

УДК 51-76:639.1.03

ПОПУЛЯЦІЙНА ДИНАМІКА МИСЛИВСЬКИХ ТВАРИН: ЛОГІСТИЧНА МОДЕЛЬ

Моїсєєва А.В., студентка, Корнійчук О.Е., к.п.н., ЖНАЕУ, м. Житомир

Для ґрунтового аналізу і планування лісового та мисливського менеджменту поряд з традиційними методами, які базуються на вихідних статистичних даних, ефективним й перспективним напрямом виступає математичне моделювання природних процесів. Лінійна статистична модель достатньою мірою не забезпечує вимоги лісових екосистем. Побудова і дослідження нелінійних, динамічних моделей давно і успішно впроваджується у зарубіжній практиці ведення господарства – для прогнозування та знаходження оптимальних методів і стратегій лісокористування та мисливства.

Елементарний об'єкт мисливського господарства – популяції тварин. Управління популяціями – це система взаємопов'язаних заходів, спрямованих на охорону, відтворення і раціональне використання ресурсів тварин і отримання максимуму продукції при мінімізації шкоди навколишньому середовищу і самим популяціям.

Розглянемо модель експлуатованої популяції, наприклад косуль, для якої проводиться промисловий відстріл.

Нехай динаміка чисельності косуль у лісі за відсутності антропогенного втручання описується за допомогою логістичного рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x), \quad (1)$$

де $x = x(t)$ – чисельність популяції у лісі в момент часу t . Причому чисельність вимірюється у сотнях, а час у роках.

Знайти залежність $x(t)$, якщо початкова чисельність $x(0) = 0,8$ (сотні), $k = 2$ (коефіцієнт, що враховує показники народжуваності та смертності у межах популяції), гранична чисельність популяції $M = 4$ (сотні).

$$\text{Розв'язання. } \frac{dx}{dt} = 2x(4-x) \Rightarrow \frac{dx}{4x-x^2} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dx}{(x-2)^2 - 2^2} = -2 \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| = -2t + C_1 \Rightarrow \frac{x-4}{x} = Ce^{-8t}, \text{ де } C = \pm e^{4C_1}.$$

$$\text{Оскільки } Q(0) = 0,8, \text{ то } C = \frac{-3,2}{0,8} = -4, \text{ тоді } 1 - \frac{4}{Q} = -4e^{-8t} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{4}{1+4e^{-8t}}}.$$

Графік отриманої функції зображено на рисунку 1. Ця S-подібна крива називається *логістичною кривою* (або *кривою Перла-Ріда*).

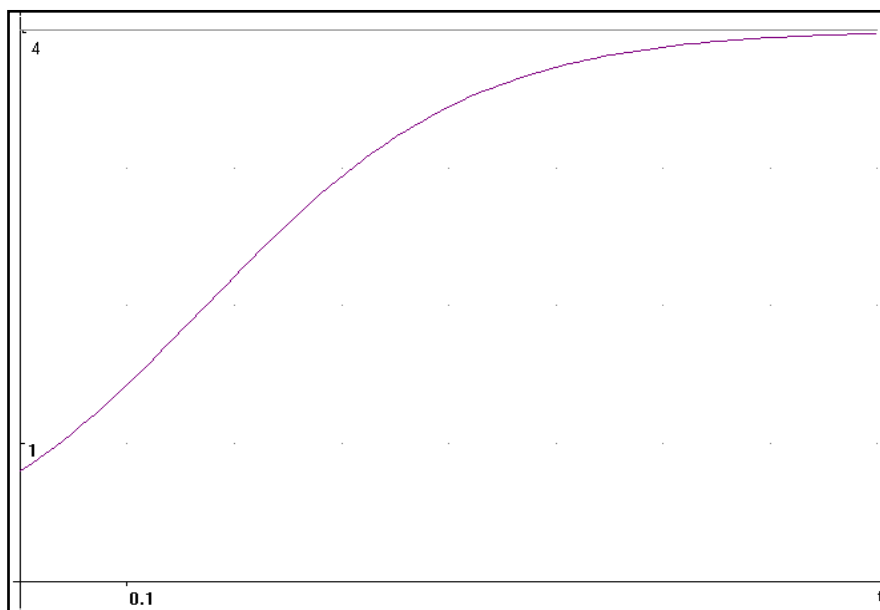


Рис. 1. Логістична крива

Логістична крива – це графік функції, яка має вигляд $y(t) = \frac{m}{1+be^{-at}}$, де a і b – додатні параметри, m – граничне значення функції при $t \rightarrow +\infty$. Ця крива має точку симетрії, що співпадає з точкою перегину [1].

Зауважимо, що у рівнянні (1) значення M іноді називають *потенціальною ємністю екологічної системи*, припускаючи, що вона дорівнює максимальній чисельності популяції, яку середовище може підтримувати тривалий час.

Логістичні моделі також описують процес розповсюдження рекламних повідомлень, динаміку епідемій, процес розмножування бактерій в обмеженому середовищі тощо.

Продовжуючи постановку задачі, припускаємо, що проводиться промисловий відстріл косуль. За умови, що швидкість відстрілу постійна і дорівнює h , необхідно записати рівняння відстрілу та виконати аналіз динаміки популяції в залежності від швидкості відстрілу.

Отримаємо диференціальне рівняння, яке описує логістичну популяцію «зі збором врожаю» $\frac{dx}{dt} = 2(4 - x)x - h$, розв'язуючи яке можна знайти і дати обґрунтування обсягу квоти на відстріл для даної популяції.

Зрозуміло, що безмежне нарощування чисельності, особливо при мізерних запасах зимового корму, також шкідливо і неприпустимо, як і необмежений видобуток звірів. «Основний принцип ведення мисливського господарства – запаси основних видів повинні доводитися до оптимального рівня і підтримуватися на ньому» [2, 228]. Такий підхід вимагає невпинної праці, наявності реальних статистичних даних, ґрунтовні знання та впровадження методів математичного моделювання.

Література

1. Корнійчук О.Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики / О.Е. Корнійчук // Збірник наук. праць міжнародної конференції «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2016». – Дніпропетровськ : НГУ, 2016. – С. 431-440.
2. Данилкин А.А. Косули (биологические основы управления ресурсами) / А.А. Данилкин. – М.: Товарищество научных изданий КМК, 2014. – 316 с.