УДК 517.983

В. П. Журавльов
(Житомирський національний агроекологічний університет)

СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ З НЕТЕРОВОЮ ЛІНІЙНОЮ ЧАСТИНОЮ

The paper highlights the weak non-linear boundary value problems for operator equations with Noether's operator in the linear part. The author has obtained necessary and sufficient conditions for finding the solutions of such boundary value problem in the noncritical case and critical case of first order. The author also managed to establish the converging iterative procedures for constructing the only possible solution, or at least one of possible solutions.

В работе рассмотрены слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений с нетеровым оператором в линейной части. Получены необходимые и достаточные условия существования решений таких краевых задач в некритическом случае и критическом случае первого порядка, построены сходящиеся итерационные процедуры для построения единственного решения и по крайней мере одного из возможных решений.

Дослідження розв'язності та побудова розв'язків слабконелінійних крайових задач для широкого класу звичайних [1], [2], [3], функціонально-диффеpенціальних [4], імпульсних систем диференціальних рівнянь [5], є задачею, розв'язок якої істотно залежить від можливості побудови розв'язків відповідної лінійної крайової задачі. Методи дослідження слабконелінійних крайових задач з нетеровою лінійною частиною для звичайних диференціальних рівнянь були успішно застосовані для диференціальних систем з імпульсним впливом та диференціальних систем із запізненням аргументу [4], [5], [6].

З точки зору теорії операторів основною відмінною особливістю усіх, перерахованих вище, задач є всюди розв'язність вихідних диференціальних систем [7]. Однак існує широкий клас крайових задач для інтегро-диференціальних, функціонально-диференціальних рівнянь та ін, у яких вихідне операторне рівняння є нетеровим, тобто не всюди розв'язним. Вони і будуть предметом розгляду даної роботи, в якій ставляться наступні завдання: отримати критерії розв'язності і формули для представлення розв'язків лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь, дослідити необхідні і достатні умови розв'язності слабконелінійних крайових задач (з нетеровим оператором у лінійній частині вихідного операторного рівняння) та побудувати збіжні ітераційні алгоритми для знаходження єдиного або одного з можливих розв'язків. Схема дослідження цих задач грунтується на переході за допомогою методів типу Ляпунова-Шмідта від крайової задачі до операторної системи, для розв'язання якої застосовні збіжні ітераційні алгоритми, які грунтуються на принципі нерухомої точки [2], [3], [4], [5], [8], [9].

1. Постановка задачі. Позначимо $\mathbf{B}_1-$ банаховий простір вектор-функцій $z(t)$, які визначені на проміжку $\mathcal{I}=[a,b], z(\cdot):\mathcal{I}\to\mathbf{R}^n$, $\mathbf{B}_2-$ банаховий простір вектор-функцій $f(t)$, які визначені на тому ж проміжку, $f(\cdot):\mathcal{I}\to\mathbf{R}^{n_1}$.

Нехай $L:\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_2-$ лінійний обмежений нетеровий оператор, $\ell:\mathbf{B}_1\to\mathbf{R}^m-$ лінійний обмежений вектор-функціонал.

Розглянемо нелінійну крайову задачу з малим додатнім параметром ε, $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0} = [0, \varepsilon_0]$

$$Lz(t) = f(t) + \varepsilon Z(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), \varepsilon). \tag{2}$$

Разом із задачею (1), (2) розглянемо лінійну крайову задачу

$$(Lz_0)(t) = f(t), \tag{3}$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \tag{4}$$

яка отримується з (1), (2) при $\varepsilon = 0$.

За аналогією з подібними задачами для систем звичайних диференціальних рівнянь [1], [2], [3] дамо наступне означення.

Означення 1. *Крайова задача (3), (4), яка утворюється із задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$, називається породжучою для задачі (1), (2). Розв'язки задачі (3), (4) називаються породжуючими.*

Нехай:

(a1) $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2-$ нетеровий оператор $\operatorname{ind} L = \operatorname{dimker} L - \operatorname{dimker} L^* = \mu - \nu \neq 0$;

(a2) $Z : \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{B}_2 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}-$ нелінійний по z обмежений оператор, який в околі, породжуючого розв'язку $||z - z_0|| \leq q$ має похідну Фреше по z і неперервний по $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$;

(a3) $Z(0,t,0) = 0, Z'_z(0,t,0) = 0$;

(a4) $f(t) \in \mathbf{B}_2$; (5)

(a5) $\ell : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{R}^m-$ лінійний обмежений вектор-функціонал;

(a6) $J : \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{R}^m-$ нелінійний по z обмежений вектор-функціонал, який в околі породжуючого розв'язку $||z - z_0|| \leq q$ має похідну Фреше по z і неперервний по ε;

(a7) $J(0,0) = 0, J'_z(0,0) = 0$;

(a8) $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Будемо розв'язувати задачу про знаходження умов існування і алгоритмів побудови розв'язку $z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), що належить простору $\mathbf{B}_1$ по t, неперервного по ε, що обертається при $\varepsilon = 0$ у розв'язок породжуючої крайової задачі (3), (4).

2. Попередні відомості. Нетерове операторне рівняння (3) є нормально розв'язним, тому має розв'язки для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0, \tag{6}$$

де $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L-$ проектор банахового простору $\mathbf{B}_2$ на підпростір Y_L, який ізоморфний нуль-простору $N(L^*)$ спряженого оператора L^* [10]. Умова (6) еквівалентна умові

$$(\Phi f)(\cdot) = 0,$$

де $\Phi-$ $(\nu \times n_1)$-вимірна матриця, рядки якої є лінійно-незалежними базисними вектор-функціоналами нуль-простору $N(L^*)$. При виконанні умови (6) загальний розв'язок нетерового рівняння (3) має вигляд:

$$z_0(t) = X(t)c + (L^- f)(t), \tag{7}$$

де $X(t)-$ $(n \times \mu)$-вимірна фундаментальна матриця, яка складена з базисних векторів нуль-простору $N(L)$ оператора L, $c \in \mathbf{R}^{\mu}$, $L^{-}-$ узагальнено-обернений оператор до оператора L [4], [5].

Після підстановки розв'язку (7) у крайові умови (4), отримаємо алгебраїчну систему

$$Qc + \ell(L^{-}f)(\cdot) = \alpha,$$

де $Q = \ell X(\cdot)-$ $(m \times \mu)$-вимірна стала матриця.

Позначимо $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{R}^{\mu} \to N(Q)-$ $(\mu \times \mu)$-вимірну матрицю-проектор; $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{R}^{m} \to Y_Q-$ $(m \times m)$-вимірну матрицю-проектор; $Q^{-}-$ $(\mu \times m)$-вимірну матрицю узагальнено-обернену до матриці Q [4].

Алгебраїчна система

$$Qc = \alpha - \ell(L^{-}f)(\cdot)$$

має розв'язки для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$ та $\alpha \in \mathbf{R}^{m}$, які задовольняють умову [4, c. 92]

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell(L^{-}f)(\cdot)\} = 0, \quad (d = m - \operatorname{rank} Q),$$

при виконанні якої вона має r-параметричну $(r = \mu - \operatorname{rank} Q)$ сім'ю розв'язків

$$c = \mathcal{P}_{N_r(Q)}c_r + Q^{-}\{\alpha - \ell(L^{-}f)(\cdot)\}, \quad c \in \mathbf{R}^{r}, \tag{8}$$

де $\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}-$ $(d \times m)$-вимірна матриця, яка складена з повної системи d лінійно-незалежних рядків матриці-проектора $\mathcal{P}_{Y_Q}$, $\mathcal{P}_{N_r(Q)}-$ $(\mu \times r)$-вимірна матриця, яка складена з повної системи r лінійно-незалежних стовпців матриці-проектора $\mathcal{P}_{N(Q)}$.

Підставляючи знайдену у (8) константу $c \in \mathbf{R}^{r}$ у (7), отримаємо загальний розв'язок лінійної крайової задачі (3), (4)

$$z_0(t) = z(t, c_r) = X(t)\{P_{N_r(Q)}c_r + Q^{-}[\alpha - \ell(L^{-}f)(\cdot)]\} + (L^{-}f)(t) =$$
$$= X_r(t)c_r + (L^{-}f)(t) - X(t)Q^{-}\ell(L^{-}f)(\cdot) + X(t)Q^{-}\alpha =$$
$$= X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q^{-}\alpha.$$

Тут $X_r(t) = X(t)\mathcal{P}_{N_r(Q)}-$ $(n \times r)$-вимірна фундаментальна матриця, стовпці якої є повною системою r лінійно-незалежних розв'язків відповідної (3), (4) однорідної $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ крайової задачі;

$$(Gf)(t) = (L^{-}f)(t) - X(t)Q^{-}\ell(L^{-}f)(\cdot),$$

$G : \mathbf{B}_2 \to \ker \ell \subset \mathbf{B}_1-$ узагальнений оператор Гріна напіводнорідної $(\alpha = 0)$ крайової задачі (3), (4).

Таким чином, для породжуючої крайової задачі (3), (4) справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2-$ *нетеровий оператор. Тоді, якщо* $\operatorname{rank} Q \leq \min(m, \mu)$, *то відповідна (3), (4) однорідна* $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *крайова задача має* r *і тільки* r *лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbf{R}^{r}.$$

Неоднорідна крайова задача (3), (4) розв'язна для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2$ *та* $\alpha \in \mathbf{R}^m$*, які задовольняють* $\nu + d$ *лінійно-незалежним умовам*

$$\begin{cases} (\varPhi f)(\cdot) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)\} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

і при цьому має r*-параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q^- \alpha. \tag{10}$$

Як наслідки з доведеної теореми, розглянемо два випадки, які нам знадобляться у подальшому, коли $\operatorname{rank} Q = \mu$ та $\operatorname{rank} Q = m$.

Наслідок 1. *Якщо* $\operatorname{rank} Q = \mu$*, то* $\mu \le m$*. У цьому випадку відповідна (3), (4) однорідна крайова задача не має розв'язків, крім тривіального.*

Неоднорідна крайова задача (3), (4) з нетеровим оператором $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *розв'язна для тих і тільки тих* $f(t) \in \mathbf{B}_2$ *та* $\alpha \in \mathbf{R}^m$*, які задовольняють* $\nu + d$ $(d = m - \mu)$ *лінійно-незалежним умовам (9), при виконанні яких вона має єдиний розв'язок*

$$z(t) = (Gf)(t) + X(t)Q_l^{-1}\alpha, \tag{11}$$

де $(Gf)(t) = (L^- f)(t) - X(t)Q_l^{-1}\ell(L^- f)(\cdot)$*,* $Q_l^{-1}-$ *ліва обернена матриця до матриці* Q.

Дійсно, якщо $\operatorname{rank} Q = \mu$, то $\mathcal{P}_{N(Q)} \equiv 0$ і $X_r(t) = 0$, $Q^- = Q_l^{-1}$ [10].

Наслідок 2. *Якщо* $\operatorname{rank} Q = m$*, то* $m \le \mu$*. У цьому випадку відповідна (3), (4) однорідна крайова задача має* r *і тільки* $r = \mu - m$ *лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbf{R}^r.$$

Неоднорідна крайова задача (3), (4) з нетеровим оператором $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *розв'язна для тих і тільки тих* $f(t) \in \mathbf{B}_2$*, які задовольняють* ν *лінійно-незалежним умовам*

$$(\varPhi f)(\cdot) = 0,$$

при виконанні яких вона має r*-параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q_r^{-1}\alpha,$$

де $(Gf)(t) = (L^- f)(t) - X(t)Q_r^{-1}\ell(L^- f)(\cdot)$*,* $Q_r^{-1}-$ *права обернена матриця до матриці* Q.

Дійсно, якщо $\operatorname{rank} Q = m$, то $\mathcal{P}_{Y_Q} \equiv 0$ і друга умова у системі (9) буде завжди виконана, а $Q^- = Q_r^{-1}$ [10].

Зауваження 1. *Якщо операторне рівняння (3) всюди розв'язне, то* $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$*. У цьому випадку оператор* L *має обмежений правий обернений оператор* L_r^{-1} *[10], а узагальнений оператор Гріна буде мати вигляд:*

$$(Gf)(t) = (L_r^{-1} f)(t) - X(t)Q^- \ell(L_r^{-1} f)(\cdot).$$

Зауваження 2. *Якщо $L-$ всюди розв'язний звичайний диференціальний оператор [3], [5] або диференціальний оператор із зосередженим запізненням [4], [6], то правий обернений оператор L_r^{-1} має інтегральне представлення*

$$(L_r^{-1}f)(t) = \int_a^b K(t,s)g(s)ds,$$

де $K(t,s)-$ матриця Коші.

У цих випадках узагальнений оператор Гріна має вигляд:

$$(Gf)(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds - X(t)Q^-\ell\int_a^b K(\cdot,s)f(s)ds.$$

3. Слабконелінійні крайові задачі. Побудова єдиного розв'язку. Спочатку розглянемо випадок, коли породжуюча крайова задача (3), (4) є однозначно розв'язною.

За наслідком 1 з теореми 1 маємо, що породжуюча крайова задача (3), (4) однозначно розв'язна тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{rank} Q = \mu$, $N(Q) = \{0\}$), а $f(t) \in \mathbf{B}_2$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$ задовольняють умовам (9), при виконанні яких єдиний розв'язок породжуючої крайової задачі (3), (4) запишеться у вигляді (11) $z(t) = z_0(t)$.

Зробимо у крайовій задачі (1), (2) заміну змінної

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t) + x(t,\varepsilon).$$

Тоді для відхилення $x(t,\varepsilon)$ від породжуючого розв'язку отримуємо наступну крайову задачу:

$$Lx(\cdot,\varepsilon)(t) = \varepsilon Z(z_0(t) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{12}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) \tag{13}$$

Знайдемо умову існування і алгоритм побудови розв'язку $x(t,\varepsilon)$, що належить простору $\mathbf{B}_1$ по t, неперервного по ε, який обертається при $\varepsilon = 0$ у нульовий. Застосуємо до крайової задачі (12), (13) наслідок 1 з теореми 1. Тоді, розглядаючи нелінійності $Z(z,t,\varepsilon)$ та $J(z,\varepsilon)$ як неоднорідності, отримаємо, що вона розв'язна тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{rank} Q = \mu$, а нелінійний оператор Z і нелінійний функціонал J задовольняють умовам

$$\begin{cases} \Phi Z(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) - \ell L^- Z(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

При виконанні умов (14) єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (12), (13) буде мати вигляд:

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon[(GZ(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t) + X(t)Q_l^{-1}J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)]. \tag{15}$$

Таким чином, крайова задача (12), (13) на множині вектор-функцій $x(t,\varepsilon)$ еквівалентна операторній системі

$$\begin{cases} \Phi Z(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) - \ell L^- Z(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon[(GZ(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t) + X(t)Q_l^{-1}J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)],$$

яка складена з системи (14) і рівності (15).

За аналогією з [11] можна показати, що для операторної системи (16) застосовний збіжний метод простих ітерацій. Тобто для неї існує інтервал значень $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$, при яких ітераційний процес збігається до шуканого розв'язку [2], [3], [5], [8], [9], [11]. Застосовуючи до системи (16) метод простих ітерацій, отримаємо наступний алгоритм для знаходження розв'язку $x(t,\varepsilon)$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon[(GZ(z_0(\cdot) + x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t) + X(t)Q_l^{-1}J(z_0(\cdot) + x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)],$$
$$x_0(t,\varepsilon) = 0,\ k = 1,2,3,\ldots. \tag{17}$$

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай крайова задача (1), (2) задовольняє умовам (5), а породжуюча крайова задача (3), (4) при виконанні умов* $\operatorname{rank} Q = \mu$ *та*

$$\begin{cases} \Phi f(\cdot) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)\} = 0, \quad (d = m - \mu) \end{cases}$$

однозначно розв'язна і має єдиний розв'язок (11).

Крайова задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли нелінійні оператор Z і функціонал J задовольняють умовам (14), при виконанні яких вона має єдиний розв'язок $z(t,\varepsilon)$, що належить простору $\mathbf{B}_1$ по t, неперервний по ε і обертається при $\varepsilon = 0$ у породжуючий розв'язок $z_0(t)$. Цей розв'язок знаходиться за допомогою збіжного на $[0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ ітераційного процесу (17) та формули

$$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t) + x_k(t,\varepsilon),\ \ k = 1,2,3\ldots.$$

4. Критичний випадок першого порядку.

4.1. Необхідна умова існування розв'язків. Далі розглянемо крайову задачу (1), (2) у випадку, коли породжуюча крайова задача (3), (4) неоднозначно розв'язна. Знайдемо умови існування та алгоритм побудови розв'язку $z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), що належить простору $\mathbf{B}_1$ по t, неперервний по ε і обертається при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків породжуючої крайової задачі (3), (4).

З теореми 1 маємо, що породжуюча крайова задача (3), (4) має розв'язки тоді і лише тоді, коли $f(t) \in \mathbf{B}_2$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$ задовольняють умовам (9), при виконанні яких вона має сім'ю розв'язків (10) $z(t,c_r) = z_0(t,c_r)$.

Припустимо, що $f(t) \in \mathbf{B}_2$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$ такі, що умови (9) виконані.

Теорема 3. *Нехай крайова задача (1), (2) задовольняє умовам (5) і має розв'язок $z(t,\varepsilon)$, неперервний по $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, що обертається при $\varepsilon = 0$ у деякий породжуючий розв'язок $z_0(t,c_r)$ (10) з константою $c_r = c_0$. Тоді елемент $c_0 \in \mathbf{R}^r$ задовольняє системі рівнянь*

$$\begin{cases} \Phi Z(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{J(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^- Z(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Тоді при усіх $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ виконуються тотожності

$$Lz(\cdot,\varepsilon)(t) \equiv f(t) + \varepsilon Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) \equiv \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Застосовуючи до цієї крайової задачі теорему 1 і враховуючи справедливість умов (9), отримаємо, що при усіх $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ нелінійні оператор $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та функціонал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняють умовам:

$$\begin{cases} \varPhi Z(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^- Z(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Припустимо тепер, що умова (19) не виконується. Тоді, оскільки $z(t,\varepsilon) \to z_0(t,c_0)$ при $\varepsilon \to 0$, а нелінійні оператор $Z(z,t,\varepsilon)$ і функціонал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняють умовам (a2), (a3) та (a5), (a6) з (5) в околі ($\varepsilon = 0$) розв'язку $z_0(t,c_0)$, то знайдеться таке досить мале $\varepsilon > 0$, що умови (18) не виконуються. Приходимо до протиріччя, що доводить справедливість теореми.

Позначивши ліву частину системи (19) через $F(c_0)$ запишемо її у вигляді

$$F(c_0) = \begin{bmatrix} \varPhi Z(z_0(\cdot,c_0),\cdot,0) \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{J(z(\cdot,c_0),0) - \ell L^- Z(z(\cdot,c_0),\cdot,0)\} \end{bmatrix} = 0. \tag{20}$$

Якщо система (20) має деякий розв'язок $c_0 = c_0^\sharp \in \mathbf{R}^r$, то константа $c_0^\sharp$ визначає той породжуючий розв'язок $z_0(t,c_0^\sharp)$, якому може відповідати розв'язок $z(t,\varepsilon)$ вихідної системи (1), (2), що обертається у $z_0(t,c_0^\sharp)$ при $\varepsilon = 0$.

Оскільки система рівнянь (20) аналогічна відомому у теорії періодичних нелінійних коливань [2], [3], [5] рівнянню для породжуючих амплітуд, то дамо наступне означення.

Означення 2. *Система операторних рівнянь (20) називається системою рівнянь для породжуючих констант крайової задачі (1), (2).*

Якщо система рівнянь (20) нерозв'язна, то крайова задача (1), (2) не має шуканого розв'язку.

Відмітимо, що на відміну від необхідної умови (14) існування однозначно розв'язної крайової задачі (12), (13), де (14) є жорсткою умовою на нелінійні оператор Z та функціонал J, необхідна умова існування розв'язків неоднозначно розв'язної крайової задачі, що полягає в тому, щоб система рівнянь для породжуючих констант (20) мала хоча б один розв'язок, може задовольнитися вибором елемента c_0 із сім'ї породжуючих розв'язків (10).

4.2. Достатні умови існування розв'язків.

Знайдемо умови існування розв'язків крайової задачі (1), (2) у випадку, коли породжуюча крайова задача (3), (4) неоднозначно розв'язна. Такий випадок для аналогічних задач для звичайних диференціальних систем названий у [3] критичним випадком першого порядку.

Виконаємо у задачі (1), (2) заміну змінних

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^\sharp) + x(t,\varepsilon),$$

де константа $c_0^\sharp \in \mathbf{R}^r$ задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (20). Тоді отримаємо наступну задачу: знайти умови існування та алгоритм побудови розв'язку $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі

$$\begin{aligned} Lx(\cdot,\varepsilon)(t) &= \varepsilon Z(z_0(t,c_0^\sharp)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \\ \ell x(\cdot,\varepsilon) &= \varepsilon J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \end{aligned} \tag{21}$$

Використовуючи властивості (5) нелінійних оператора $Z(z,t,\varepsilon)$ та функціонала $J(z,\varepsilon)$ виділимо у них лінійні частини по x та члени нульового порядку по ε. Внаслідок чого отримаємо розвинення:

$$\begin{aligned} Z(z_0(t,c_0^\sharp)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) &= Z_0(t,c_0^\sharp)+L_0x(\cdot,\varepsilon)(t)+R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \\ J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) &= J_0(\cdot,c_0^\sharp)+\ell_0x(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \end{aligned} \tag{22}$$

де

$Z_0(t,c_0^\sharp) = Z(z_0(t,c_0^\sharp),t,0): \ \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I} \to \mathbf{B}_2$;

$J_0(\cdot,c_0^\sharp) = J_0(z_0(\cdot,c_0^\sharp,0): \ \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I} \to \mathbf{R}^m$;

$L_0 : \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{B}_2 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — лінійний обмежений оператор, який є похідною Фреше від нелінійного оператора $Z(z,t,\varepsilon)$ по z при $z = z_0(t,c_0^\sharp)$;

$\ell_0 : \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{R}^m \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$– лінійний обмежений вектор-функціонал, який є похідною Фреше від нелінійного функціонала $J(z,\varepsilon)$ по z при $z = z_0(t,c_0^\sharp)$;

$R : \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{B}_2 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$– нелінійний оператор, що задовольняє умовам (a2) і (a3) з (5);

$\ell_1 : \mathbf{B}_1 \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{R}^m \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$– нелінійний вектор-функціонал, що задовольняє умовам (a6) і (a7) з (5).

Розглядаючи нелінійності у крайовій задачі (21) як неоднорідності і застосовуючи до неї теорему 1, для її розв'язку $x(t,\varepsilon)$ отримаємо:

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon).$$

Тут невідомий вектор $c(\varepsilon)$ визначається з умов розв'язності типу (19)

$$\left\{ \begin{aligned} &\Phi\{Z_0(\cdot,c_0^\sharp)+ \\ &\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{J_0(\cdot,c_0^\sharp)+\ell_0x(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \end{aligned} \right.$$

$$+L_0x(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} = 0,$$

$$-\ell L^-[Z_0(\cdot,c_0^\sharp)+L_0x(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} = 0,$$

а невідома вектор-функція $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ — за формулою:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon[&(GZ(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t)+ \\ &+X(t)Q^-J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Використовуючи розвинення (22), і той факт, що векторна константа $c_0^\sharp \in \mathbf{R}^r$ необхідно задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (20), для знаходження розв'язку $x(t,\varepsilon)$ слабконелінійної крайової задачі (1), (2) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$\mathcal{B}_0 c(\varepsilon) = -\left[\begin{array}{c} \Phi\{L_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} +R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ -\ell L^-[L_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{array}\right], \tag{23}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + L_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) +$$

$$+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + X(t)Q^-\{J(z_0(\cdot,c_0^\sharp) +$$

$$+\ell_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}],$$

де

$$\mathcal{B}_0 = \left[\begin{array}{c} (\Phi L_0 X_r)(\cdot) \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0 + \ell L^- L_0\}X_r(\cdot) \end{array}\right] -$$

$((\nu+d)\times r)$-вимірна стала матриця.

Позначимо через $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} : \mathbf{R}^r \to N(\mathcal{B}_0)$ і $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} : \mathbf{R}^{\nu+d} \to Y_{\mathcal{B}_0} -$ обмежені проектори, а через $\mathcal{B}_0^- -$ $(r\times(\nu+d))$-вимірну узагальнено-обернену матрицю до матриці $\mathcal{B}_0$ [4].

Далі розглянемо два варіанти побудови розв'язків поставленої задачі. Перший з них припускає побудову єдиного розв'язку для кожного вибраного породжуючого розв'язку. Другий — побудову принаймні одного розв'язку для кожного породжуючого.

4.3. Достатні умови побудови єдиного розв'язку.

Покажемо, що при умові $r \le \nu + d$ можна побудувати єдиний розв'язок слабконелінійної задачі (1), (2). Припустимо, що $\mathrm{rank}\mathcal{B}_0 = r$. Це означає що $\dim\ker\mathcal{B}_0 = 0$, тобто $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = 0$. Тоді узагальнено-обернена матриця $\mathcal{B}_0^-$ буде лівою оберненою $(\mathcal{B}_0)_l^{-1}$ [10].

Друге рівняння операторної системи (23) розв'язне тоді і тільки тоді, коли виконується умова [4], [5]

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}}\left[\begin{array}{c} \Phi\{L_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} +R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ -\ell L^-[L_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{array}\right] = 0, \tag{24}$$

при виконанні якої воно буде мати єдиний розв'язок

$$c(\varepsilon) = -(\mathcal{B}_0)_l^{-1} \left[\begin{array}{r} \Phi\{L_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} +R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ -\ell L^-[L_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{array} \right].$$

Тому при $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \begin{bmatrix} \Phi \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \end{bmatrix} = 0$, умова (24) завжди виконується і при $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = 0$ операторна система (23) набере вигляду:

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c(\varepsilon) = -(\mathcal{B}_0)_l^{-1} \left[\begin{array}{r} \Phi\{L_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \end{array} \right. \tag{25}$$

$$\left. \begin{array}{l} +R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ -\ell L^-[L_0 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{array} \right],$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + L_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+$$
$$+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + X(t)Q^-\{J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+$$
$$+\ell_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}],$$

За аналогією з [11] можна показати, що операторна система (25) належить до класу систем, для розв'язку яких застосовний збіжний метод простих ітерацій [2], [3], [8], [9] використовуючи який для знаходження розв'язків $x(t,\varepsilon)$ операторної системи (25), отримуємо наступний ітераційний процес.

Наближення $x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)$ до $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ шукатимемо як частинні розв'язки крайових задач

$$Lx_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)(t) = \varepsilon\{Z_0(t,c_0^\sharp) + (L_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])(t) + R(x_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\},$$

$$\ell x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{J_0(\cdot,c_0^\sharp) + \ell_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\},$$

які існують завдяки вибору $c_0^\sharp \in \mathbf{R}^r$ з системи рівнянь для породжуючих констант (20). За теоремою 1 з урахуванням розвинень (22) ці розв'язки можна представити у вигляді:

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + L_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+$$

$$+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + X_r(t)Q^-\{J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+$$

$$+\ell_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}].$$

З необхідної і достатньої умови розв'язності цієї крайової задачі приходимо до рівняння

$$\mathcal{B}_0 c_k(\varepsilon) = -\left[\begin{array}{r} \Phi\{L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \\ +R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ -\ell L^-[L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{array}\right], \tag{26}$$

з якого знаходиться k-е наближення $c_k(\varepsilon)$ до $c(\varepsilon)$. Розв'язність систем (26) на кожному кроці ітераційного процесу забезпечується виконанням умови

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \left[\begin{array}{c} \Phi \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \end{array}\right] = 0,$$

а єдиність розв'язку — умовою $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = 0$.

Тоді $(k+1)$-е наближення $x_{k+1}(t,\varepsilon)$ до $x(t,\varepsilon)$ запишеться у вигляді:

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

де $x_0(t,\varepsilon) = x_0^{(1)}(t,\varepsilon) = 0$, $x_1(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$.

Таким чином, для крайової задачі (1), (2) доведено наступну теорему.

Теорема 4. *Нехай крайова задача (1), (2) задовольняє умовам (5), а відповідна породжуюча крайова задача (3), (4) при виконанні умови (9) має сім'ю породжуючих розв'язків (10). Тоді для кожного елемента* $c_0 = c_0^\sharp \in \mathbf{R}^r$, *що задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (20), при виконанні умов*

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \left[\begin{array}{c} \Phi \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \end{array}\right] = 0 \tag{27}$$

крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $z(t,\varepsilon)$, *який належить простору* $\mathbf{B}_1$ *по* t, *неперервний по* ε *і обертається у породжуючий розв'язок* $z(t,c_0^\sharp)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на* $[0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу*

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^\sharp) + x_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c_k(\varepsilon) = -(\mathcal{B}_0)_l^{-1}\left[\begin{array}{r} \Phi\{L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \\ +R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ -\ell L^-[L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\} \end{array}\right],$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^\sharp) + L_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+$$
$$+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + X_r(t)Q^-\{J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+ \qquad ,$$
$$+\ell_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}],$$
$$x_0(t,\varepsilon) = x_0^{(1)}(t,\varepsilon) = 0, \;\; x_1(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon) \;\; k = 0,1,2,\dots .$$

Зауваження 3. *Якщо* $r = \nu + d$ *і* $\mathrm{rank}\mathcal{B}_0 = r$, *то до матриці* $\mathcal{B}_0$ *існує обернена* $\mathcal{B}_0^{-1}$. *Тоді* $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} \equiv 0$ *і, як наслідок,* $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \equiv 0$. *Таким чином, умови (27) автоматично виконуються і в ітераційному алгоритмі теореми 4 замість* $(\mathcal{B}_0)_l^{-1}$ *буде матриця* $\mathcal{B}_0^{-1}$.

Зауваження 4. *Якщо* $r > \nu + d$, *то єдиного розв'язку крайова задача (1), (2) не має.*

Зауваження 5. *Подібні крайові задачі для усюди розв'язних систем звичайних диференціальних рівнянь розглянуті у [3], а для диференціальних систем із зосередженим запізненням аргументу у [4].*

4.4. Достатня умова побудови принаймні одного розв'язку. Далі розглянемо розв'язання поставленої задачі при умові, що $\nu+d < r$. У цьому випадку умови (27) існування єдиного розв'язку крайової задачі (1), (2) для кожного елемента $c_0 = c_0^\sharp \in \mathbf{R}^r$, що задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (20) можна спростити, відмовившись від його єдиності.

Нехай $\mathrm{rank}\,\mathcal{B}_0 = \nu + d$. Це означає, що $\dim Y_{\mathcal{B}_0} = 0$, $\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{B}_0}} = 0$ і узагальнено-обернена матриця $\mathcal{B}_0^-$ буде дорівнювати правій оберненій матриці $(\mathcal{B}_0)_r^{-1}$ [10]. При виконанні умови $\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{B}_0}} = 0$ друге рівняння операторної системи (23) буде завжди розв'язним і його розв'язок можна представити у вигляді:

$$c(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N_\eta(\mathcal{B}_0)}\hat{c}_\eta - (\mathcal{B}_0)_r^{-1} \left[\begin{array}{r} \Phi\{L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{(\ell_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \\ +R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\} \\ -\ell L^-[L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)] \end{array} \right],$$

де $\hat{c}_\eta-$ довільний елемент простору $\mathbf{R}^\eta$, $\mathcal{P}_{N_\eta(\mathcal{B}_0)}-$ $(r\times\eta)$-вимірна матриця, яка складена з $\eta = r - (\nu + d)$ лінійно-незалежних стовпців проектора $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)}$.

Фіксуючи елемент $\hat{c}_\eta = \hat{c}_\eta^\sharp$, отримаємо один з множини розв'язків другого рівняння операторної системи (23).

Таким чином, при виконанні умови $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} = 0$ операторна система (23) набере вигляду:

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$
$$c_\eta(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N_\eta(\mathcal{B}_0)}\hat{c}_\eta^\sharp - (\mathcal{B}_0)_r^{-1} \left[\begin{array}{r} \Phi\{L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \\ +R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\} \\ -\ell L^-[L_0x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)] \end{array} \right],$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+L_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon)+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+$$
$$+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)+X(t)Q^-\{J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+$$
$$+\ell_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon)+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}]. \tag{28}$$

Ця операторна система також належить до класу систем, для розв'язку яких застосовний метод простих ітерацій [9], [11]. Ітераційний процес для цієї системи будується аналогічно п. 4.3.

Операторна система (28) схожа на операторну систему (25), проте вони мають принципову відмінність. На відміну від другого рівняння системи (25), де $c(\varepsilon)$ визначається однозначно, у другому рівнянні операторної системи (28) $c(\varepsilon)$ складається з двох доданків, один з яких — фіксований, а другий знаходиться на кожному кроці ітераційного процесу.

Для варіанту 2 справедлива теорема.

Теорема 5. *Нехай крайова задача (1), (2) задовольняє умовам (5), а відповідна породжуюча крайова задача (3), (4) при виконанні умови (9) має сім'ю породжуючих розв'язків (10). Тоді для кожного елемента* $c_0=c_0^\sharp\in\mathbf{R}^r$, *який задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (20), при виконанні умови*

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}}=0$$

крайова задача (1), (2) має принаймні один розв'язок $z(t,\varepsilon)$, *який належить простору* $\mathbf{B}_1$ *по* t, *неперервний по* ε *і обертається у породжуючий розв'язок* $z(t,c_0^\sharp)$ *при* $\varepsilon=0$. *Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на* $[0,\varepsilon_*]\subset[0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу:*

$$z_{k+1}(t,\varepsilon)=z_0(t,c_0^\sharp)+x_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon)=X_r(t)c_k(\varepsilon)+x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c_k(\varepsilon)=\mathcal{P}_{N_\eta(\mathcal{B}_0)}\hat{c}_\eta^\sharp-(\mathcal{B}_0)_r^{-1}\begin{bmatrix}\Phi\{L_0x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\end{bmatrix}$$
$$\left.\begin{matrix}+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}\\ +\ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell L^-[L_0x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]\end{matrix}\right], \tag{29}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+L_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon)+x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+$$
$$+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)+\varepsilon X_r(t)Q^-\{J(z_0(\cdot,c_0^\sharp)+$$
$$+\ell_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon)+x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)])+\ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}],\ldots.$$
$$x_0(t,\varepsilon)=x_0^{(1)}(t,\varepsilon)=0,x_1(t,\varepsilon)=x_1^{(1)}(t,\varepsilon)\ \ k=0,1,2,$$

Зауваження 6. *Якщо* $\operatorname{rank} \mathcal{B}_0 < \min(r, \nu + d)$, *то* $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} \neq 0$ *та* $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \neq 0$. *Тоді при виконанні умови* $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \begin{bmatrix} \Phi \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \end{bmatrix} = 0$ *крайова задача (1), (2) буде мати принаймні один розв'язок, який знаходиться за допомогою ітераційного процесу (29), в якому замість правої оберненої матриці* $(\mathcal{B}_0)_r^{-1}$ *буде узагальнено-обернена матриця* $\mathcal{B}_0^-$.

Зауваження 7. *Подібні крайові задачі для усюди розв'язних систем звичайних диференціальних рівнянь розглянуті у [4] за умови, що* $\hat{c}_\eta^\sharp = 0$.

Список літератури

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

2. *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

3. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.

4. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.

5. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. - Utrecht; Boston: VSP, 2004. - 317 p.

6. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 10. – С. 1677–1682.

7. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 2071. – 104 с.

8. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.

9. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. – Кишинев: Штиинца, 1974. – 291 с.

10. *Журавлев В.Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных $n-$ $(d-)$ нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве //УМЖ. – 2010. — Т. 62, №2. – С. 167 - 182.

11. *Бойчук О.А., Панасенко Є.В.* Слабконелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь у критичному випадку у банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 4. – С. 483 – 496.

Одержано 18.09.2011