УДК 51-76:630

ПРОЦЕС ПРИРОДНОГО РУЙНУВАННЯ ДЕРЕВОСТАНІВ: ПОКАЗНИКОВА МОДЕЛЬ

Петращук М. Я., студент, Корнійчук О.Е., к.п.н., ЖНАЕУ, м. Житомир

Математичне моделювання різних аспектів функціонування деревостанів та лісових екосистем дає змогу достовірніше прогнозувати їх продуктивність та захист. Під час вирішення лісовпорядкувальних задач побудова математичних моделей, у більшості випадків, має наближений характер: дерево, як і будь-яка рослина, є біологічним об'єктом. Але ці моделі є необхідними задля раціонального ведення лісового господарства та оптимізації заходів керування процесом експлуатації лісів.

У цьому дослідженні представлено деякі *диференціальні моделі* процесу природного руйнування деревостанів.

Модель 1: *руйнування деревостанів внаслідок буревію*. Побудуємо диференціальну модель впливу буревію на ділянку лісу. Вітер, проходячи крізь ліс, зазнає опору дерев, внаслідок чого втрачає частину своєї швидкості. На дуже короткому проміжку шляху ця втрачена швидкість пропорційна довжині цього проміжку й швидкості на початку шляху. Нехай на відстані $\boldsymbol{x}$ від початку лісових насаджень швидкість вітру становитиме V. Тоді $-dV$ – втрачена швидкість на ділянці лісу dx (процес спадання швидкості). Вважаючи, що втрачена швидкість ($-dV$) пропорційна dx й V, таку залежність можна подати у вигляді диференціального рівняння:

$$-dV = kVdx,$$

де k – певний безрозмірний коефіцієнт.

Знаходимо загальний інтеграл цього рівняння:

$$-\int \frac{dV}{V} = \int kdx, \quad -ln|V| = kx + C, \quad V = \pm e^{-kx-C} = \pm e^{-C} \cdot e^{-kx}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння: $V = Be^{-kx}$ ($B = \pm e^{-C}$).

Припускаючи, що за початкових умов $x = 0$, $V = V_0$, отримаємо

$$V = Be^0,\ V = V_0 = B.$$

Звідси частинний розв'язок: $V = V_0 e^{-kx}$.

Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з додаткової умови задачі. Нехай для $x = 1м$, швидкість вітру була V_1, тоді $V_1 = V_0 e^{-k}$, тоді $k = -ln\frac{V_1}{V_0}$ і закон зміни швидкості матиме вигляд: $V = V_0 e^{\ln\frac{V_1}{V_0}x}$.

Унаочнення зміни швидкості вітру при V_0 = 30 м/с і V_1 = 29,5 м/с представлено на рисунку 1.

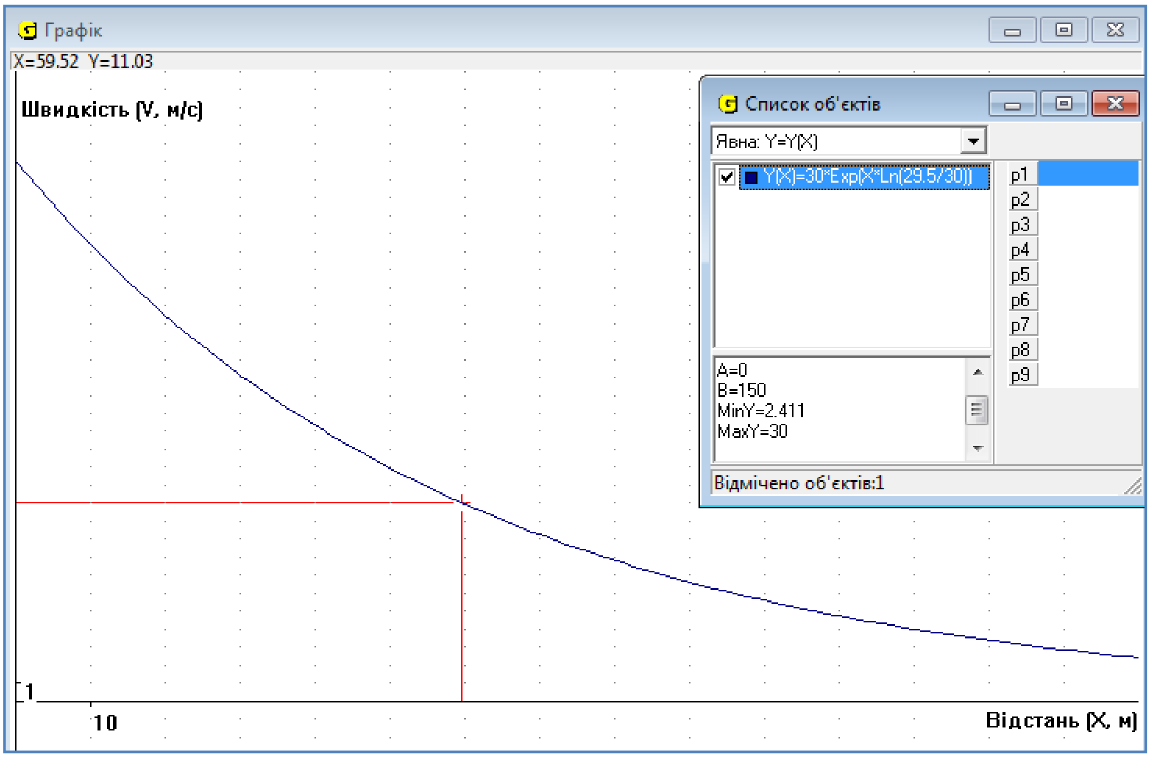

Рис. 1. *Динаміка швидкості вітру*

Зауважимо, що диференціальне рівняння вигляду $y' = ky$ $(\frac{dy}{dx} = ky)$ називають рівнянням *показникового зростання* або математичною моделлю природного приросту.

Розв'язком цього рівняння є експоненціальна (показникова) функція $y = y_0 e^{kt}$, де y_0 – початкова кількість об'єкту дослідження, k – коефіцієнт приросту і $k \approx \frac{\Delta y}{y}$, коли відносний приріст досить малий (Δy – приріст за достатньо малу одиницю часу Δt). Якщо приріст задано у процентах ($p\%$), то $k \approx \frac{p}{100}$. При $k > 0$ кількість збільшується, при $k < 0$ – зменшується.

Криву, рівняння якої $y(t) = a \cdot e^{kt}$ називають *показниковою кривою*. Позначивши $b = e^k$, рівняння цієї кривої можна записати як $y(t) = a \cdot b^t$. При $b > 1$ $y(t)$ зростає, а при $0 < b < 1$ – спадає із зростанням t (рис.1). Параметр a характеризує початкові умови, а параметр b – сталий темп зростання.

Такі рівняння описують також зростання народонаселення, динаміку зростання цін в умовах інфляції, процес радіоактивного розпаду тощо [1].

Модель 2: *природне відмирання дерев*. Нехай на певній ділянці лісового масиву маємо $m(t)$ – середню кількість дерев у момент часу t і в станах A та B. До стану A зараховуємо дерева здорові, а до стану B – ослаблі та сильно ослаблі. Очевидно, швидкість зміни стану дерев $m(t)$ у часі можна задати диференціальним рівнянням $\frac{dm}{dt} = A - B$.

Припускаючи, що $A = am$, $B = bm$, отримаємо $\frac{dm}{dt} = m(a - b)$, де a, b – коефіцієнти росту відповідно здорових та відмираючих дерев за одиницю часу. Вважаючи, що у момент часу $t = t_0$, кількість здорових дерев $m = m_0$, маємо показникову модель вигляду: $m(t) = m_0 e^{(a-b)(t-t_0)}$.

З цього розв'язку випливає, якщо $a > b$ і $t \to \infty$, то кількість здорових дерев $m \to \infty$. Якщо ж $a < b$ і $t \to \infty$, то кількість здорових дерев $m \to 0$, тобто буде відмирати весь масив.

Тут наведено достатньо просту модель, яка насправді дуже наближено відображає дійсність. Практично усі моделі, які описують реальні явища і процеси, за своєю будовою є нелінійними.

Модель 3. Розглянемо, наприклад, нелінійну модель процесу відмирання дерев у вигляді диференціального рівняння $\frac{dm}{dt} = am - bm^2$, розв'язок якого $m(t) = \frac{m_0 \cdot \frac{a}{b} \cdot e^{a(t-t_0)}}{m_0 \cdot e^{a(t-t_0)} + \left(\frac{a}{b} - m_0\right)}$ подається так званою *логістичною кривою*.

За цією моделлю при $t \to \infty$ масив $m \to \frac{a}{b}$. Природно, що $a > b$, і така модель може більш реально відображати картину досліджуваного процесу.

В окремих випадках математичне моделювання лісівничих процесів є єдино можливим та ефективним методом дослідження [2]. Динаміка лісового фонду, процеси зростання деревостанів або їхнього руйнування природним шляхом чи внаслідок антропогенних, зовнішніх впливів, вироблення підходів щодо якісної оцінки і прогнозування життєвості лісових екосистем у разі дії на них чинників живої та неживої природи, а також людської діяльності, є типовими прикладами тих питань, коли не можна обійтись без застосування математичних моделей.

Література

1. Корнійчук О.Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики / О.Е. Корнійчук // Сборник научных трудов межд. коференции «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2016». – Днепропетровск : НГУ, 2016. – С. 431-440.

2. Думанський О.І. Диференційні моделі у задачах лісового господарства / О.І. Думанський, Ю.М. Дебринюк // Наукові праці Лісівничої академії наук України : збірник наук. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України, 2008. – Вип. 6. – С. 170-174.