 2.4. *Нехай L– топологічно нетеровий оператор і виконується одна з умов* (*1*) *або* (*2*). *Тоді оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ *має обмежений обернений*

$$\overline{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} \left(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\right)_l^{-1} - \text{лівий, якщо} \quad N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ \left(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\right)_r^{-1} - \text{правий, якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L. \end{cases}$$

Загальний вигляд односторонньо обернених операторів $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ *задається формулою*

$$\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1} = \begin{cases} \overline{L}_l^{-1}\left(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}\right) - \text{лівий, якщо} \quad N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ \left(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}\right)\overline{L}_r^{-1} - \text{правий, якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L. \end{cases}$$

де $\mathcal{P}_{N_2(L)} : \mathbf{B}_1 \to N_2(L)$ *і* $\mathcal{P}_{Y_2} : \mathbf{B}_2 \to Y_2$ *– довільні нескінченновимірні обмежені проектори*.

У цьому підрозділі, як наслідки з леми 2.4, сформульовано аналогічні леми для топологічно фредгольмових, узагальнено оборотних *n*- та *d*-нормальних операторів у банахових просторах.

У підрозділі 2.3, використовуючи лему 2.4 доведено теорему про загальний вигляд топологічно нетерових операторів, яка узагальнює відому теорему Ф.В. Аткінсона[7] про загальний вигляд нетерових операторів.

Теорема 2.1. *Для лінійного обмеженого оператора* $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *наступні твердження еквівалентні*:

а1) оператор L – топологічно нетеровий;

а2) оператор L можна представити у вигляді

$$L = F + S, \tag{3}$$

де оператор F має обмежений лівий $F_l^{-1} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$ [*або правий* $F_r^{-1} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$] *обернений, а* $F_l^{-1}S : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *та* $FF_r^{-1} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$ [$-F_r^{-1}S : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *та* : $F_r^{-1}F$: $\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$] *– нескінченновимірні обмежені оператори*;

а3) оператор L можна представити у вигляді:

$$L = F + S,$$

[7] *Аткинсон Ф.В.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат. сборник. Нов. сер. – 1951. – 28, № 1. – С. 3 – 14.

де оператор F має обмежений лівий F_l^{-1}: $\mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$ [правий F_r^{-1}: $\mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$] обернений, а SF_l^{-1}: $\mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$ та FF_r^{-1} : $\mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$ [SF_r^{-1}: $\mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$ та $F_r^{-1}F$: $\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$] – нескінченновимірні обмежені проектори;

Якщо L – топологічно фредгольмовий оператор, то $N(L) \cong Y_L$, $N_1(L) \equiv N(L)$, $Y_1 \equiv Y_L$ і для оператора F існує і лівий F_l^{-1}, і правий F_r^{-1} обернені оператори, а отже існує обернений оператор F^{-1}. Тоді з теореми 2.1 отримано аналогічну теорему для топологічно фредгольмових операторів, яка узагальнює відому теорему С.М. Нікольського[8] про загальний вигляд фредгольмових операторів на випадок, коли ядро та коядро оператора L доповнювальні та нескінченновимірні.

Далі доведено теореми про загальний вигляд узагальнено оборотних n– та d– нормальних операторів у банахових просторах, які узагальнюють теорему Ф. В. Аткінсона для нетерових операторів.

У *третьому розділі* **«Узагальнене обернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром»** для досліджуваних класів обмежених узагальнено оборотних операторів L : $\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$, що діють у банахових та гільбертових просторах, знайдено конструкції обмежених узагальнено-обернених операторів L^{-}, які узагальнюють відому конструкцію Е. Шмідта[9].

У підрозділах 3.1, 3.2 розглянуто у загальному вигляді способи побудови узагальнено-обернених та псевдообернених операторів у функціональних просторах, які далі застосовуються для узагальненого обернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром, які діють у банахових та гільбертових просторах.

У підрозділі 3.1, використовуючи лему 2.4, доведено теорему про загальний вигляд узагальнено-оберненого оператора до топологічно нетерового.

Теорема 3.1. *Нехай L – лінійний обмежений топологічно нетеровий оператор і виконується одна з умов (1) або (2). Тоді оператор*

$$L^{-} = \left(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\right)_{l,r}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} =$$

$$= \begin{cases} \left(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\right)_{l}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}, \ \textit{якщо} \ N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ \left(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\right)_{r}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \ \textit{якщо} \ N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L \end{cases}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до оператора L.

Загальний вигляд обмежених узагальнено-обернених операторів L_0^{-} до топологічно нетерового оператора L дається формулою

$$L_0^{-} = \left(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}\right) L^{-} \left(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L}\right),$$

[8] *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. – 1943. – **7**, № 3. – С. 147 – 163.

[9] *Вайнберг М. М., Треногин В. А.*Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.

де $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ і $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$ *– довільні нескінченновимірні обмежені проектори.*

Як наслідки з теореми 3.1 отримані аналогічні теореми для узагальнено-обернених операторів до топологічно фредгольмових, *n*–, *d*– нормальних та нетерових операторів.

У підрозділі 3.2 з використанням леми 2.4 запропоновано конструкцію псевдооберненого оператора до топологічного нетерового у гільбертовому просторі.

Теорема 3.8. *Оператор*

$$L^{+} = \begin{cases} \left(I_{\mathrm{H}_1} - P_{N(L)}\right)\left(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\right)_l^{-1}\left(I_{\mathrm{H}_2} - P_{N(L^*)}\right), \text{ якщо } N(L) \cong N_1\left(L^*\right) \subset N\left(L^*\right), \\ \left(I_{\mathrm{H}_1} - P_{N(L)}\right)\left(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\right)_r^{-1}\left(I_{\mathrm{H}_2} - P_{N(L^*)}\right), \text{ якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong N\left(L^*\right), \end{cases}$$

де $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \to N(L)$ *та* $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N(L^*)$ *– нескінченновимірні орто-проектори, є єдиним обмеженим псевдооберненим до нормально розв'язного топологічно нетерового оператора* L.

У цьому підрозділі, як наслідки з теореми 3.8, отримано аналогічні теореми для тологічно фредгольмових, узагальнено оборотних *n*–, *d*– нормальних та нетерових операторів у гільбертових просторах.

У підрозділі 3.3, використовуючи конструкції узагальнено-обернених та псевдообернених операторів до нормально розв'язних операторів з доповнювальним ядром і образом у банахових та гільбертових просторах, які отримані у підрозділах 3.1, 3.2, розглянуто задачі про побудову узагальнено-обернених та псевдообернених операторів до інтегральних операторів Фредгольма з виродженими ядрами у цих просторах.

У підрозділі 3.3.1 у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ розглянуто інтегральний оператор Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)\,ds, \tag{4}$$

де оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $|||M||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|N(t)\|_{\mathbf{B}_1} = N_0 < \infty, z(t)$ – вектор-функція, яка діє з відрізка $\mathcal{I} = [a,b]$ у дійсний банахів простір $\mathbf{B}_1$, $z(t) \in C(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) := \left\{ z(\cdot) \to \mathbf{B}_1, \|z\| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1} \right\}$, $C(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ – банахів простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій.

Відомо[10], що добуток $M(t)x$ сильно неперервної оператор-функції $M(t)$ на елемент $x \in \mathbf{B}_1$ є неперервною вектор-функцією. Тому оператор L діє з банахового простору $C(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ у $C(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$.

[10] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

Нехай оператор $D = I_{\mathbf{B}_1} - A, \quad A = \int\limits_a^b N(s)M(s)ds -$ узагальнено оборотний. Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B}_1 \to N(D)$, $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{B}_1 \to Y_D$ та обмежений узагальнено-обернений оператор D^-.

Теорема 3.20. *Нехай* $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *– обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді інтегральний оператор* (4) *– узагальнено оборотний.*

Для доведення було побудовано проектори

$$\left(\mathcal{P}_{N(L)}z\right)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds, \mathcal{P}_{N(L)}: C\left(\mathcal{I},\mathbf{B}_1\right) \to N(L),$$

$$\left(\mathcal{P}_{Y_L} f\right)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds, \mathcal{P}_{Y_L}: \mathbf{C}\left(\mathcal{I},\mathbf{B}_1\right) \to Y_L$$

та доведено, що вони обмежені.

Наступна теорема дає конструкцію узагальнено-оберненого оператора L^- до інтегрального оператора (4).

Теорема 3.21. *Нехай* $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *– узагальнено оборотний оператор. Тоді оператор*

$$\left(L^- f\right)(t) = f(t) + M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)f(s)ds \tag{5}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим оператором до інтегрального оператора (4), де D^- *– обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора* D.

У підрозділі 3.3.2 досліджено умови існування та представлення псевдооберненого оператора до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром, який діє у гільбертовому просторі.

Нехай $\mathbf{H}_1$ – дійсний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(x, y)_{\mathbf{H}_1}$, $x \in \mathbf{H}_1$, $y \in \mathbf{H}_1$, $\mathcal{I}$ – скінченний проміжок, $z(t)$ – функція зі значеннями в гільбертовому просторі $\mathbf{H}_1$, вимірна у сенсі Бохнера, така, що $\int\limits_a^b \| z(t) \|_{\mathbf{H}_1}^2 \, dt < \infty$. Тоді простір таких функцій буде гільбертовим. Позначимо його $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

Розглянемо побудову псевдооберненого оператора до інтегрального оператора (4), де оператор-функції $M(t) = \left\{m_{ij}(t)\right\}_{i,j=1}^{\infty}$ та $N(t) = \left\{n_{ij}(t)\right\}_{i,j=1}^{\infty}$ – задовольняють умовам

$$\int\limits_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} m_{ij}^2(t)dt = M_0^2 < \infty, \quad \int\limits_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} n_{ij}^2(t)dt = N_0^2 < \infty, \tag{6}$$

при виконанні яких оператор інтегральний оператор (4) діє з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ в $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

Позначимо, як і раніше $D = I_{\mathbf{H}_1} - A$: $\mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_1$ – лінійний обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді вектор-стовпці оператор-функції $X(t) = M(t) P_{N_0(D)}$, $\Phi(t) = N^*(t) P_{N_0(D^*)}$ є повними системами лінійно-незалежних вектор-функцій, які складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ інтегральних операторів L та L^*, відповідно, де $P_{N_0(D)}$ – звуження оператора $P_{N(D)}$ на підпростір $N_0(D)$, що породжений системою лінійно-незалежних вектор-стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(D)}$, а $P_{N_0(D^*)}$ – звуження оператора $P_{N(D^*)}$ на підпростір $N_0(D^*)$, породжений системою лінійно-незалежних вектор-стовпів матиці-ортопроектора $P_{N(D^*)}$.

Позначимо $\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_0(D)} \alpha^{-1} P^*_{N_0(D)}$, $\tilde{\beta}^{(-1)} = P^*_{N_0(D^*)} \beta^{-1} P_{N_0(D^*)}$, де $\alpha = $ $= \int_a^b X^*(t) X(t) dt,\ \ \beta = \int_a^b \Phi(t) \Phi^*(t) dt -$ самоспряжені оборотні обмежені зліченновимірні матриці Грама.

Теорема 3.23. *Нехай D – нормально розв'язний оператор. Тоді оператор*

$$\begin{aligned}\left(L^+ f\right)(t) = f(t) + M(t) D^- \int_a^b N(s) f(s) ds - M(t) \tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(t) f(s) ds + \\ + M(t) \tilde{\alpha}^{(-1)} \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds - N^*(s) \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds\end{aligned} \tag{7}$$

є єдиним обмеженим псевдооберненим оператором до інтегрального оператора (4)*, де* D^- *– узагальнено-обереhений оператор до оператора D.*

У *четвертому розділі* **«Лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма у банахових просторах»** у загальному вигляді розглянуто умови розв'язності та побудовані загальні розв'язки нормально розв'язних операторних рівнянь та крайових задач для них. Загальні підходи застосовано для встановлення умов розв'язності та структури загальних розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах.

Нехай $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ [11] – банахів простір обмежених вектор-функцій $z(t)$, визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbf{B}$ з рівномірною нормою $|||z(t)||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \| z(t) \|_{\mathbf{B}_1}$, а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ – аналогічний банахів простір обмежених вектор-функцій $f(t)$.

У підрозділі 4.1 розглянуто задачу про умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків лінійного операторного рівняння

$$(Lz)(t) = f(t), \tag{8}$$

де L: $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ – топологічно нетеровий оператор.

---

[11] *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному аналізу. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.

Теорема 4.1. *Нехай* L *– топологічно нетеровий оператор. Операторне рівняння* (8) *розв'язне для тих і тільки тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, *для яких виконується умова*

$$\left(\mathcal{P}_{Y_L} f\right)(t) = 0,$$

і при цьому воно має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \left(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z}\right)(t) + \left(L^{-} f\right)(t),$$

де $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_L$ *– нескінченновимірні обмежені проектори,* $\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z}$ *– загальний розв'язок відповідного* (8) *однорідного рівняння* $Lz = 0$, $\hat{z}(t)$ *– довільний елемент банахового простору* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, L^{-} *– обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора* L.

У цьому підрозділі, як наслідки з теореми 4.1, сформульовано аналогічні теореми для тологічно фредгольмових, узагальнено оборотних *n*–, *d*–нормальних операторів у банахових просторах.

Із застосуванням теореми 4.1 у підрозділі 4.2 отримано умови існування та структуру загальних розв'язків інтегральних операторів Фредгольма з виродженими ядрами у банахових та гільбертових просторах.

Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int_a^b N(s) z(s)\,ds = f(t), \tag{9}$$

де $L : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ – узагальнено оборотний оператор, $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$ і є сильно неперервні.

Теорема 4.5. *Нехай* $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *– обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді при виконанні умови*

$$\left(\mathcal{P}_{Y_D} f\right)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s) f(s)\,ds = 0 \tag{10}$$

операторне рівняння (9) *розв'язне і має сім'ю розв'язків*

$$z(t,c) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)} c + \left(L^{-} f\right)(t), \tag{11}$$

де $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$ *– оператор розв'язку відповідного* (9) *однорідного інтегрального рівняння,* c *– довільний елемент банахового простору* $\mathbf{B}_1$, L^{-} *– узагальнено-обернений оператор* (5) *до інтегрального оператора* L.

У випадку, коли рівняння (9) розглядається у гільбертовому просторі, а оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ – зліченновимірні матриці, компоненти яких задовольняють умовам (6) для нього справедлива теорема 4.6.

Теорема 4.6. *Нехай* $D : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_1$ *– обмежений нормально розв'язний оператор. Тоді при виконанні умови і тільки при ній*

$$\left(P_{N(L^*)} f\right)(t) = \Phi(t)\beta^{-1}\int_a^b \Phi^*(s) f(s) ds = 0$$

операторне рівняння (9) *розв'язне і має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = X(t)c + \left(L^+ f\right)(t),$$

де $X(t) = M(t) P_{N_0(D)}$ – *оператор розв'язку відповідного* (9) *однорідного інтегрального рівняння, c – довільний елемент підпростору* $N_0(D)$ *гільбертового простору* $\mathbf{H}_1$, L^+ *– єдиний псевдообернений оператор* (7) *до інтегрального оператора L*.

Далі розглянуто умови роз'язності та представлення загальних розв'язків лінійної крайової задачі

$$(Lz)(t) = f(t), \tag{12}$$
$$\ell z(\cdot) = \alpha,$$

де $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ – лінійний обмежений узагальнено оборотний оператор, $\ell = \mathrm{col}(l_1, l_2, l_3, \ldots) : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ – лінійний обмежений оператор, $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\alpha \in \mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ – дійсний банаховий простір.

Позначимо лінійний обмежений оператор $\mathcal{L} = \ell \mathcal{P}_{N(L)}$, який діє з банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у банаховий простір $\mathbf{B}$. Нехай оператор $\mathcal{L}$ – узагальнено оборотний. Тоді існують[12] обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} : \mathbf{B}_1 \to N(\mathcal{L}), \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} : \mathrm{B} \to Y_\mathcal{L}$ – та обмежений узагальнено-обернений оператор $\mathcal{L}^-$.

Теорема 4.8. *Нехай оператори* $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *та* $\mathcal{L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ *– узагальнено оборотні.*

Тоді відповідна (12) *однорідна крайова задача має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = \left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)} \hat{z}\right)(t),$$

де $\mathcal{P}_{N(\Lambda)} = \mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ *– оператор розв'язку віповідної* (12) *однорідної крайової задачі,* $\hat{z}(t)$ *– довільний елемент банахового простору* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Неоднорідна крайова задача (12) *розв'язна для тих і тільки тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *і* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють умови*

$$\left(\mathcal{P}_{Y_L} f\right)(t) = 0,$$
$$\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left[\alpha - \ell\left(L^- f\right)(\cdot)\right] = 0$$

і при цьому має загальний розв'язок

$$z(t) = \left(\mathcal{P}_{Y(\Lambda)} \hat{z}\right)(t) + (Gf)(t) + \left(\mathcal{P}_{N(L)}\left(\mathcal{L}^- \alpha\right)\right)(t),$$

де G – узагальнений оператор Гріна відповідної (12) напіводнорідної (α = 0) крайової задачі.

Оператор G діє на вектор-функцію $f(t)$ за правилом

---

[12] *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. – 2007. – В. 13. – С. 78 – 116.

$$(Gf)(t) := (L^{-}f)(t) - \left(\mathcal{P}_{N(L)} f \ell (L^{-}f)(\cdot)\right)(t).$$

Далі сформульовано аналогічні теореми для крайових задач інших класів узагальнено оборотних операторів.

У підрозділі 4.4 у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ розглянуто лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$\begin{gathered}(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int_a^b N(s) z(s)\,ds = f(t),\\ \ell z(\cdot) = \alpha.\end{gathered} \tag{13}$$

Позначимо через $\mathcal{L} = \ell\left(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)}\right)$ – оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банахів простір $\mathbf{B}$.

Теорема 4.10. *Нехай оператори* $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *та* $\mathcal{L} : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *– узагальнено оборотні.*

Тоді відповідна (13) *однорідна крайова задача має сім'ю лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}c,$$

де $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ *– оператор розв'язку однорідної крайової задачі* (13), c *– довільний елемент банахового простору* $\mathbf{B}_1$.

Неоднорідна крайова задача (13) *розв'язна для тих і тільки тих* $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *та* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють умови*

$$\left(\mathcal{P}_{Y_L} f\right)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s) f(s)\,ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\left[\alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot) D^{-}\int_a^b N(s) f(s)\,ds\right] = 0$$

і при цьому вона має загальний розв'язок

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}c + (Gf)(t) + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\ell M(\cdot) f\alpha,$$

де

$$(Gf)(t) = \left[f(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)} f \ell f(\cdot)\right] +$$

$$+ M(t)\left[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)} f \ell M(\cdot)\right] D^{-}\int_a^b N(s) f(s)\,ds.$$

– узагальнений оператор Гріна відповідної (13) напіводнорідної (α = 0) крайової задачі.

Далі розглянуто крайову задачу (13) у випадку, коли оператор L діє з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ у $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$, оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ – зліченновимірні, компоненти яких задовольняють умови (6), оператор ℓ діє з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ у гільбертів простір $\mathbf{H}$, $\alpha \in \mathbf{H}$.

Теорема 4.11. *Нехай* $D : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_1$ *та* $\mathcal{L} : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}$ *– нормально розв'язні оператори. Тоді відповідна* (13) *однорідна крайова задача має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = M(t) P_{N(D)} P_{N(\mathcal{L})} c,$$

де c – довільний елемент підпростору $N_0(D)$ гільбертового простору $\mathbf{H}_1$.

Неоднорідна крайова задача (13) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ *та* $\alpha \in \mathbf{H}$, *які задовольняють умови*

$$\left(P_{N(L^*)} f\right)(t) = \Phi(t) \beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s) f(s) ds = 0,$$

$$P_{N(\mathcal{L}^*)} \left\{ \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot) D^+ \int_a^b N(s) f(s) ds + \ell M(\cdot) \tilde{\alpha}^{-1} \int_a^b M^*(s) f(s) ds - \right.$$

$$\left. - \ell M(\cdot) \tilde{\alpha}^{(-1)} \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds + \ell N^*(\cdot) \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds \right\} = 0,$$

при виконанні яких вона має загальний розв'язок

$$z(t) = M(t) P_{N(D)} P_{N(\mathcal{L})} c + (Gf)(t) + M(t) P_{N(D)} \mathcal{L}^+ \alpha,$$

де

$$(Gf)(t) = \left[f(t) - X(t) \mathcal{L}^+ \ell f(\cdot) \right] + M(t) D^+ \int_a^b N(s) f(s) ds -$$

$$- M(t) \tilde{\alpha}^{-1} \int_a^b M^*(s) f(s) ds + M(t) \tilde{\alpha}^{(-1)} \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds -$$

$$- \left[N^*(t) - X(t) \mathcal{L}^+ \ell N^*(\cdot) \right] \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds$$

– узагальнений оператор Гріна відповідної (13) напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі, $M(t) = M(t) - X(t) \mathcal{L}^+ \ell M(\cdot)$.

У підрозділі 4.5 розглянуто властивості узагальненого оператора Гріна і його зв'язок з узагальнено-оберненим оператором Λ^- до оператора $\Lambda = \mathrm{col}[L, \ell]$, який задає лінійну крайову задачу (12).

Теорема 4.15. *Оператор* $\Lambda = [G \ \ \mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^-]$ *є обмеженим узагальнено-оберненим до лінійного обмеженого оператора* $\Lambda = \mathrm{col}[L, \ell]$.

Теорема 4.16. *Оператор* $\mathcal{P}_{Y_\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \ell L^- & \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \end{bmatrix}$ *є обмеженим проектором банахового простору* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *на підпростір* $Y_\Lambda \subseteq \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}$.

У *п'ятому розділі* «**Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма у банахових просторах**» із застосуванням запропонованих у четвертому розділі конструкцій узагальнено-обернених L^- операторів у банахових і псевдообрернених L^+ у гільбертових просторах, а також доведених теорем про розв'язність лінійних крайових задач для операторних рівнянь розглянуто загальні підходи до аналізу слабконелінійних (з узагальнено оборотною лінійною частиною) операторних рівнянь та крайових задач для них.

У підрозділі 5.1 розглянуто нелінійне операторне рівняння з малим параметром ε

$$(Lz(\cdot,\varepsilon))(t) = f(t) + \varepsilon Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

де L – лінійний обмежений узагальнено оборотний оператор, Z – нелінійна вектор-функція. Для цього рівняння отримано необхідні умови та доведено теореми про достатні умови існування розв'язків. Запропоновано ітераційні алгоритми побудови єдиного та принаймні одного розв'язків, які при $\varepsilon = 0$ обертаються в один із породжуючих розв'язків, доведено збіжність цих ітераційних процедур.

Загальні підходи застосовані до слабконелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах.

У підрозділі 5.2 розглянуто нелінійне операторне інтегральне рівняння Фредгольма з малим параметром $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$

$$z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds, \tag{14}$$

де

(b1) оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ сильно неперервні і діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$;

(b2) оператор-функція $K(t,s)$ діє у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$ по кожній змінній, сильно неперервна по кожній змінній з нормою $|||K||| = \sup\limits_{t,s\in\mathcal{I}} \|K(t,s)\|_{\mathbf{B}_1} = K_0 < \infty$;

(b3) $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ – нелінійна по z обмежена оператор-функція, яка в околі породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \le q$ має сильно неперервну похідну Фреше по z і неперервна по сукупності змінних t, ε; q і ε_0 – досить малі константи; $Z(0, t, 0) = 0$, $Z'_z(0, t, 0) = 0$.

(b4) $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Знайдено умови існування розв'язку $z = z(t, \varepsilon)$ рівняння (14), що визначений в класі вектор-функцій $z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $z(t,\cdot) \in \mathbf{C}[0,\varepsilon_0]$, і який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із породжуючих розв'язків $z_0(t,c) = z(t,0)$ породжуючого операторного рівняння

$$z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds = f(t). \tag{15}$$

Необхідну умову існування розв'язків цієї задачі дає рівняння для породжуючи констант

$$F(c) = \mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0)d\tau ds = 0, \tag{16}$$

яке у випадку періодичних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь називається рівнянням для породжуючих амплітуд[13]

Виконавши у рівнянні (14) заміну змінних

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon),$$

де $z_0(t,c_0)$ – породжуючий розв'язок рівняння (15), а вектор-констант $c_0 \in \mathbf{B}_1$ є дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (16), та використавши розвинення в околі породжуючого розв'язку нелінійної вектор-функції

$$Z(z_0 + x,t,\varepsilon) = Z(z_0(t,c_0),t,0) + T(t)x + R(x,t,\varepsilon),$$

побудовано лінійний обмежений оператор

$$B_0 = \mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)T(\tau)M(\tau)\,d\tau ds\mathcal{P}_{N(D)}.$$

Нехай оператор B_0 – узагальнено оборотний. Позначимо: $\mathcal{P}_{N(B_0)} : N(D) \to N(B_0)$ і $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} : Y_D \to Y_{B_0}$ обмежені проектори, а B_0^- – обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора $B_0 : N(D) \to Y_D$.

Теорема 5.5. *Нехай операторне рівняння* (14) *задовольняє умови* (*b*1)–(*b*4), *а відповідне породжуюче рівняння* (15) *при умові* (10) *має сім'ю породжуючих розв'язків* (11). *Тоді, якщо оператор* B_0 *– узагальнено оборотний і виконуються умови*

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \qquad \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D} = 0, \tag{17}$$

то для кожного елемента $c_0 \in \mathbf{B}_1$, *який задовольняє рівняння для породжуючих констант* (16) *операторне рівняння* (14) *має принаймні один розв'язок* $z(t,\varepsilon)$, *неперервний по* ε, *який обертається в породжуючий розв'язок* $z(t,c_0) = z_0(t,c_0)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на* $[0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу*:

$$c_k(\varepsilon) = B_0^-\left[\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\left\{\int_a^b K(s,\tau)\left[T(\tau)\bar{x}_k(\tau,\varepsilon) + R\left(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\right]d\tau\right\}ds\right],$$

$$\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = f(t) + M(t)D^-\int_a^b N(s)f(s)\,ds +$$

$$+\varepsilon\int_a^b\left[K(t,\tau) + M(t)D^-\int_a^b N(s)K(s,\tau)\,ds\right]\left\{Z\left(z_0(\tau,c_0),\tau,0\right) +\right.$$

$$\left.+T(\tau)\left[M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(\tau,\varepsilon)\right] + R\left(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\right\}d\tau.$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c_k(\varepsilon) + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_0(t,\varepsilon) \equiv \bar{x}_0(t,\varepsilon) \equiv 0,\ z_k(t,\varepsilon) = z_0\left(t,\hat{z}_0\right) + x_k(t,\varepsilon),\ k = 0,1,2,\dots .$$

---

[13] *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

У підрозділі 5.3 розглянуто задачу про умови існування та способи побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач для операторних рівнянь, лінійна частина вихідного рівняння яких є нетеровим оператором. Схема дослідження базується на використанні узагальненого оператора Гріна відповідної лінійної породжуючої напіводнорідної ($\varepsilon = 0,\ \alpha = 0$) крайової задачі.

У підрозділі 5.4, з використанням доведених у підрозділі 5.3 теорем, розглянуто умови існування та побудову ітераційних алгоритмів знаходження розв'язків слабконелінійних інтегральних рівнянь, лінійні частини яких є інтегральними операторами Фредгольма з виродженими ядрами у скінченновимірних гільбертових просторах

$$z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z\big(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)ds, \tag{18}$$
$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon\int_a^b K_1(s)J\big(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)ds,$$

де

(f1) $M(t)$ – $(n\times m)$-, $N(t)$ – $(n\times m)$-, $f(t)$ – $(n\times 1)$-, $K(t,s)$ – $(n\times n)$-, $K_1(t)$ – $(k\times n)$-матриці, компоненти яких належать до гільбертового простору $\mathbf{L}_2[a,b]$;

(f2) $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та $J(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ – нелінійні вектор-функції, які в околі, породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \le q$ мають похідні Фреше по z, неперервні по сукупності змінних t та ε, q, ε – достатньо малі величини;

(f3) $Z(0,t,0) = 0$, $Z'_z(0,t,0) = 0, J(0,0) = 0$, $J'_z(0,0) = 0$;

(f4) $\ell : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^k$ – лінійний обмежений вектор-функціонал;

(f5) $\alpha \in \mathbf{R}^k$.

Необхідну умову існування розв’язків цієї задачі дає система рівнянь для породжуючих констант

$$\int_a^b \Phi_r^*(s)\int_a^b K(s,\tau)Z\big(z_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big) = 0,$$
$$\begin{aligned} P_{N_d(Q^*)}\Bigg\{ &\int_a^b K_1(s)J\big(z_0(s,c_0),\varepsilon\big) - \\ &-\ell\int_a^b K(\cdot,s)Z\big(z_0(s,c_0),s,\varepsilon\big)ds - \\ &-\ell M_1(\cdot)\int_a^b N_1(s)\int_a^b K(s,\tau)Z\big(z_0(\tau,c_0),\tau,\varepsilon\big)d\tau ds\Bigg\} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Виконавши у задачі (18) заміну змінних $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon)$, де $z_0(t,c_0)$ – розв'язок відповідної (18) породжуючої крайової задачі, а вектор $c_0 \in \mathbf{B}_1$ є дійсним коренем системи рівнянь, для породжуючих констант (19), та використавши розвинення в околі породжуючого розв'язку нелінійних вектор-функцій

$$Z(z_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z_0(t,c_0) + L_0(\mathrm{t})x(t,\varepsilon) + R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$
$$J(z_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon),\varepsilon) = J_0(t,c_0) + \ell_0(t)x(t,\varepsilon) + R_1(x(t,\varepsilon),\varepsilon),$$

побудовано сталу матрицю

$$B_0 = \begin{bmatrix} \int_a^b \Phi_r^*(s)\int_a^b K(s,\tau)L_0(\tau)X_\rho(\tau)d\tau ds \\ P_{N_d(Q^*)}\left\{\int_a^b K_1(s)\ell_0(s)X_\rho(s)ds - \ell\int_a^b K(\cdot,s)L_0(s)X_\rho(s)ds - \right. \\ \left. -\ell M_1(\cdot)\int_a^b N_1(s)\int_a^b K(s,\tau)L_0(\tau)X_\rho(\tau)d\tau ds\right\} \end{bmatrix}.$$

розмірністю ($(r + d) \times \rho$).

Позначимо через $P_{N(B_0)}$: $\mathbf{R}^\rho \to N(B_0)$ і $P_{N(B_0^*)}$: $\mathbf{R}^{r+d} \to N(B_0^*)$ – обмежені ортопроектори, а через B_0^+ – $(\rho \times (r + d))$-вимірну псевдообернену матрицю до матриці B_0.

Теорема 5.9. *Нехай крайова задача* (*18*) *задовольняє умови (f1)–(f5), а відповідна* (*18*) *породжуюча крайова задача має сім'ю породжуючих розв'язків. Тоді для кожного елемента* $c_0 \in \mathbf{R}^r$, *що задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант* (*19*), *при виконанні умов*

$$P_{N(B_0)} \neq 0,\ P_{N(B_0^*)}\begin{bmatrix}\Phi_r^*(s) \\ P_{N_d(Q^*)}\end{bmatrix} = 0 \tag{20}$$

крайова задача (*18*) *має принаймні один розв'язок* $z(t,\varepsilon)$ *неперервний по* ε, *що обертається у породжуючий розв'язок* $z(t,c_0)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Цей розв*'язок *знаходиться за допомогою збіжного на* $[0,\varepsilon_*]\subset[0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу*

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0) + x_{k+1}(t,\varepsilon),$$
$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_\rho(t)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon),\ k = 0,1,2,\dots ,$$

$$c(\varepsilon) = -B_0^{+}\begin{bmatrix} \int_a^b \Phi_r^*(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{R}\big(x_k(\tau,\varepsilon),\bar{x}_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big)d\tau ds \\ P_{N_d(Q^*)}\left\{\int_a^b K_1(s)\bar{R}_1\big(x_k(s,\varepsilon),\bar{x}_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)ds - \right. \\ -\ell\int_a^b K(\cdot,s)\bar{R}\big(x_k(s,\varepsilon),\bar{x}_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)ds - \ell M_1(\cdot)\times \\ \left.\times\int_a^b N_1(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{R}\big(x_k(\tau,\varepsilon),\bar{x}_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\big)d\tau ds\right\} \end{bmatrix}, \qquad (21)$$

$$\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Bigg[G\left(\int_a^b K(\cdot,s)\Big\{Z_0(s,c_0) + L_0(s)\big[X_\rho(s)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(s,\varepsilon)\big] + R\big(x_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)ds\Big\}\right)(t) +$$

$$+X_r(t)Q^{+}\int_a^b K_1(s)\Big\{J_0(s,c_0) + \ell_0(s)\big[X_\rho(s)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(s,\varepsilon)\big] + R_1\big(x_k(s,\varepsilon),\varepsilon\big)\Big\}ds\Bigg].$$

В (21) позначено

$$\bar{R}\big(x(s,\varepsilon),\bar{x}(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big) := L_0(s)\bar{x}(s,\varepsilon) + R\big(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big),$$
$$\bar{R}_1\big(x(s,\varepsilon),\bar{x}(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big) := \ell_0(s)\bar{x}(s,\varepsilon) + R_1\big(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big).$$

У *шостому розділі* «**Крайові задачі для операторних рівнянь з імпульсною дією»** із застосуванням отриманих у попередніх розділах результатів, розв’язано задачі про умови існування та алгоритми побудови розв’язків лінійних не всюди розв’язних нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та крайових задач для них, а також нетерові крайові задачі для диференціальних систем із запізненням та імпульсною дією.

Розглянуто лінійну крайову задачу

$$(Lz)(t) = f(t),\ t \in [a,b],\ t \neq \tau_i,$$
$$\Delta z\big|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i -) = a_i,\ i = 1,2,\dots,\eta, \qquad (22)$$
$$\ell z(\cdot) = \alpha, \qquad (23)$$

де $L : \mathbf{D}_p(\mathcal{I},\mathbf{R}^n) \to \mathbf{L}_p(\mathcal{I},\mathbf{R}^n)$ – лінійний нетеровий оператор ($\mu \neq \nu$, $\mu < \infty$, $\nu < < \infty$), $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\lambda$ – фіксована строго впорядкована система точок проміжку $[a,b]$, $\Delta z\big|_{t=\tau_i} = z(\tau_i +) - z(\tau_i -)$, матриці $S_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ такі, що $\det(E - S_i) \neq 0$, $a_i \in \mathbf{R}^n$, $\ell : \mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^m$ – m-вимірний лінійний обмежений векторний функціонал, $\alpha \in \mathbf{R}^m$. $\mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n)$ – простір абсолютно неперервних на кожному з проміжків $[a,\tau_1)$, $[\tau_1,\tau_2)$, …, $[\tau_\eta,b]$ вектор-функцій $z(t)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I},\mathbf{R}^n)$, які неперервні справа в точках $\tau_1, i = \overline{1,\eta}$ і мають у цих точках розриви першого роду.

Для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією (22) доведено наступне твердження.

Теорема 6.1. *Нетерове операторне рівняння з імпульсною дією* (22) *розв'язне для будь-яких* $a_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, \ldots, \eta$ *та тих і тільки тих* $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, *які задовольняють умову*

$$\left(\mathcal{P}_{Y_L} f\right)(t) = 0.$$

При виконанні цієї умови воно має загальний розв'язок

$$z(t,c) = \overline{X}(t)c + \left(L_\Delta^- \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t),\ c \in \mathbf{R}^\mu, \tag{24}$$

де $\overline{X}(t) = X(t)\sum_{i=1}^{k}\prod_{v=k-1}^{i}\overline{S}_v P_{i-1}, t \in \,]\tau_{k-1}, \tau_k]$ – $(n \times \mu)$-*матриця, яка є розв'язком відповідного* (22) *однорідного* ($f(t) = 0$, $a_i = 0$) *нетерового операторного рівняння з імпульсною дією,*

$$\left(L_\Delta^- \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) = \left(L^- f\right)(t) + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\tilde{L}_i^-\right)(t) + \sum_{i-1}^{k-1}\tilde{X}_i(t)a_i,\ t \in \,]\tau_{k-1}, \tau_k]$$

– *узагальнено-обернений оператор до нетерового оператора з імпульсною дією* $L_\Delta = \mathrm{col}[L, \Delta - S_i]$,

Тут

$$\left(\tilde{L}_i^- f\right)(t) = X(t)\prod_{v=k-1}^{i+1}\overline{S}_v\left(L_i^- f\right)(\tau_i),\ \tilde{X}_i(t) = X(t)\prod_{v=k-1}^{i+1}\overline{S}_v X^+(\tau_i),$$

$$\overline{S}_i = X^+(\tau_i)(E + S_i)X(\tau_i),\ \left(L_i^- f\right)(\tau_i) = X^+(\tau_i)S_i\left(L^- f\right)(\tau_i),$$

$P_0 = E_\mu$, $\prod_{v=k}^{i+1}\overline{S}_v = E_\mu$, *якщо* $r < i + 1$, $X^+(\tau_i)$ – *псевдообернені* $(\mu \times n)$-*матриці до* $(\mu \times n)$-*матриць* $X(\tau_i)$; $P_i : \mathbf{R}^\mu \to N(X(\tau_i))$ – *матриці-ортопроектори евклідового простору* $\mathbf{R}^\mu$ *на нуль-простори* $N(X(\tau_i))$ *матриць* $X(\tau_i)$, E_μ – *одинична матриця*.

Позначимо Q^+ – псевдообернену до матрицю до матриці $Q = \ell\overline{X}(\cdot) = \ell X(\cdot)\sum_{i=1}^{\lambda}\prod_{v=\eta-1}^{i}\overline{S}_v P_{i-1}$; $P_{N_r(Q)}$ – $(\mu \times r)$-матрицю, стовпці якої – повна система $r = \mu - \mathrm{rank}Q$ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^\mu \to N(Q)$; $P_{N_d(Q^*)}$ – $(d \times m)$-матрицю, рядки якої – повна система $d = m - \mathrm{rank}Q$ лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{N(Q^*)}$.

Теорема 6.2. *Нехай* $\mathrm{rank}Q < \min(m,\mu)$. *Тоді лінійна крайова задача* (22), (23) *для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією розв'язна для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$, $\alpha_i \in \mathbf{R}^n$, *які задовольняють* $v + d$ *лінійно-незалежні умови*

$$\left(\mathcal{P}_{Y_L} f\right)(\cdot)=0,\ P_{N_d(Q^*)}\left\{\alpha-\ell\left(L_\Delta^-\begin{bmatrix} f \\ a_i\end{bmatrix}\right)(\cdot)\right\}=0.$$

При виконанні цих умов вона має r *лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t,c_r)=\overline{X}(t)c_r+\left(G_\Delta\begin{bmatrix} f \\ a_i\end{bmatrix}\right)(t)+\overline{X}(t)Q^+\alpha, \qquad (25)$$

де $\overline{X}_r(t)=\overline{X}(t)P_{N_r(Q)}$ – $(n\times r)$*-матриця, яка є розв'язком відповідної* (*22*), (*23*) *однорідної* ($f(t)=0$, $\alpha=0$, $a_i=0$) *крайової задачі з імпульсною дією,*

$$\left(G_\Delta\begin{bmatrix} f \\ a_i\end{bmatrix}\right)(t):=\left(L^- f\right)(t)-\overline{X}(t)Q^+\ell\left(L^- f\right)(\cdot)+\sum_{i=1}^{k-1}\left(\tilde{L}_i^-\right)(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{\eta-1}\left(\overline{X}\right)Q^+\ell\left(\tilde{L}_i^- f\right)(\cdot)+\sum_{i=1}^{k-1}\tilde{X}_i(t)a_i-\sum_{i=1}^{\eta-1}\overline{X}(t)Q^+\ell\tilde{X}_i(\cdot)a_i$$

– *узагальнений оператор Гріна відповідної* (*22*), (*23*) *напіводнорідної* ($\alpha=0$) *крайової задачі* з *імпульсною дією* $t\in]\tau_{k-1},\tau_k]$.

Розглянуті методи аналізу лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь у банахових просторах застосовні для вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням аргументу та імпульсною дією з врахуванням їх специфіки та відповідними уточненнями і змінами.

Для диференціального рівняння з запізненням аргументу та імпульсною дією розглянуто лінійну крайову задачу

$$(Lz)(t)\equiv\dot{z}(t)-A(t)S_hz(t)=f(t),\ t\in[a,b],$$

$$\Delta z\big|_{t=\tau_i}=z(\tau_i+0)-z(\tau_i-)=S_iz(\tau_i-)+a_i,\ \tau_i\in]a,b[,\ i=1,\dots,\eta, \qquad (26)$$

$$\ell z(\cdot)=\alpha, \qquad (27)$$

де $L:\mathbf{D}_p(\mathcal{I},\mathbf{R}^n)\to\mathbf{L}_p(\mathcal{I},\mathbf{R}^n)$ – диференціальний оператор з запізненням, S_hz – оператор внутрішньої суперпозиції, $f(t)\in\mathbf{L}_p(\mathcal{I},\mathbf{R}^n)$, $S_j\in\mathbf{R}^{(n\times n)}$ сталі матриці такі, що $(E+S_i)$ невироджені, $a_i\in\mathbf{R}^n$, $\ell=\mathrm{col}[l_1,\dots,l_m]$ – лінійний обмежений m-вимірний вектор-функціонал, визначений на просторі вектор-функцій $\mathbf{D}_p(\mathcal{I}\setminus\{\tau_i\}_I,\mathbf{R}^n)$, $\alpha\in\mathbf{R}^m$.

Теорема 6.3. *Нехай* $\mathrm{rank}(E+S_i)=n$, ($i=1,2,\dots,\eta$). *Тоді задача Коші для диференціальної системи із запізненням та імпульсною дією* (*26*) *розв'язна при будь-яких* $f(t)\in\mathbf{L}_p(\mathcal{I},\mathbf{R}^n)$ *і її розв'язок має вигляд*:

$$z(t)=\overline{X}(t)c+\int_a^b K(t,s)f(s)+\sum_{i=1}^{k-1}\int_\alpha^{\tau_i}\overline{K}_i(t,s)f(s)ds+\sum_{i=1}^{k-1}\overline{X}_i(t)a_i, \qquad (28)$$

де $\overline{X}(t)=X(t)\prod_{v=1}^{k-1}X^{-1}(\tau_v)(E+S_v)X(\tau_v)$ – $(n\times n)$*-матриця відповідної* (*26*) *однорідної* ($f(t)=0$, $a_i=0$) *системи з імпульсною дією* $t\in]\tau_{k-1},\tau_k]$,

$$\overline{K}_i(t,s)=X(t)\prod_{v=k-1}^{i+1}X^{-1}(\tau_v)(E+S_v)X(\tau_v)X^{-1}(\tau_i)S_iK(\tau_i,s),$$

$$\overline{X}_i(t)=X(t)\prod_{v=k-1}^{i+1}X^{-1}(\tau_v)(E+S_v)X(\tau_v)X^{-1}(\tau_i),\ t\in\,]\tau_{k-1},\tau_k].$$

Тут $\prod_{v=k}^{i+1}X^{-1}(\tau_v)(E+S_v)X(\tau_v)=E_n$, якщо $k < i + 1$; $K(t,s)$ – *матриця Коші диференціальної системи із запізненням* $K(t,s) \equiv 0$, *якщо* $s > t$.

Надалі на проміжках $]\tau_{k-1},\tau_k]$ розв'язок (28) будемо записувати у вигляді:

$$z(t)=\overline{X}(t)c+\int_a^b\overline{K}(t,s)f(s)ds+\sum_{i=1}^{k-1}\overline{X}_i(t)a_i,$$

де $\int_a^b\overline{K}(t,s)f(s)ds=\int_a^b K(t,s)f(s)ds+\sum_{i=1}^{k-1}\int_a^{\tau_i}K_i(t,s)f(s)ds.$

Позначимо Q^+ – псевдообернену матрицю до матриці $Q=\ell\overline{X}(\cdot)$, $P_{N_r(Q)}$ – $(n\times r)$-матрицю, стовпці якої є r лінійно-незалежними стовпцями матриці-ортопроектора $P_{N(Q)}:\mathbf{R}^n\to N(Q)$, $r = n - rank\ Q$, $P_{N_d(Q^*)}$ – $(d\times m)$-матриця, рядки якої – d лінійно-незалежні рядки матриці-ортопроектора $P_{N(Q^*)}:\mathbf{R}^m\to N(Q^*)$, $d = m - \operatorname{rank} Q$.

Теорема 6.4. *Нехай* rank $(E + S_j) = n$, $(i = 1,2,\ldots,\eta)$, rank $Q = n_1 \le \min(n,m)$. *Тоді відповідна* (26), (27) *однорідна* ($f(t) = 0$, $a_j = 0$, $\alpha = 0$) *крайова задача має* $r = n - n_1$ *і тільки* r *лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t,c_r)=\bar{X}_r(t)c_r,$$

де $\bar{X}_r(t)=\bar{X}_r(t)P_{N_r(Q)}$ – *фундаментальна* $(n\times r)$-*матриця однорідної крайової задачі.*

Неоднорідна крайова задача (26), (27) *розв'язна для тих і тільки тих* $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I},\mathbf{R}^n)$, $a_i \in \mathbf{R}^n$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$, *які задовольняють* d *лінійно-незалежним умовам*

$$P_{N_d(Q^*)}\left\{\alpha-\ell\int_a^b\overline{K}(\cdot,s)f(s)ds-\sum_{i=1}^{d-1}\ell X_i(\cdot)a_i\right\}=0$$

і при цьому має r-*параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків* $z(t,c_r) \in \mathbf{D}_p(\mathcal{I}\setminus\{\tau_i\}_I,\mathbf{R}^n)$,

$$z(t,c_r)=\bar{X}_r(t)c_r+\left(G\begin{bmatrix}f(\cdot)\\ a_j\end{bmatrix}\right)(t)+\bar{X}(t)Q^+\alpha,$$

де G – *узагальнений оператор Гріна напіводнорідної* ($\alpha = 0$) *крайової задачі з імпульсною дією* (26), (27), *який на проміжках* $]\tau_{k-1},\tau_k]$ *діє на вектор-функцію* $f(t)$ *та ветор-стовпці* a_i *за правилом*:

$$\left(G\begin{bmatrix} f(\cdot) \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) := \int_a^b K(t,s) f(s)ds - \overline{X}(t)Q^{+}\ell\int_a^b K(\cdot,s) f(s)ds +$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\int_a^{\tau_i}\overline{K}_i(t,s) f(s)ds - \overline{X}(t)Q^{+}\sum_{i=1}^{\eta-1}\ell\int_a^{\tau_i}\overline{K}_i(\cdot,s) f(s)ds + \tag{29}$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\overline{X}_i(t)a_i - \overline{X}(t)Q^{+}\sum_{i=1}^{\eta-1}\ell\overline{X}_i(\cdot)a_i.$$

У підрозділі 6.3 результати підрозділу 6.2 використано для дослідження умов розв'язності та побудови розв'язків слабконелінійної крайової задачі для імпульсної диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією.

$$(Lz)(t) := \dot{z}(t) - A(t)(S_h z)(t) = f(t) + \varepsilon Z\big((S_h z)(t), t, \varepsilon\big),$$
$$\Delta\big|_{t=\tau_i} - S_j z(\tau_j -) = \alpha_j + \varepsilon J_j\big((S_h z)(\tau_j -, \varepsilon), \varepsilon\big), \tag{30}$$
$$\ell z = \alpha + \varepsilon J\big((S_h z)(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big).$$

Для поставленої задачі отримано необхідні умови існування розв'язків, побудовано рівняння для породжуючих констант, із застосуванням проекторів отримано достатні умови існування принаймні одного розв'язку та запропоновано (з використанням узагальненого оператора Гріна (29) відповідної лінійної напіводнорідної крайової задачі) збіжні ітераційні процедури для побудови її розв'язків.

ВИСНОВКИ

В роботі запропоновано загальну концепцію дослідження лінійних та слабконелінійних крайових задач для нормально розв'язних операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах. В дослідженні виділені класи узагальнено оборотних і, як наслідок, нормально розв'язних операторів, для яких побудовано обмежені узагальнено-обернені та псевдообернені оператори. Це оператори наступних класів: топологічно нетерові, топологічно фредгольмові, *n*-нормальні з доповнювальним образом, *d*-нормальні з доповнювальним ядром, нетерові та фредгольмові.

Загальні методи дослідження крайових задач для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами застосовано до дослідження лінійних та слабконелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах та лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією, а також нетерових крайових задач для диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією.

1. Для встановлення загального вигляду узагальнено оборотних операторів доведено аналоги леми Е. Шмідта для топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, *n*– та *d*– нормальних операторів у банахових та гільбертових

просторах. На основі цих лем, для всіх перелічених класів нормально розв'язних операторів з доповнювальним ядром та образом, доведено теореми про їх загальний вигляд, які узагальнюють теореми С. М. Нікольського про загальний вигляд фредгольмових та Ф. Р. Аткінсона про загальний вигляд нетерових операторів.

2. З використанням теорем про загальний вигляд узагальнено оборотних операторів доведено теореми, в яких отримано формули для побудови обмежених узагальнено-обернених операторів до топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, n-нормальних та d-нормальних у банахових просторах. Запропоновано формули для обчислення псевдообернених операторів до нормально розв’язних у гільбертових просторах. Загальні підходи застосовані до дослідження інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром, для яких встановлено умови їх топологічної фредгольмовості та запропоновано конструкції обмежених узагальнено-обернених та псевдообернених операторів у банахових та гільбертових просторах.

3. Встановлено критерії розв’язності та запропоновано формули для представлення загальних розв’язків лінійних не всюди розв’язних операторних рівнянь з обмеженими узагальнено оборотними операторами. Використовуючи отримані в роботі результати отримано необхідні та достатні умови та вигляд загальних розв’язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.

4. Доведено теореми про необхідні та достатні умови існування та представлення загальних розв’язків лінійних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових та гільбертових просторах. Застосовуючи методи дослідження крайових задач для не всюди розв’язних операторних рівнянь доведено теореми про умови існування розв’язків лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах та запропоновано формули для представлення їх загальних розв'язків. Досліджено властивості узагальненого оператора Гріна та його зв'язок з узагальнено-оберненим оператором до оператора лінійної крайової задачі.

5. Для слабконелінійних операторних рівнянь (лінійна частина яких – оператор з доповнювальними ядром та образом) та крайових задач для них отримано необхідні умови існування розв'язків, побудовано операторне рівняння для породжуючих елементів, отримано достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язків, запропоновано ітераційні процедури для їх побудови та доведено їх збіжність. Загальні підходи застосовані до дослідження крайових задач застосовані до дослідження слабконелінійних

крайових задач для ітераційних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у скінченновимірних гільбертових просторах, побудовано систему рівнянь для породжуючи констант, отримано достатні умови існування принаймні одного розв’язку, побудовано збіжні процедури для знаходження розв’язків таких задач.

6. Доведено теореми про необхідні та достатні умови існування та представлення загальних розв'язків нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та лінійних крайових задач для них.

7. Для лінійних диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією отримано умови існування та формулу представлення загальних розв'язків. Доведено теореми про необхідні та достатні умови існування та представлення загальних розв'язків лінійних нетерових крайових задач для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією.

9. Для слабконелінійних крайових задач для диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією у скінченновимірних банахових просторах побудовано рівняння для породжуючих констант, отримано достатні умови існування принаймні одного розв'язку та запропоновано збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків таких задач.

ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

МОНОГРАФІЯ

1. *Бойчук А.А.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.

СТАТТІ

2. *Бойчук А. А.* Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в банахових пространствах / А. А. Бойчук, В. Ф Журавлев // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 10. – С. 1343 – 1350.
3. *Бойчук А. А.* Линейнне нетеровы краевне задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием / А. А. Бойчук, В. Ф Журавлев, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 1994. Т. 30. № 10. – С. 1677 –1682.
4. *Журавлев В. Ф.* Линейные краевые задачи для нетеровых операторных уравнений с импульсным воздействием / В.Ф. Журавлев // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 8. – С. 1035 – 1042.
5. *Самойленко А. М.* Слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 2. – С. 272 – 289.

6. *Журавлев В. Ф.* Решение нормально разрешимых операторных уравнений в банаховых пространствах с базисом / В. Ф. Журавлев // Доклады академии наук. Российская академия наук. – 1997. – Т. 352, № 3. – С. 304 – 306.
7. *Журавлев В. Ф.* Обобщение теоремы С. М. Никольского на случай нормально разрешимых операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах / В. Ф. Журавлев //Доклады академии наук. Российская академия наук. – 1997. – Т. 355. № 3. – С. 303 – 305.
8. *Журавлев В. Ф.* Обобщение теоремы Ф. В. Аткинсона на случай нормально разрешимых операторов в банаховых пространствах / В. Ф. Журавлев // Доклады академии наук. Российская академия наук. – 1998, – Т. 358, № 2. – С. 157 – 159.
9. *Журавлев В. Ф.* Обобщение леммы Шмидта на случай *n*– (*d*)– нормальных операторов в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 443 – 450.
10. *Журавлев В. Ф.* Краевые задачи для линейных уравнений с обобщенно обратимым оператором в банаховом пространстве с базисом. / В. Ф. Журавлев // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 13, № 4. – С. 522 – 532.
11. *Журавлев В. Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных *n*– (*d*)–нормальных операторних уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 2. – С. 167 – 182.
12. *Журавльов В. П.* Лінійні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь у банаховому просторі. / В. П. Журавльов // Науковий вісник Чернівецького університету. Сер. Математика. – 2010. – Вип. 528. – С. 51 – 57.
13. *Журавлев В. Ф.* Построение обобщенно обратного оператора к матричному в банаховом пространстве. / В. Ф. Журавлев // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика, –2010. – В. 21. – С. 61 – 71.
14. *Журавльов В. П.* Загальний вигляд *n*–нормальних та *d*–нормальних операторів у банаховому просторі / В. П. Журавльов // Науковий вісник Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича. Сер. математика. – 2011 – Т. 1, № 4. – С. 52 – 58.
15. *Журавлев В. Ф.* Псевдообратный оператор к матричному в бесконечномерном гильбертовом пространстве / В.Ф. Журавлев // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. 2011. – Вип. 22, № 1. С. 52–63.
16. *Журавлев В. Ф.* Слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений в критическом случае / В.Ф. Журавлев // Динамические системы, Симферополь: Таврический нац. ун-т им. В. И. Вернадского. – 2011, Т. 1(29), № 2. – С. 227 – 241.

17. *Журавльов В. П.* Слабконелінійні крайові задачі для операторних рівнянь з нетеровою лінійною частиною / В. П. Журавльов // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. – 2011. – Вип. 22, № 2. С. 79–92.
18. *Журавлев В. Ф.* Краевые задачи для интегральных уравнений с внрожденным ядром / В.Ф. Журавлев // Нелинейные колебания. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 36 – 52.
19. *Журавлев В. Ф.* Критерий разрешимости и построение решений нормально разрешимых операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Журавлев // Нелинейные колебания. – 2012, Т. 15, № 2. – С. 165 – 177.
20. *Бойчук А. А.* Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. А. Покутный // Укр. мат. журнал. – 2013, Т. 65, № 2. – С. 163 – 174.
21. *Бойчук А. А.* Построение псевдообратного оператора в гильбертовом пространстве / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев // Моделировение динамики деформируемых сред. – Киев: Наукова думка, 1993. – С. 33 – 38.
22. *Журавлев В. Ф.* Линейные краевые задачи для нормально разрешимых операторных уравнений / В. Ф. Журавлев // 20-th Summer School "Appcations of Mathematics in Engineering". – Bulgria: Sofia, 1995. – P. 232 – 247.

ТЕЗИ

23. *Журавлев В. Ф.* О разрешимости и построении решений краевых задач для нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах / В. Ф. Журавлев // Моделирование и исследование устойчивости физических процессов: Тез. докл. III научно-технического семинара 24 – 27 мая 1992 г. – Киев, 1992. – С. 59 – 60.
24. *Журавлев В. Ф.* Краевые задачи для слабонелинейных операторных уравнений с нетеровой линейной частью в гильбертовых пространствах / В. Ф. Журавльов // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики – вторые боголюбовские чтения: Тез. докл. Конференции 14 – 18 сентября 1882 г. – Киев, 1992. – С. 60.
25. *Журавлев В. Ф.* Анализ слабонелинейных краевых задач с нетеровой линейной частью / В. Ф. Журавлев // Моделирование и исследование устойчивости физических процессов: Тез. докл. IV научно-технического семинара 24 – 28 мая 1993 г. – Киев, 1993. – Ч. 1. – С. 50 – 51.
26. *Zhuravlev V. F.* Nonlinear Boundary Value Problems with normally solved Linear Part in Banach Spaces / V. F. Zhuravlev // Abstract International

Conference "Nonlinear Differentional Equations", 21 – 27 August 1995. – Kiev, 1995. – P. 184.

27. *Журавлев В. Ф.* Обобщенное обращение нормально разрешимых операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах / В. Ф. Журавлев // Моделирование и исследование устойчивости систем (моделирование систем): Тез. докл. конференции 15 – 19 мая 1995 г. – Киев, 1995. – С. 44.
28. *Журавлев В. Ф.* Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в критических случаях / В. Ф. Журавлев, Л. Г. Плесканева // П’ята Міжнародна Наукова Конференція імені академіка М. Кравчука: Тез. доп. конф. 16 – 18 мая 1996 г. – Киев, 1996. – С. 149.
29. *Журавлев В.Ф.* Обобщение теоремы Ф. Р. Аткинсона на случай нормально розрешимости операторов в гильбертовых пространствах и ее применение / В. Ф. Журавльов // Моделирование и исследование устойчивости систем: Тез. докл. конференции 20 – 24 мая 1996 г. – Киев, 1996. – С. 52.
30. *Журавлев В. Ф.* Обобщение теоремы Ф. Р. Аткинсона на случай нормально розрешимости операторов в гильбертовых пространствах и ее применение / В. Ф. Журавльов // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування: Тез. доп. конф. 15 – 18 травня 1996 г. – Київ, 1996. – С. 67.
31. *Журавлев В. Ф.* Линейные краевые задачи для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / В. Ф. Журавлев // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-ти річчя академіка А. М. Самойленка: Тез. доп. конф. 18 – 21 червня 2008 р. – Мелітополь, 2008. – С. 50.
32. *Журавлев В. Ф.* Построение обобщенно обратного оператора к нормально разрешимому в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // International Conferese "Dynamical system modeling and stability investigation": Thesis of conference reports May 27 – 29, 2009. – Kyiv, 2009. – P. 63.
33. *Журавлев В. Ф.* Узагальнення леми Шмідта на випадок *n*- (*d*-) нормальних операторів у банаховому просторі / В. П. Журавлев // Міжнародна конференція до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди: Тез. докл. конф. 8 – 13 червня 2009 р. – Чернівці, 2009. – С. 48 – 49.
34. *Журавлев В. Ф.* Условия разрешимости и представление решений нормально разрешимых операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Український математичний конгрес – 2009 (до 100-річчя М. М. Боголюбова): Тез. докл. конгресу 27 – 29 серпня 2009 р. – Київ, 2009. – http: // imath.kiev.ua/congress2009/partUMC2009.htm
35. *Журавлев В. Ф.* Линейные краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // XIII Міжнародна конференція ім. академіка М. Кравчука: Тез. доп. конф. 13 – 15 травня 2010 р. – Київ, 2010. – С. 158.

36. *Журавлев В. Ф.* Краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Десята Кримська міжнародна математична школа "Метод функций Ляпунова и его приложения", Крим, Алушта: Тез. доп. конф. 13 – 18 вересня 2010 р. – Симферополь, 2010. – С. 50.
37. *Журавлев В. Ф.* Краевые задачи для нетеровых операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Международная научно-техническая конференция SAIT 2011 "Системный анализ и информационные технологии". Киев: Тез. доп. конф. 23 – 28 мая 2011 г. – Киев, 2011. – С. 89.
38. *Журавлев В. Ф.* Нормально разрешимые краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная выдающемуся математику И. Г. Петровскому: Тез. докл. конференции 29 мая – 4 июня 2011 г. – Москва, 2011. – С. 191 – 192.
39. *Журавлев В. Ф.* Слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Международная конференция "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем": Тез. докл. конференции 25 – 27 мая 2011 г. – Киев, 2011. – С. 78.
40. *Журавльов В. П.* Умови існування та представлення розв'язків лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння / В.П. Журавльов // IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академика Я. С. Підстригана КМУ СПММ-2011: Тез. доп. конф. 24 – 27 травня 2011 г. – Львів, 2011. – С. 93.
41. *Журавльов В. П.* Узагальнений оператор Гріна лінійної крайової задачі для імпульсного нетерового операторного рівняння / В.П. Журавльов // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету ім. Тараса Шевченка: Тез. доп. конф. 8 – 10 червня 2011 року. – Київ, 2011. – С. 80.
42. *Журавльов В. П.* Узагальнений оператор Гріна лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння / В. П. Журавльов // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Тез. доп. конференції 19 – 21 квітня 2012 р. – Т. 1. – Київ, 2012. – С. 180 – 181.
43. *Журавльов В. П.* Слабконелінійні крайові задачі для операторних рівнянь з нетеровою лінійною частиною / В. П. Журавльов // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 50-річчю кафедри прикладної математики: Тез. докл. конф. 11 – 13 червня 2012 р. – Чернівці, 2012. – С. 34.
44. *Zhuravlev V. F.* Normally solvable operator equations in the Banach spaces / V. F. Zhuravlev // Conference of Difference Equations and Applications: Abstracts 25–29 June, 2012. – Terechova, Slovakia. – P. 59 – 60.

45. *Boichuk A.A.* Dichotomy on semiaxes and bounded solutions of systems with delay / A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlyov // Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications": Abstracts 04–09 September, 2012. – Mersin, Turkey. – P. 32.
46. Журавлев В. Ф. Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденым ядром в банаховых пространствах / В. Ф. Журавльов // Abstracts XVI International Conference “Dynamical system modeling and stability investigation”, May 29 – 31: Kiev, 2013. – P. 90.
47. Журавльов В. П. Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі / В. П. Журавльов // Міжнародна наукова конференція «Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження А. М. Самойленка: Тез. доп. конф. 23 – 30 червня 2013 р. – Севастополь, 2013. – С 97 – 98.
48. Журавльов В. П. Побудова розв’язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах / В. П. Журавльов // Міжнародна математична конференція «Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка: Матеріали конф. 12 – 14 червня, 2013. – Слов’янськ, Укріна. – С. 13 – 14.

АНОТАЦІЇ

1. Журавльов В. П. Узагальнено оборотні оператори та нормально розв'язні крайові задачі у банахових просторах. — Рукопис. — Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2013.

Дисертаційну роботу присвячено розробці загальної концепції дослідження умов розв'язності та структури загальних розв'язків крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами в банахових та гільбертових просторах.

В роботі узагальнено відому лему Е. Шмідта, доведено теореми, які узагальнюють теореми С. М. Нікольського та Ф. Р. Аткінсона про загальний вигляд узагальнено оборотних операторів у банахових та гільбертових просторах, отримано формули для побудови обмежених узагальнено-обернених та псевдообернених операторів до нормально розв'язних операторів у банахових та гільбертових просторах.

Визначено необхідні та достатні умови існування та загальний вигляд розв'язків лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром,

нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією, диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією у банахових та гільбертових просторах та крайових задач для них.

Для слабконелінійних операторних рівнянь (лінійні частини яких — не всюди розв'язні оператори Фредгольма з виродженим ядром), імпульсних диференціальних систем з запізненням та слабконелінійних крайових задач для них отримано необхідні умови існування розв'язків, побудовано рівняння для породжуючих констант, яке дає необхідні умови існування розв’язків, отримано достатні умови існування принаймні одного розв'язку, запропоновано збіжні ітераційні алгоритми для їх побудови.

Ключові слова. Узагальнено оборотний оператор, доповнювальний простір, крайова задача, псевдообернений та узагальнено-обернений оператор, узагальнений оператор Гріна, інтегральне рівняння Фредгольма, нетерове операторне рівняння з імпульсною дією, диференціальна система з запізненням та імпульсною дією.

2. Журавлев В. Ф. Обобщенно обратимые операторы и нормально разрешимые краевые задачи в банаховых пространствах. – Рукопись. – Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2013.

Диссертация посвящена разработке общей концепции исследования условий разрешимости и представления общих решений линейных краевых задач для не всюду разрешимых операторных уравнений с обобщенно обратимыми операторами и слабонелинейных краевых задач для операторных уравнений с обобщенно обратимой линейной частью в банаховых и гильбертовых пространствах. В работе выделенные классы обобщенно обратимых, нормально разрешимых операторов: топологически нетеровых, топологически фредгольмовых, n-нормальных с дополняемым образом, d-нормальных с дополняемым ядром. Для операторов каждого из этих классов доказан аналог леммы Е. Шмидта и теоремы об их общем виде, которые обобщают теоремы С. М. Никольського об общем виде фредгольмовых и Ф. Р. Аткинсона об общем виде, соответственно, фредгольмовых и нетеровых операторов в банаховых пространствах.

С использованием теорем об общем виде обобщенно обратимых операторов доказаны теоремы, в которых получены формулы для построения ограниченных обобщенно-обратных операторов к топологически нетеровым, топологически фредгольмовым, n-нормальным и d-нормальным в банаховых пространствах. Введены понятия левого, правого псевдообратных операторов, предложены формулы для их вычисления, а также конструкции псевдообратных операторов к нормально разрешимым операторам перечисленных выше классов в гильбертовых пространствах. Общие подходы применены к исследованию интегральных операторов Фредгольма с вырожденным ядром, для которых установлены условия их обобщенной обратимости и предложены конструкции ограниченных обобщенно-обратных и псевдо-обратных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах.

Используя проекторы и конструкции ограниченных обобщенно-обратных операторов в банаховых и псевдообратных операторов в гильбертовых пространствах, получены критерии разрешимости и общий вид решений линейных не всюду разрешимых операторных уравнений с ограниченными обобщенно обратимыми операторами и краевых задач для них, которые применены к интегральным уравнениям Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых и гильбертовых пространствах и краевым задачам для них. Построен обобщенный оператор Грина для этих задач, изучены его свойства.

Для слабонелинейных операторных уравнений, линейная часть которых – нормально разрешимый оператор с дополняемыми ядром и образом, получены необходимые условия существования решений, построено операторное уравнение для порождающих элементов, получены достаточные условия существования единственного и по крайней мере одного решений, предложены итерационные алгоритмы для построения этих решений, доказана их сходимость. Общие подходы применены к исследованию условий существования решений слабонелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах, линейная часть которых – не всюду разрешимые операторные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Получены необходимые условия существования решений, построено операторное уравнение для порождающих констант, установлены достаточные условия существования по крайней мере одного решения, предложен сходящийся итерационный алгоритм для его построения.

Определены необходимые и достаточные условия существования по крайней мере одного решения слабонелинейных краевых задач, линейные части исходных уравнений которых – нетеровы операторы. Предложены сходящиеся итерационные процедуры для построения этих решений. Установлены необходимые и достаточные условия существования решений слабонелинейных краевых задач для интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в конечномерных гильбертовых пространствах.

Получены необходимые и достаточные условия существования и представления общих решений нетерового операторного уравнения с импульсным воздействием и дифференциальной системы с запаздыванием и импульсным воздействием, а также необходимые и достаточные условия существования и формулы для представления общих решений линейных краевых задач для нетеровых операторных уравнений с импульсным воздействием и нетеровых линейных краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием и импульсным воздействием. Для слабонелинейных краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием и импульсным воздействием построено операторное уравнение для порождающих констант, с применением проекторов получены достаточные условия существования по крайней мере одного решения и предложены сходящиеся итерационные алгоритмы для построения решений таких задач.

Ключевые слова: обобщенно обратимый оператор, дополняемое пространство, краевая задача, псевдообратный и обобщенно-обратный операторы, обобщенный оператор Грина, интегральное уравнение Фредгольма, нетерово операторное уравнение с импульсным воздействием, дифференциальная система с запаздыванием и импульсным воздействием.

3. Zhuravlev V. F. (Generalized inverse operators and normally solvable boundary value problems in Banach spaces. – Manuscript. The thesis for a scientific, degree of Doctor of physical and mathematical science on the speciality 01.01.02 – Differential Initiations, Taras Shevchenko National University of Kyiv MES of Ukraine, Kyiv, 2013.

The dissertation is devoted the development of the general concept of the investigations of the conditions of existence of solutions and structure of general solutions of boundary value problems for operator equations with generalized inverse operators in Banach and Hilbert spaces, when the above operator equations being not always solvable.

The noted lemma of E. Schmidt is generalized; the theorems which generalize theorems of S. M. Nikol'sky and F. R. Atkinson related to the general form of generalized inverse operators in Banach and Hilbert spaces are proved; the formulas for construction of bounded generalized inverse and pseudo-inverse operators for normally solvable operators in Banach and Hilbert spaces are obtainned.

The necessary and sufficient conditions of existence and the general form of solutions for Fredholm's linear integral equations with degenerate kernel, impulseve Noethers operator equations, impulsive differential systems with delay in Banach and Hilbert spaces and boundary value problems for these operator equations are obtained.

The author constructs the equation for generating constants, which gives a necessary condition for the existence of solutions; obtains sufficient conditions of existence of at least one solution; suggests convergent iteration algorithms for construction of solutions for weakly nonlinear operator equations (with not always solvable linear parts), for impulsive systems with delay, for weakly nonlinear boundary value problems and gets sufficient conditions for existence of these solutions.

Key words: generalized inverse operator, complemented space, boundary value problem, pseudo-inverse operator, Fredholm's integral operator, impulsive Noether's operator equations, impulsive differential system with delay.