УДК 517.983

В. П. Журавльов
(Житомирський національний агроекологічний університет)

ПСЕВДООБЕРНЕНИЙ ОПЕРАТОР ДО ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

The conditions for the normal solution of Fredholm integral operators with degenerate kernel in Hilbert spaces are obtained in the paper. The pseudoinvese operator for Fredholm integral operator with degenerate kernel in Hilbert space is constracted. The example is suggested.

В роботі отримано умови нормальної розв'язності інтегальних операторів Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах. Побудовано псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі. Наведено приклад.

Дослідження умов розв'язності та зображення загальних розв'язків операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах є проблемою, яка залежить від можливості побудови узагальнено-обернених та псевдообернених операторів у цих просторах.

Відомо [1,2], що узагальнено-обернений оператор у банаховому просторі визначається неоднозначно. У гільбертовому просторі завдяки скалярному добутку, однозначному розкладу його у прямі суми ортогональних замкнутих підпросторів, ізоморфності взаємно спряжених просторів, із множини узагальнено-обернених операторів можна виділити псевдооберений. Такий оператор єдиний [3,4].

Постановка задачі. Нехай $\mathbf{H}$– дійсний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(x,y)_{\mathbf{H}}$, $x \in \mathbf{H}$, $y \in \mathbf{H}$, $\mathcal{J} = [a,b]$– скінченний проміжок, $z(t)$– функція зі значеннями в гільбертовому просторі $\mathbf{H}$, вимірна у сенсі Бохнера [5, с. 138], така, що $\int\limits_a^b \|z(t)\|^2_{\mathbf{H}}dt < \infty$. Визначимо на множині таких функцій скалярний добуток $(z(t),g(t)) = \int\limits_a^b z^*(t)g(t)dt$, де "*" — операція транспонування. Визначений таким чином простір буде гільбертовим. Позначимо його $\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})$. Норма елемента $z(t)$ у цьому просторі визначається через скалярний добуток

$$\|z(t)\|_{\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})} = \sqrt{(z(t),z(t))_{\mathbf{H}}} = \sqrt{\int\limits_a^b \|z(t)\|^2_{\mathbf{H}}dt}.$$

В якості гільбертового простору $\mathbf{H}$ може, наприклад, виступати простір $\mathbf{l}_2$ або інший гільбертовий простір.

У цій роботі розглядаються умови узагальненої оборотності та способи побудови псевдооберненого оператора до інтегрального оператора

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds, \tag{1}$$

де оператор-функції $M(t) = \{m_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ та $N(t) = \{n_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$– зліченновимірні матриці.

Попередні відомості. Нехай L — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор, який діє з гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ у гільбертовий простір $\mathbf{H}_2$. Відомо [6], що ядро $N(L)$ та образ $R(L)$ нормально розв'язного оператора замкнені і, як наслідок, доповнювальні у гільбертових просторах $\mathbf{H}_1$ та $\mathbf{H}_2$, відповідно. Такі оператори називаються топологічно нетеровими [7], а за умови, що нуль-простори $N(L)$ та $N(L^*)$ — лінійно ізоморфні — топологічно фредгольмовими.

Відомо [1,3], що оператор L^+ — псевдообернений за Муром–Пенроузом [8,9] до оператора L задовольняє властивостям:

1. $LL^+L = L$
2. $L^+LL^+ = L^+$;
3. $(LL^+)^* = LL^+ = I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}$;
4. $(L^+L)^* = L^+L = I_{\mathbf{H}} - P_{N(L)}$,

де $P_{N(L)} : \mathbf{H} \to N(L)$ та $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N(L^*)$ — ортопроектори на нуль-простори $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та його спряженого, відповідно.

Оскільки норми операторів $P_{N(L)}$ і $P_{N(L^*)}$ дорівнюють одиниці, то з властивостей 3 та 4 маємо, що розв'язок $x = L^+y$ рівняння $Lx = y$ мінімізує норму нев'язки $\|Lx-y\|_{\mathbf{H}_2} = \|P_{N(L^*)}y\|_{\mathbf{H}_2}$, а розв'язок $f = (L^*)^+g = (L^+)^*g$ спряженого рівняння $L^*f = g$ мінімізує норму нев'язки $\|L^*f - g\|_{\mathbf{H}_1} = \|P_{N(L)}g\|_{\mathbf{H}_1}$, причому ці мінімуми досягаються, завдяки рівності $(L^*)^+ = (L^+)^*$, з допомогою одного і того ж оператора L^+. Проте, кожен мінімум окремо може досягатися за допомогою різних операторів.

Означення 1. [10] *Узагальнено-обернений оператор* $L^- : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_1$, *що задовольняє умовам*

1. $LL^-L = L$,
2. $L^-LL^- = L^-$,
3. $(LL^-)^* = LL^- = I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}$

називається правим псевдооберненим оператором до оператора L *і позначається* L_r^+.

Означення 2. [10] *Узагальнено-обернений оператор* $L^- : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_1$, *що задовольняє умовам*

1. $LL^-L = L$,
2. $L^-LL^- = L^-$,
3. $(L^-L)^* = L^-L = I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}$,

називається лівим псевдооберненим оператором до оператора L *і позначається* L_l^+.

Оператор, який є і лівим і правим псевдооберненим одночасно буде псевдооберненим у сенсі Мура–Пенроуза [8,9].

Наведемо необхідні відомості з загальної теорії побудови односторонньо псевдооберених та псевдообернених операторів у гільбертових просторах [10].

Нехай $L^- : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_1$ — узагальнено-обернений оператор до нормально розв'язного оператора L.

Теорема 1. *Оператор*

$$L_r^+ = L^-(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}),$$

де $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N(L^*)$ *— нескінченновимірний ортопроектор, є обмеженим правим псевдооберненим до топологічно нетерового оператора* $L : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$.

Теорема 2. *Оператор*

$$L_l^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L^-,$$

де $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \to N(L)$ *— нескінченновимірний ортопроектор, є обмеженим правим псевдооберненим до топологічно нетерового оператора* $L : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$.

Теорема 3. *Оператор*

$$L^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}),$$

де $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \to N(L)$ *та* $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N(L^*)$ *— нескінченновимірні ортопроектори, є єдиним обмеженим псевдооберненим до нормально розв'язного топологічно нетерового оператора* L.

Основний результат. Визначимо умови, при яких оператор (1) буде діяти з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ в себе. Для цього на зліченновимірні матриці $M(t)$ та $N(t)$ необхідно накласти деякі обмеження.

Для того, щоб елемент $p(t) = N(t)z(t)$ належав простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ для будь-якого $z(t) = \mathrm{col}\{z_1(t), z_2(t), \ldots, z_j(t), \ldots\} \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ повинна виконуватись нерівність

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}(t)z_j(t)\right)^2 < \infty.$$

Використовуючи нерівність Буняковського, отримаємо

$$\|p(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})} = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} p_i^2(t)dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}(t)z_j(t)\right)^2 dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}(t)\right)^2 dt \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{\infty} z_j(t)\right)^2 dt =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}(t)\right)^2 dt \|z(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})} = N_0^2\|z(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})}.$$

Таким чином, якщо

$$\int_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} n_{ij}^2(t)dt = N_0^2 < \infty, \tag{2}$$

то елемент $p(t)$ буде належати простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$.

Отже, доведено, що при виконанні умови (2) для будь-якого $z(t) \in \mathbf{L}_2(\mathfrak{I}, \mathbf{H})$ виконується (4) і, як наслідок, $p(t)$ належить простору $\mathbf{L}_2(\mathfrak{I}, \mathbf{H})$. Очевидно, що $\int\limits_a^b p(t)dt$ належить простору $\mathbf{H}$.

Аналогічно доводиться, що при виконанні умови

$$\int\limits_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} m_{ij}^2(t)dt = M_0^2 < \infty, \tag{3}$$

вектор-стовпець $M(t)\int\limits_a^b N(t)z(t)dt$ належить простору $\mathbf{L}_2(\mathfrak{I}, \mathbf{H})$.

Таким чином, при умовах (2), (3) інтегральний оператор (1) діє з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathfrak{I}, \mathbf{H})$ у цей же простір.

Позначимо $D = I_{\mathbf{H}} - A : \mathbf{H} \to \mathbf{H}-$ лінійний обмежений оператор, де $A = \int\limits_a^b N(t)M(t)dt$. Припустимо, що $D-$ нормально розв'язний оператор. Тоді існують ортопроектори $P_{N(D)} : \mathbf{H} \to N(D)$ та $P_{N(D^*)} : \mathbf{H} \to N(D^*)$ на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ операторів D та йому спряженого D^*, $P_{N(D)}^2 = P_{N(D)}$, $P_{N(D)}^* = P_{N(D)}$, $P_{N(D^*)}^2 = P_{N(D^*)}$, $P_{N(D^*)}^* = P_{N(D^*)}$.

Позначимо через $P_{N_0(D)}$ звуження оператора $P_{N(D)}$ на підпростір $N_0(D)$, породжений системою лінійно-незалежних вектор-стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(D)}$. Аналогічно позначимо $P_{N_0(D^*)}$ звуження оператора $P_{N(D^*)}$ на підпростір $N_0(D^*)$, породжений системою лінійно-незалежних вектор-стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(D^*)}$.

Тоді оператор-функції

$$X(t) = M(t)P_{N_0(D)}, \quad \Phi(t) = N^*(t)P_{N_0(D^*)} \tag{4}$$

є повними системами лінійно-незалежних вектор-функцій, які складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ інтегральних операторів L та L^*, відповідно.

Нехай

$$\alpha = \int\limits_a^b X^*(t)X(t)dt, \quad \beta = \int\limits_a^b \Phi^*(t)\Phi(t)dt$$

— самоспряжені обмежені оператори, які є оборотними зліченновимірними матрицями Грама, діють з гільбертового простору $\mathbf{H}$ в себе, оскільки вектор-стовпці та вектор-рядки зліченновимірних матриць $X(t)$ та $\Phi(t)-$ лінійно-незалежні.

Теорема 4. *Нехай $D : \mathbf{H} \to \mathbf{H}-$ лінійний обмежений нормально розв'язний оператор. Тоді інтегральний оператор $L : \mathbf{L}_2(\mathfrak{I}, \mathbf{H}) \to \mathbf{L}_2(\mathfrak{I}, \mathbf{H})$ (1) — нормально розв'язний.*

Доведення. Для доведення необхідно і достатньо показати, що існують ортопроектори $P_{N(L)} : \mathbf{L}_2(\mathfrak{I}, \mathbf{H}) \to N(L)$ та $P_{N(L^*)} : \mathbf{L}_2(\mathfrak{I}, \mathbf{H}) \to N(L^*)$.

Покажемо, що

$$(P_{N(L)}z)(t) = X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(s)z(s)ds,$$

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi(t)\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds$$

— ортопроектори на нуль-простори $N(L)$ та $N(L^*)$ інтегрального оператора (1) та йому спряженого, відповідно.

Доведення проведемо для оператора $P_{N(L)}$. Для цього покажемо, що:

$$1.\ P^2_{N(L)} = P_{N(L)}, \quad 2.\ P^*_{N(L)} = P_{N(L)}, \quad 3.\ LP_{N(L)} = 0.$$

Покажемо, що:

1. $P^2_{N(L)} = P_{N(L)}$.

$$(P^2_{N(L)}z)(t) = (P_{N(L)}P_{N(L)})z(t) = X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(s)\Big\{X(s)\alpha^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_a^b X^*(\tau)z(\tau)d\tau\Big\}ds = X(t)\alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(\tau)z(\tau)d\tau =$$

$$= X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(\tau)z(\tau)d\tau = (P_{N(L)}z)(t),$$

оскільки $\int\limits_a^b X^*(s)X(s)ds = \alpha$, $\alpha^{-1}\alpha = I_{N_0(D)}$, де $I_{N_0(D)}$– тотожний оператор у підпросторі $N_0(D)$.

2. $P^*_{N(L)} = P_{N(L)}$, тобто оператор $P_{N(L)}$ задовольняє співвідношенню

$$\big((P_{N(L)}z)(t), y(t)\big)_{\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})} = \big(z(t), (P^*_{N(L)}y)(t)\big)_{\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})}.$$

$$\big((P_{N(L)}z)(t), y(t)\big)_{\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})} = \int\limits_a^b (P_{N(L)}z)^*(t)y(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^b \Big[X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(s)z(s)ds\Big]^* y(t)dt = \int\limits_a^b \Big\{\int\limits_a^b \big[X^*(s)z(s)\big]^* ds\times$$

$$\times\big[X(t)\alpha^{-1}\big]^*\Big\}y(t)dt = \int\limits_a^b\int\limits_a^b z^*(s)X^{**}(s)(\alpha^{-1})^*X^*(t)y(t)dsdt =$$

$$= \int\limits_a^b z^*(s)\Big[X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(t)y(t)ds\Big]dt =$$

$$\int\limits_a^b z^*(s)(P_{N(L)}y)(s)ds = \big(z(t), (P_{N(L)}y)(t)\big)_{\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})}.$$

Таким чином, $P^*_{N(L)} = P_{N(L)}$.

3. $P_{N(L)}-$ ортопроектор на нуль-простір оператора L, тобто $LP_{N(L)} = 0$.

$$(LP_{N(L}z)(t) = X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(s)z(s)ds - M(t)\int\limits_a^b N(s)\times$$

$$\times\Big\{X(s)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(\tau)z(\tau)d\tau\Big\}ds = X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(t)z(s)ds-$$

$$-M(t)AP_{N_0(D)}\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(s)z(s)ds = X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(s)z(s)ds-$$

$$-M(t)[I_{\mathbf{H}} - D]P_{N_0(D)}\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(s)z(s)ds = 0,$$

оскільки $M(s)P_{N_0(D)} = X(s)$, $A = I_{\mathbf{H}} - D$, $DP_{N_0(D)} = 0$.

Таким чином, оператор $P_{N(L)}$ – ортопроектор на нуль-простір $N(L)$ оператора L. Доведення для оператора $P_{N(L^*)}$ проводиться аналогічно.

Отже, оператор $L-$ узагальнено оборотний і, як наслідок, нормально розв'язний. Тому для нього існує у гільбертовому просторі єдиний обмежений псевдообернений оператор L^+.

Для отримання конструкцій односторонньо псевдообернених та псевдооберненого операторів доведемо наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай $D : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ – нормально розв'язний оператор. Тоді оператор*

$$(L^- f)(t) = f(t) + M(t)D^+\int\limits_a^b N(s)f(s)ds$$

є обмеженим узагальнено-оберненим оператором до інтегрального оператора (1), де D^+ – обмежений псевдообернений оператор до оператора D.

Доведення. Відомо [11], що узагальнено-обернений оператор повинен задовольняти співвідношенню $LL^-L = L$, яке його визначає.

Обчислимо L^-L.

$$(L^-Lz)(t) = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^+\int\limits_a^b N(\tau)\Big\{z(\tau) - M(\tau)\times$$

$$\times\int\limits_a^b N(s)z(s)ds\Big\}d\tau = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^+\int\limits_a^b N(s)z(s)ds-$$

$$-M(t)D^+\int\limits_a^b N(\tau)M(\tau)d\tau\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds+$$

$$+M(t)D^{+}\int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)D^{+}A\int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t)\times$$

$$\times\int_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^{+}\big[I_{\mathbf{H}} - A\big]\int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t)\times$$

$$\times\int_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^{+}D\int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds+$$

$$+M(t)\big[I_{\mathbf{H}} - P_{N(D)}\big]\int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t)P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds,$$

оскільки $D^{+}D = I_{\mathbf{H}} - P_{N(D)}$

Таким чином, $(L^{-}Lz)(t) = z(t) - M(t)P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds.$

Далі обчислимо $LL^{-}L$.

$$(LL^{-}Lz)(t) = z(t) - M(t)P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)\int_a^b N(\tau)\Big\{z(\tau)-$$

$$-M(\tau)P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds\Big\}d\tau = z(t) - M(t)P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds-$$

$$-M(t)\int_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau + M(t)AP_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds =$$

$$= z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)\big[I_{\mathbf{H}} - A\big]P_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds =$$

$$= z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)DP_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds =$$

$$= z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds = (Lz)(t),$$

оскільки $DP_{N(D)} = 0$.

Таким чином, $(LL^{-}Lz)(t) = (Lz)(t)$.

Обмеженість оператора L^{-} випливає з обмеженості оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та оператора D^{+}.

Теорему доведено.

Позначимо

$$\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_0(D)}\alpha^{-1}P^{*}_{N_0(D)}, \quad \tilde{\beta}^{(-1)} = P_{N_0(D^{*})}\beta^{-1}P^{*}_{N_0(D^{*})}. \tag{5}$$

Теорема 6. *Нехай D — нормально розв'язний оператор. Тоді оператор*

$$(L_r^+ f)(t) = f(t) + \Big[M(t)D^+ - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\Big]\int\limits_a^b N(s)f(s)ds$$

є обмеженим правим псевдооберненим оператором до інтегрального оператора (1), де D^+ псевдообернений оператор до оператора D.

Доведення. За теоремою 1 правий псевдообернений оператор L_r^+ має вигляд

$$L_r^+ = L^-(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = L^- - L^- P_{N(L^*)}.$$

За теоремою 5 в якості узагальнено-оберненого оператора L^- візьмемо оператор

$$(L^- f)(t) = f(t) + M(t)D^+\int\limits_a^b N(s)f(s)ds.$$

Обчислимо $L^- P_{N(L^*)}$.

$$(L^- P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi(t)\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds +$$

$$+M(t)D^+\int\limits_a^b N(s)\Big\{\Phi(s)\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(\tau)f(\tau)d\tau\Big\}ds =$$

$$= \Phi(t)\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds + M(t)D^+ N P_{N_0(D^*)}\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds =$$

$$= \Phi(t)\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

оскільки $\int\limits_a^b N(s)\Phi(s)ds = \int\limits_a^b N(s)N^*(s)ds P_{N_0(D^*)} = NP_{N_0(D^*)}$, а внаслідок самоспряженості операторів $N = \int\limits_a^b N(s)N^*(s)ds$ та $P_{N(D^*)}$ маємо, що $NP_{N_0(D^*)} = P^*_{N_0(D^*)}N$, а $D^+P_{N_0(D^*)} = 0$, $\Phi(t) = N^*(t)P_{N_0(D^*)}$, $\tilde{\beta}^{(-1)} = P_{N_0(D^*)}\beta^{-1}P^*_{N_0(D^*)}$.

Тоді оператор

$$(L_r^+ f)(t) = (L^- f)(t) - (L^- P_{N(L^*)}f)(t) =$$

$$= f(t) + M(t)D^+\int\limits_a^b N(s)f(s)ds - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds =$$

$$= f(t) + \Big[M(t)D^+ - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\Big]\int\limits_a^b N(s)f(s)ds$$

є обмеженим правим псевдооберненим оператором до інтегрального оператора (1).

Теорема 7. *Нехай D — нормально розв'язний оператор. Тоді оператор*

$$(L_l^+ f)(t) = f(t) + M(t) \int\limits_a^b \left[D^+ N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)} M^*(s)\right] f(s)ds$$

є обмеженим лівим псевдооберненим оператором до інтегрального оператора (1), де D^+ псевдообернений оператор до оператора D.

Доведення. За теоремою 2 лівий псевдообернений оператор L_r^+ має вигляд

$$L_l^+ = L^- - P_{N(L)} L^-.$$

Обчислимо $P_{N(L)} L^-$.

$$(P_{N(L)} L^- f)(t) = X(t)\alpha^{-1} \int\limits_a^b X^*(s) \Big\{ f(s) +$$

$$+ M(s) D^+ \int\limits_a^b N(\tau) f(\tau) d\tau \Big\} ds = X(t)\alpha^{-1} \int\limits_a^b X^*(s) f(s) ds +$$

$$+ X(t)\alpha^{-1} P^*_{N_0(D)} M D^+ \int\limits_a^b N(s) f(s) ds =$$

$$= X(t)\alpha^{-1} \int\limits_a^b X^*(s) f(s) ds = M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int\limits_a^b M^*(s) f(s) ds,$$

оскільки $X^*(s) = P^*_{N_0(D)} M^*(s)$, $M = \int_a^b M^*(s) M(s) ds-$ самоспряжена матриця, $P^*_{N_0(D)} M = M P_{N_0(D)}$, а $P_{N_0(D)} D^+ = 0$, $X(t) = M(t) P_{N_0(D)}$, $\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_0(D)} \alpha^{-1} P^*_{N_0(D)}$.

Тоді оператор

$$(L_l^+ f)(t) = (L^- f)(t) - (P_{N(L)} L^- f)(t) =$$

$$= f(t) + M(t) D^+ \int\limits_a^b N(s) f(s) ds - M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int\limits_a^b M^*(s) f(s) ds =$$

$$= f(t) + M(t) \int\limits_a^b \left[D^+ N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)} M^*(s)\right] f(s) ds$$

є обмеженим лівим псевдооберненим оператором до інтегрального оператора (1).

Конструкцію псевдооберненого оператора L^+ дає наступна теорема.

Теорема 8. *Нехай $D-$ нормально розв'язний оператор. Тоді оператор*

$$(L^+f)(t) = f(t) + M(t)\int\limits_a^b \left[D^+N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)}M^*(s)\right]f(s)ds +$$

$$+ \left[M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\right]\int\limits_a^b N(s)f(s)ds \quad (6)$$

є єдиним обмеженим псевдооберненим оператором до інтегрального оператора (1), де D^+ узагальнено-обернений оператор до оператора D.

Доведення. За теоремою 3

$$L^+ = (I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})} - P_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})} - P_{N(L^*)}). \quad (7)$$

Розкривши дужки у співвідношенні (7), отримаємо

$$L^+ = L^- - P_{N(L)}L^- + P_{N(L)}L^-P_{N(L^*)} - L^-P_{N(L^*)}, \quad (8)$$

При доведенні теорем 5 та 6 було обчислено другий та четвертий доданки. Обчислимо третій доданок.

$$(P_{N(L)}L^-P_{N(L^*)}f)(t) = (P_{N(L)}P_{N(L^*)}f)(t) =$$

$$= X(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X^*(s)\Big\{\Phi(s)\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(\tau)f(\tau)d\tau\Big\}ds =$$

$$= X(t)\alpha^{-1}P^*_{N_0(D)}A^*P_{N_0(D^*)}\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds =$$

$$= X(t)\alpha^{-1}P^*_{N_0(D)}[I_{\mathbf{H}} - D^*]P_{N_0(D^*)}\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds =$$

$$= X(t)\alpha^{-1}P^*_{N_0(D)}P_{N_0(D^*)}\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds,$$

оскільки $\int\limits_a^b X^*(s)\Phi(s)ds = P^*_{N_0(D)}\int\limits_a^b M^*(s)N^*(s)dsP_{N_0(D^*)} = P^*_{N_0(D)}A^*P_{N_0(D^*)},\ A^* = I_{\mathbf{H}} - D^*$, а $D^*P_{N_0(D^*)} = 0$.

Підставивши отримані результати у формулу (8) та використавши позначення (4), (5), отримаємо псевдообернений оператор до інтегрального оператора (8) у гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(\mathcal{J},\mathbf{H})$

$$(L^+f)(t) = f(t) + M(t)D^+\int\limits_a^b N(s)f(s)ds - M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\int\limits_a^b M^*(s)f(s)ds +$$

$$+M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)}\int_a^b N(s)f(s)ds - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\int_a^b N(s)f(s)ds =$$

$$= f(t) + M(t)\int_a^b \left[D^+N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)}M^*(s)\right]f(s)ds +$$

$$+\left[M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\right]\int_a^b N(s)f(s)ds.$$

Обмеженість псевдооберненого оператора (6) випливає з обмеженості оператор-функцій $M(t), N(t)$ та оператора D^+.

Зауваження 1. *Замість псевдооберненого оператора D^+ у формулі (6) можна взяти узагальнено-обернений оператор D^-.*

Приклад.

Побудуємо односторонньо псевдообернені та псевдообернений оператори до лінійного інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) = z(t) - M(t)\int_0^2 N(s)z(s)ds, \tag{9}$$

де

$$M(t) = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ t-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ t-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & 0 \end{pmatrix}, \dots\right\},$$

$$N(s) = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix}, \dots\right\}$$

— зліченновимірні діагональні матриці, які діють з простору $\mathbf{L}_2([0,2], \mathbf{l_2})$ в себе.

Оператор $D = I_{\mathbf{l_2}} - A$, де $A = \int_0^2 N(s)M(s)ds$ має вигляд

$$D = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots\right\}.$$

Тоді

$$P_{N(D)} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots\right\},$$

$$P_{N(D^*)} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots\right\},$$

$$D^+ = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots\right\}.$$

Звуження $P_{N_0(D)}$ та $P_{N_0(D^*)}$ операторів $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$, відповідно будуть мати вигляд

$$P_{N_0(D)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$P_{N_0(D^*)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Тоді оператор-функції

$$X(t) = M(t)P_{N_0(D)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ t-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ t-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\Phi(t) = N^*(t)P_{N_0(D^*)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3t}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3t}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

є повними системами лінійно-незалежних вектор-функцій, які складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ інтегральних операторів L та L^*, відповідно.

Далі побудуємо матриці Грама

$$\alpha = \int_0^2 X^*(t)X(t)dt = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\beta = \int_0^2 \Phi^*(t)\Phi(t)dt = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

та матриці

$$\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_0(D)}\alpha^{-1}P^*_{N_0(D)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\tilde{\beta}^{(-1)} = P_{N_0(D^*)}\beta^{-1}P^*_{N_0(D^*)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Тоді за теоремою 6 побудуємо правий псевдообернений оператор

$$(L_r^+ f)(t) = f(t) + M_1(t) \int_0^2 N(s)f(s)ds,$$

де

$$M_1(t) = M(t)D^+ - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)} =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{4-3t}{10} & \frac{3t-4}{10} & \frac{1-2t}{5} \\ \frac{-3-10t}{20} & \frac{13-10t}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4-3t}{10} & \frac{3t-4}{10} & \frac{1-2t}{5} \\ \frac{-3-10t}{20} & \frac{13-10t}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

За теоремою 7 лівий псевдообернений оператор буде мати вигляд

$$(L_l^+ f)(t) = f(t) + M(t)\int_a^b N_1(s) f(s) ds,$$

де

$$N_1(s) = D^+ N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)} M^*(s) = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{3-6s}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3-3s}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{3-6s}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3-3s}{2} & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

За теоремою 8 псевдообернений оператор до інтегрального оператора (9) буде мати вигляд

$$(L^+ f)(t) = f(t) + M(t)\int_a^b N_1(s) f(s) ds + M_2(t)\int_a^b N(s) f(s) ds$$

де $N_1(s)$ — визначено вище, а

$$M_2(t) = M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)} =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{12t-20}{35} & \frac{20-12t}{35} & \frac{6t-10}{35} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{12t-20}{35} & \frac{20-12t}{35} & \frac{6t-10}{35} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV+317 p.
2. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
4. *Ben-Israel A., Greville T.N.E.* Generalized Inverses, second editions. Theory and applications – New York: Wiley Interscience, 1974. – 395 p.
5. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
7. *Абдуллаев А. Р., Бурмистрова А. Б.* Топологические нетеровы операторы: обобщенная обратимость и аддитивное представление // Известия вузов. – 1994. – № 6. – С. 3 – 7.
8. *Moore E.H.* On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – № 26. – P. 394–395.
9. *Penrose R.* A Generalized Inverse for Matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955. T. 51, № 3. – P. 406–413.
10. *Журавлев В. Ф.* Псевдообратный оператор к матричному в бесконечномерном гильбертовом пространстве // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. – 2011. – Вип. 22, № 1. – С. 52 – 63.
11. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.

Одержано 06.06.2014