ФРАКТАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ У РОЗВИТКУ СУЧАСНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Кривобочек М.М., *студент II курсу інженерно-технічного факультету ЖНАЕУ*
Корнійчук О.Е., *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики та прикладної механіки*

У статті подано аналіз нового напряму у формуванні математичного пізнання – фрактальної геометрії. Розглядаються приклади класичних самоподібних фігур. Висвітлюються питання, пов'язані із застосуванням теорії фракталів у сучасних наукових дослідженнях, у розвитку сучасних технологій та комп'ютерної фрактальної графіки.

The article analyzes the new trend the formation of mathematical knowledge – of fractal geometry. The examples are considered of classical self-similar shapes. The questions of application fractals in modern scientific researches, in the development of modern technology and of fractal computer graphics.

В оточуючому нас світі та геометрія, яку ми вивчаємо, у своїй більшості описує об'єкти і форми, що створені людиною. Проблема полягає у тому, що всі відомі нам поняття: піраміди, кулі, прямокутники, бісектриси кутів, гіпотенузи, катети – є мовою опису надто вузького набору явищ і форм. Будинки може й близькі до паралелепіпедів, проте дерева – не циліндри, а контури острова не параболи і не гіперболи. І з чим порівняти будову морської хвилі, форму сніжинки або листка папороті, як описати розгалужену структуру бронхів або кровоносної системи?

Слово «хаос» наводить на думки про щось непередбачуване. Проте, насправді хаос є досить упорядкованим і підкоряється певним законам. Піонером у цій галузі пізнання був французький математик, професор Бенуа Мандельброт. У 70-х роках минулого століття він створив і розвинув теорію *фракталів*. Це була нова, *фрактальна геометрія*, об’єктом дослідження якої стало все те нерівне, зламане, шершаве, зморщене, що нас оточує, тобто майже усе. Так у складних формах природи Мандельброт знайшов свій дивний порядок (рис. 1).

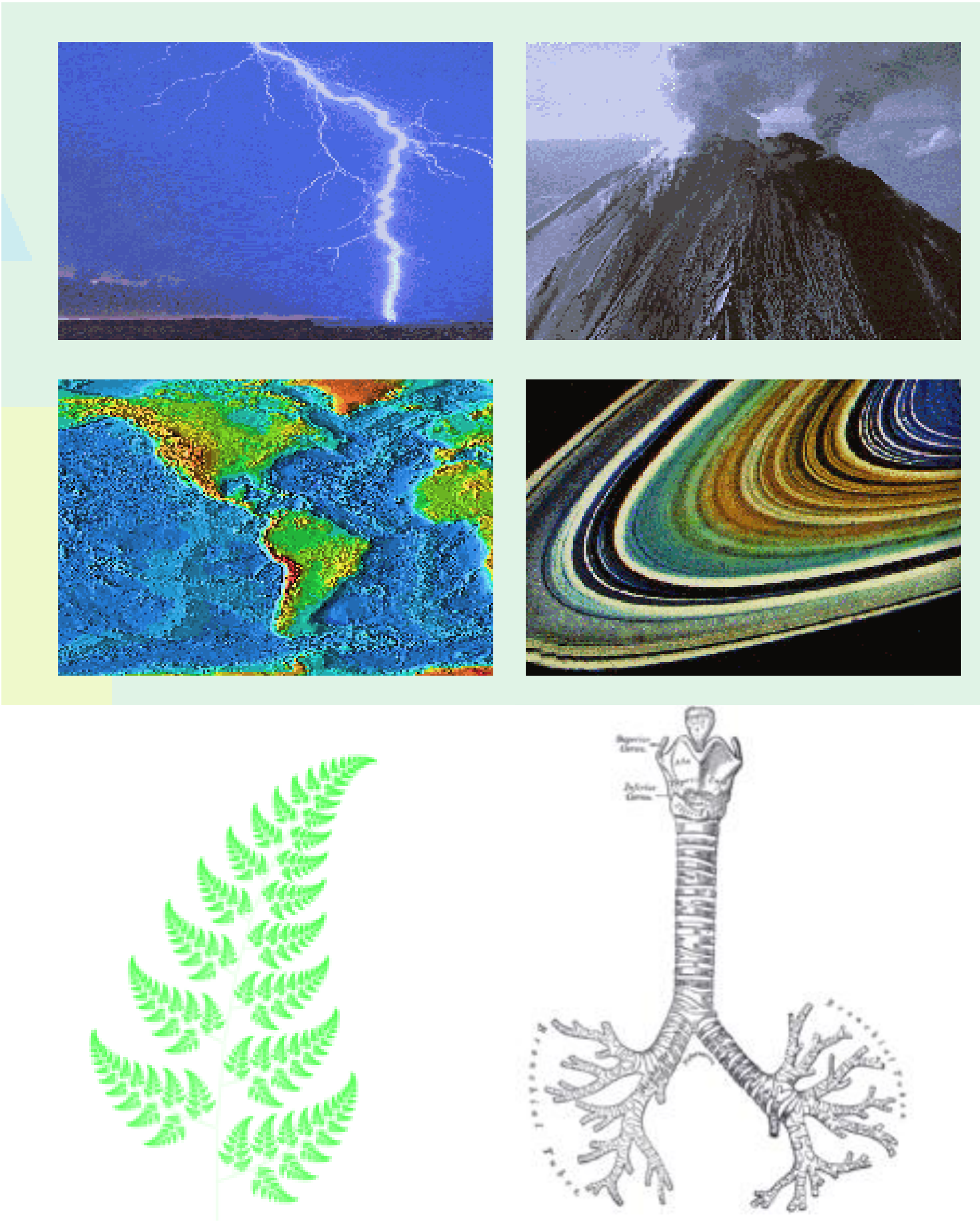


Рис. 1. *Фрактальна геометрія природи*

«Чому геометрію часто називають холодною і сухою? Одна з причин полягає в її нездатності описати форму хмари, гори, дерева або берега моря. Хмари – це не сфери, гори – не конуси, лінії берега – це не кола, і кора не є гладкою, і блискавка не розповсюджується по прямий. Природа демонструє нам не просто більш високий ступінь, а зовсім інший рівень складності» (Б.Мандельброт, «Фрактальна геометрія природи»).

Найбільш значущим для Бенуа періодом стала робота в IBM. IBM (*International Business Machines*) – транснаціональна корпорація США, один з найбільших у світі виробників та постачальників апаратного і програмного забезпечення, а також IT-сервісів та консалтингових послуг. Мандельброт досліджував помилки, які виникали в процесі передачі комп'ютерної інформації компанії за телефонними каналами зв'язку. Він провів аналіз періодів появи подібних помилок і визначив їх самоподібну структуру: поява помилок не була хаотичною, вони концентрувалися кластерами. При цьому кожен кластер мав власні кластери. Винахід Мандельброта дозволив компанії IBM не лише скоротити солідні суми на подолання перешкод. Це стало першим поштовхом для написання Бенуа книги «Фрактальна геометрія природи» [1].

Саме в цей період часу (1975р.) він придумав і ввів термін «*фрактал*» (лат. *fractus* – подрібнений, зламаний, розбитий) – геометрична фігура, що має властивість самоподібності, тобто складена з декількох частин, кожна з яких подібна до всієї фігури.

Простим прикладом фракталу є «*п'ятикутник Дарера*» (рис. 2), який має вигляд зв'язки п'ятикутників. Фактично його утворено з використанням п'ятикутника у якості ініціатора та рівнобедрених трикутників у якості генератора, для яких відношення більшої сторони до меншої точно дорівнює так званій золотій пропорції (1.618033989 або 1/(2cos72°)).

Ці трикутники вирізаються з середини кожного п'ятикутника, у результаті чого отримується фігура, яка схожа на 5 маленьких п'ятикутників, приклеєних до одного великого.

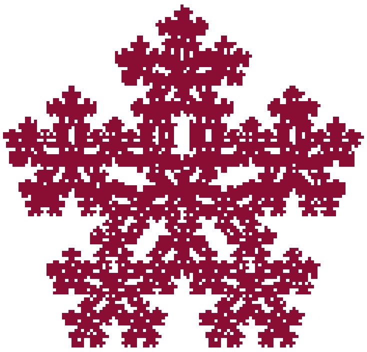


Рис. 2. *П'ятикутник Дарера*

До появи фрактальної геометрії наука спиралася на системи, які укладались у тривимірний простір. Проте ще Ейнштейном було доведено, що тривимірність є лише моделлю дійсності, а не самою дійсністю. Окрім трьох вимірів наша реальність знаходиться й у часовому вимірі. Саме Бенуа зміг показати, як виглядає чотиривимірний простір – фрактальне обличчя хаосу. Він виявив, що до складу четвертого виміру входять не тільки перші три, а й інтервали між ними.

Фрактали – геометричні об'єкти з дробовою розмірністю. Наприклад, розмірність лінії – 1 , площі – 2 , об'єму – 3 . А у фрактала значення розмірності може бути між 1 і 2 або між 2 і 3. Наприклад, фрактальна розмірність зім'ятої паперової кульки приблизно дорівнює 2,5. У математиці існує спеціальна складна формула для обчислення розмірності фракталів.

Фрактали знаходять все більше застосування у сучасній науці. Вони описують реальний світ навіть краще, ніж традиційна фізика або математика. У фізиці фрактали природнім чином виникають при моделюванні нелінійних процесів таких, як турбулентна течія рідини, складні процеси дифузії-адсорбції, полум'я, хмари тощо. Фрактали використовуються при моделюванні пористих матеріалів, наприклад, в нафтохімії. В біології застосовуються для моделювання популяцій та для опису внутрішніх органів (система кровоносних судин).

Фрактали виникають при аналізі економічних та фінансових процесів. Графіки котирувань на біржі (фунт стерлінг/ американський долар) дають нам зразок типової броунівської траєкторії (рис. 3). Причому зберігається загальна структура графіка у двогодинному, добовому та тижневому масштабі.

Рис. 3. *Котирування валют*

Найбільш корисним застосуваннням фракталів у комп'ютерній техніці є фрактальне стиснення даних. При цьому картинки стискаються набагато краще, ніж це виконується звичайними методами, – 600:1. Інша перевага фрактального стиснення полягає у тому, що при збільшенні не спостерігається ефект пікселізації, що різко погіршує чіткість картинки. Окрім того, фрактально стиснута картинка після збільшення часто виглядає навіть краще, ніж до цього.

Система призначення *IP*-адресів у мережі *Netsukuku* використовує принцип фрактального стиснення інформації для компактного збереження інформації про вузли мережі. Кожен вузол мережі *Netsukuku* зберігає всього 4 Кб інформації про стан сусідніх вузлів, при цьому будь-який новий вузол підключається до загальної мережі без необхідності у центральному регулюванні роздачі *IP*-адресів, що, наприклад, є характерним для мережі Інтернет. Отже, принцип фрактального стиснення інформації гарантує повністю децентралізовану, а отже, максимально стійку роботу всієї мережі.

Фрактали широко використовуються у комп'ютерній графіці для побудови зображень природних об'єктів таких, як дерева, кущі, горні ландшафти, поверхні морів тощо. Для цього створено так звані генератори фракталів – спеціальні комп'ютерні програми, які дозволяють обрати алгоритм генерації фрактальних зображень, збільшити той чи інший фрагмент зображення, поміняти кольорову гаму, редагувати деякі топологічні параметри і зберігати отримане зображення в одному з популярних графічних форматів, таких як JPEG, TIFF або PNG.

Геометричні фрактали – саме з них починалася історія фракталів. Їх отримують шляхом простих геометричних побудов. Зазвичай береться «приманка» – аксіома – набір відрізків, на підставі яких будуватиметься фрактал. Далі до цієї «приманки» застосовують набір правил, який перетворить її у будь-яку геометричну фігуру.

Використання фрактальної геометрії при проектуванні антенних пристроїв було вперше застосоване американським інженером Натаном Коеном. Він жив у центрі Бостона, де було заборонено встановлювати зовнішні антени на будівлях. Коен вирізав із алюмінієвої фольги фігуру у формі кривої Коха (рис. 4) та наклеїв її на аркуш, потім приєднав до приймача. Таким чином він заснував власну компанію і наладив серійний випуск таких приладів.

Існує проста рекурсивна процедура отримання фрактальних кривих на площині. Задамо довільну ламану з кінцевою кількістю ланок, так званий генератор. Далі, замінимо в ній кожен відрізок генератором (точніше, ламаною, подібною до генератора). В отриманій ламаній знову замінимо кожний відрізок генератором. Продовжуючи так до нескінченності, гранична крива буде фрактальною кривою. На рисунку 4 наведено перших чотири кроки цієї процедури для кривої Коха. Також можна побудувати сніжинку Коха на сторонах рівностороннього трикутника.

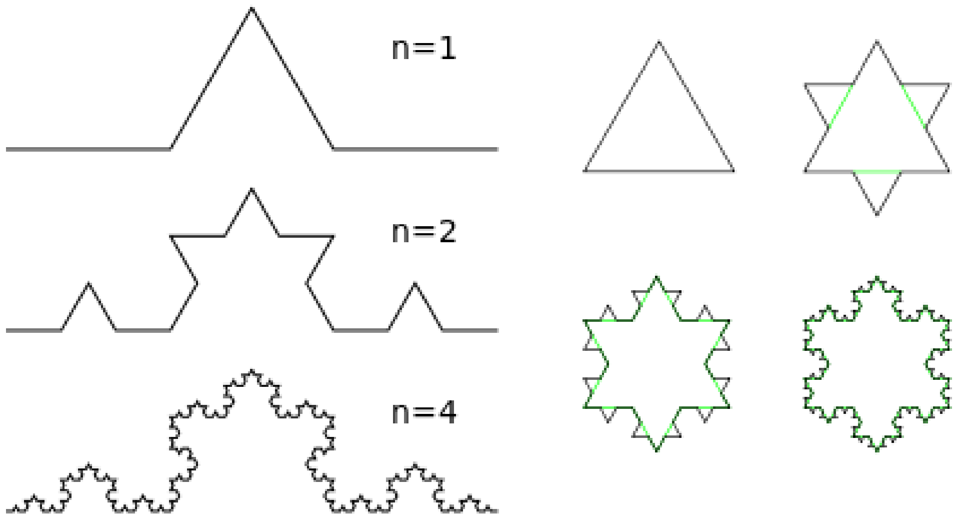


Рис. 4. *Крива Коха*

Прикладами таких кривих є також крива Маньківського, крива Гільберта, ламана дракона, крива Пеано, крива Леві. Етапи побудови кривої Леві показано на рисунку 5 і вона є кроною дерева Піфагора.

Дерево Піфагора – різновид фрактала, який оснований на фігурі, відомої під назвою «Піфагорові штани». Піфагор доводячи свою славнозвісну теорему, побудував фігуру де на сторонах прямокутного трикутника розташовані квадрати. У наш час ця фігура Піфагора виросла в ціле дерево. Вперше дерево Піфагора під час другої світової війни побудував Босман, використовуючи звичайну лінійку для креслення.

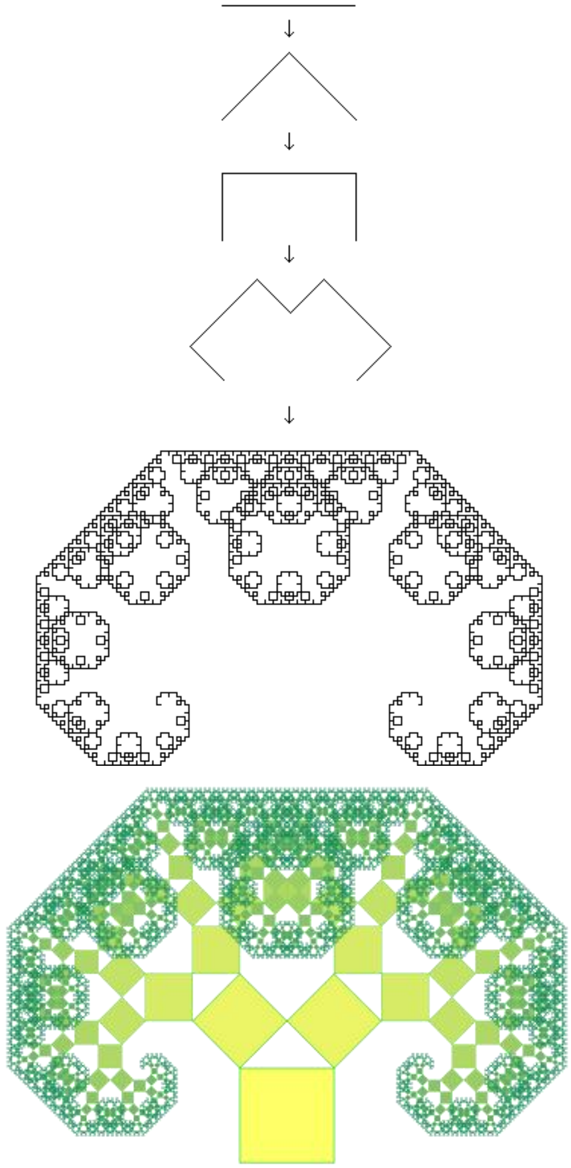
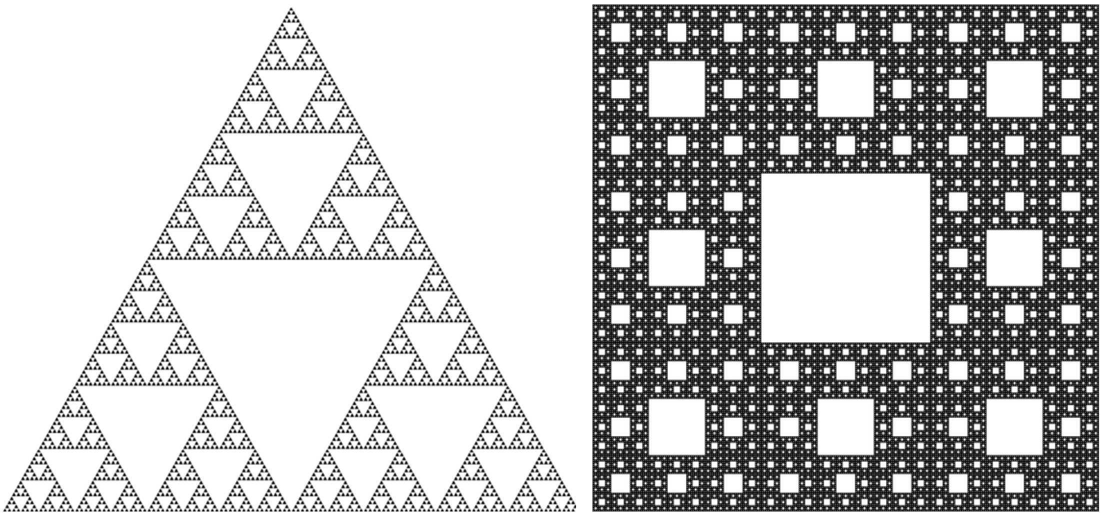


Рис. 5. *Дерево Піфагора*

Трикутник ***Серпінського*** – ще один приклад фрактальної лінії, яка має нескінчену довжину і обмежує скінчену площу. Ця лінія самоподібна, тобто складається з трьох частин, які подібні всій кривій в цілому з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{3}$.

Для побудови трикутника Серпінського на першому кроці правильний трикутник ділимо середніми лініями на чотири рівні трикутники та центральний викидаємо.

На другому кроці з трьома трикутниками, що залишилися, робимо те саме і отримуємо дев'ять трикутників. На наступному кроці з трикутниками, що залишилися, робимо те саме і так до нескінченності. Після зчисленої кількості кроків отримаємо множину точок, які не були викинуті на жодному кроці з вихідного трикутника (рис. 6*а*).



а *б*

Рис. 6. *Трикутник та килим Серпінського*

Доведемо, що трикутник Серпінського – не поверхня, а лише лінія. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площа вихідного трикутника; $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4 \cdot 4}$ – площа трикутника, який викинули на першому кроці; $S_2 = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4^2 \cdot 4}$ – площа трикутників, які викинули на другому кроці; $S_3 = 3^2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4^4 \cdot 4}$ – площа трикутників, які викинули на третьому кроці. Отже,

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4 \cdot 4} + 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4^2 \cdot 4} + 3^2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4^4 \cdot 4} \ldots \right) =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4 \cdot 4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Знайдемо довжину цієї лінії..

$\ell_0 = a + a + a = 3a$ — довжина лінії на нульовому кроці;

$\ell_1 = 3 \cdot \frac{3a}{2}$ — довжина лінії на першому кроці;

$\ell_2 = 3 \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^2$ — довжина лінії на другому кроці;

… … … …

$\ell_k = 3 \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^k$ — довжина лінії на k-ому кроці.

$\ell_k \to \infty \ (k \to \infty)$

Зокрема, *килим Серпінського* (або квадрат Серпінського) отримується аналогічним чином. Рисунок 6*б* дає уявлення про утворену множину після чотирьох перших кроків побудови.

Трьохвимірний аналог килима Серпінського - *губку Менгера* - бачимо на рисунку 7.

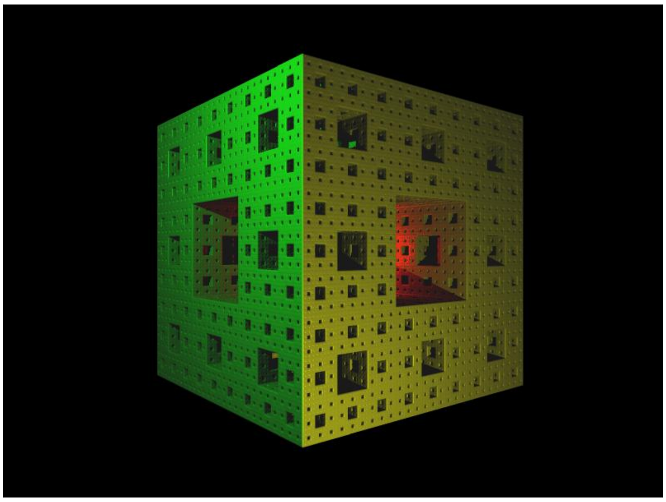


Рис. 7. *Губка Менгера*

Поверхня гір, наприклад, може моделюватись на комп'ютері з використанням фракталів, починаючи з трикутника в тривимірному просторі, з'єднуємо центральні точки кожного ребра відрізками і отримуємо 4 трикутники. Центральні точки потім зсовуються догори або донизу на випадкову відстань у фіксованому діапазоні.

Процедура повторюється зі зменшенням діапазону на кожній ітерації вдвічі. Побудовані таким чином фрактальні об'єкти та ландшафти важко відрізнити від природних (рис. 8).

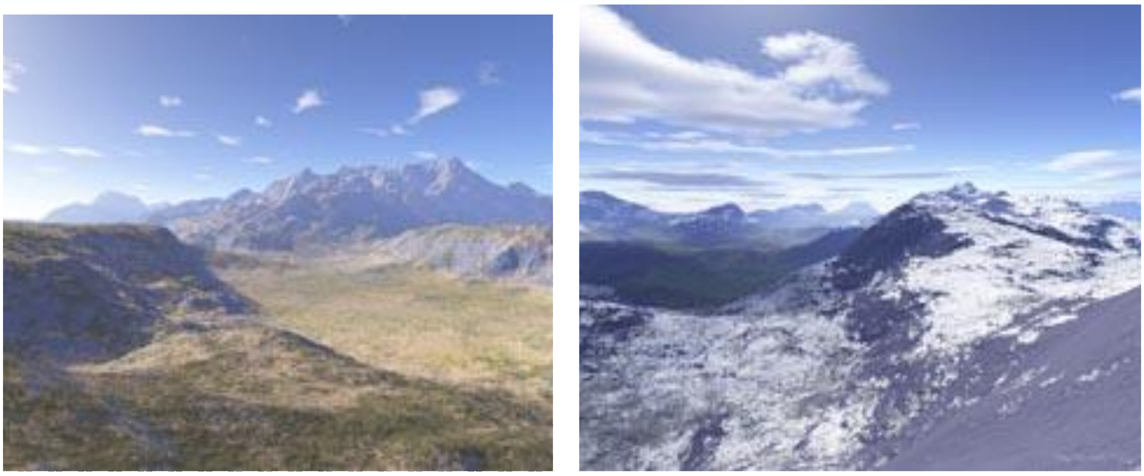


Рис. 8. *Моделювання природних об'єктів*

Алгебраїчні (комплексні) фрактали - це найбільша група фракталів. Їх будують, використовуючи прості алгебраїчні формули. Отримують їх за допомогою нелінійних процесів в *n*-мірних просторах. Найбільш вивчені двомірні процеси. Інтерпретуючи нелінійний ітераційний процес, як дискретну динамічну систему, можна користуватися термінологією теорії цих систем: фазовий портрет, сталий процес, аттрактор і т.д.

Простим прикладом *алгебраїчних фракталів* є геометрична прогресія 1, 2, 4, 8, 16, 32,..., 2^n, 2^{n+1},.. Якщо відкинути перші три члени, то отримаємо послідовність 8, 16, 32,..., 2^n, 2^{n+1},... Це також геометрична прогресія, причому з тим же знаменником. Крім того, її можна отримати з початкової прогресії множенням всіх членів на 8. Вона «подібна» вихідної прогресії з коефіцієнтом 8. Звичайно, аналогічний ефект автоподібності залишиться вірним і при відкиданні будь-якого числа початкових членів.

В якості типового прикладу динамічної системи, що приводить до фракталів, розглянемо систему, яка породжується наступною квадратичною функцією: $f(z) = z^2 + B,\ B \in C,\ z \in C$.

Більш точно: обираємо $z_0 = 0$ і обчислюємо наступні значення за формулою: $z_{n+1} = z_n^2 + B$, де число B може бути довільним комплексним числом.

Очевидно, що властивості траєкторії повністю залежать від вибору числа B (оскільки $z_0 = 0$ - фіксована точка). Отже, траєкторії мають вигляд:

$$B \to B^2 + B \to (B^2 + B)^2 + B \to ((B^2 + B)^2 + B)^2 + B \to ...$$

В залежності від B, траєкторія може :

1) досить швидко віддалятись від початку координат, прямуючи до нескінченності. Наприклад, при B = 1:

$$1 \to 1^2 + 1 = 2 \to 2^2 + 1 = 5 \to 5^2 + 1 = 26 \to 26^2 + 1 = 677 \to 677^2 + 1 \to \ ...$$

2) залишатись в околі початку координат, здійснюючи при цьому або періодичні, або «хаотичні» рухи. Наприклад, при B = i:

$$i \to i^2 + i = -1 + i \to (-1+i)^2 + i = -i \to (-i)^2 + i = -1 + i \to -i \to -1 + i \to -i \to ...$$

Жук Мандельброта (рис. 9) – це множина тих комплексних чисел B, для яких має місце випадок 2, тобто тих, для яких відповідна траєкторія залишається в околі початку координат після нескінченної кількості ітерацій.

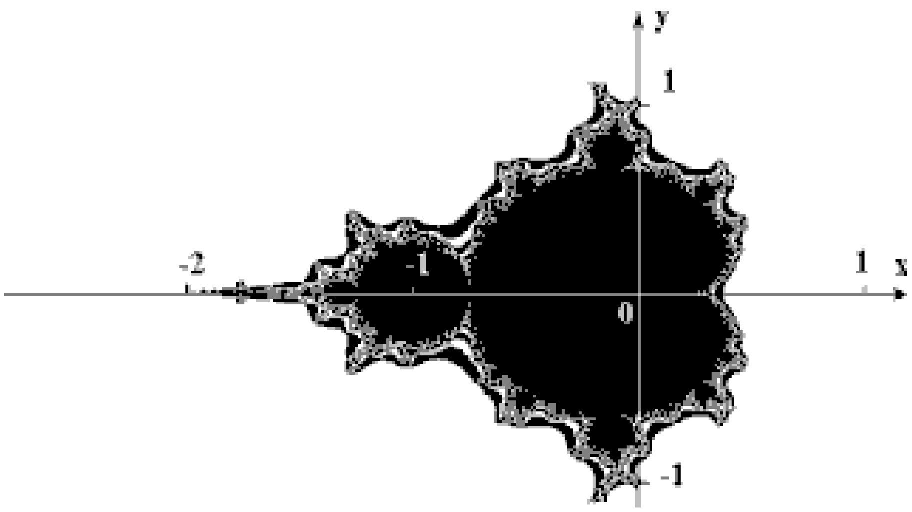


Рис. 9. *Жук Мандельброта*

Функція Вейєрштрасса – приклад неперервної функції, яка не має похідної в жодній точці (рис. 10). Ця функція задається на всій дійсній прямій виразом:

$$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

(a – довільне непарне число, а b – додатне число, що менше одиниці).

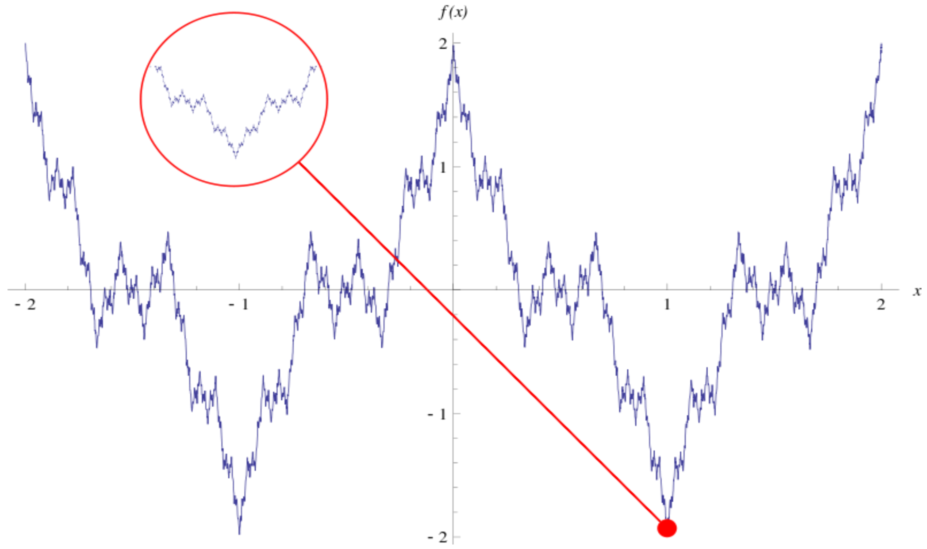


Рис. 10. *Графік функції Вейєрштрасса на інтервалі* [−2, 2]

Цей функціональний ряд можорується збіжним числовим рядом $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$.

Тому функція ω визначена і неперервна при всіх дійсних x. Тим не менш ця функція не має похідної принаймні, якщо $ab > \frac{3}{2}\pi + 1$.

Цей графік має фрактальний характер, демонструючи самоподібність: збільшена область у червоному крузі подібна до всього графіка.

Отже, фрактали – область дивного математичного мистецтва, коли за допомогою простих формул і алгоритмів утворюються картини надзвичайної краси і складності! Найбільш потужний додаток фрактальної теорії належить комп'ютерній графіці. Поперше, це фрактальне стискування зображень, по друге, – побудова ландшафтів, дерев, рослин і генерування фрактальних текстур.

Як бачимо, фрактали застосовуються безпосередньо у самій математиці, а їх вивчення є необхідною умовою щодо розуміння студентами багатьох понять вищої математики [2; 3] та мотивації навчання математичних дисциплін [4; 5].

Фракталами відкривається прекрасний, дивовижний світ, в якому панують математика, природа і мистецтво.

Список літератури

1. Мандельброт Б. Фрактальна геометрія природи / Бенуа Мандельброт. – Москва : Інститут комп'ютерних досліджень. – 2002. – 656 с.
2. Корнійчук О. Е. GRAN–ілюстрація та прогнозні обчислення еколого-економічної моделі / О. Е. Корнійчук // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. № 2. Комп’ютерно орієнтовані системи навчання. – Київ : Національний пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2007. – Вип. 5 (12). – С. 131-136.
3. Корнійчук О. Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв’язування задач економічного змісту / О. Е. Корнійчук // Комп’ютер у школі та сім’ї. – Київ : Ін-т педагогіки Нац. акад пед. наук України; Ін-т інф. технологій і засобів навчання Нац. акад. пед. наук України, 2012. – № 8 (104). – С. 12-16.
4. Корнійчук О. Мотивація в системі навчання математичних дисциплін / Олена Корнійчук // Витоки педагогічної майстерності. Сер. Педагогічні науки. – Полтава : ПНПУ ім. В.Г. Короленка, 2012. – Вип. 10. – С. 144-148.
5. Корнійчук О. Е. Професійно орієнтований тренінг у формуванні математичних компетентностей інженерів еколого-природознавчого напряму / О. Е. Корнійчук // Гуманітарний вісник державного вищого навчального закладу «Переяслав-Хмельницький держ. пед. ун-т ім. Г. Сковороди». Сер. Педагогіка. Психологія. Філософія. – 2013. – Вип. 28, т. 2. – С. 439-445.